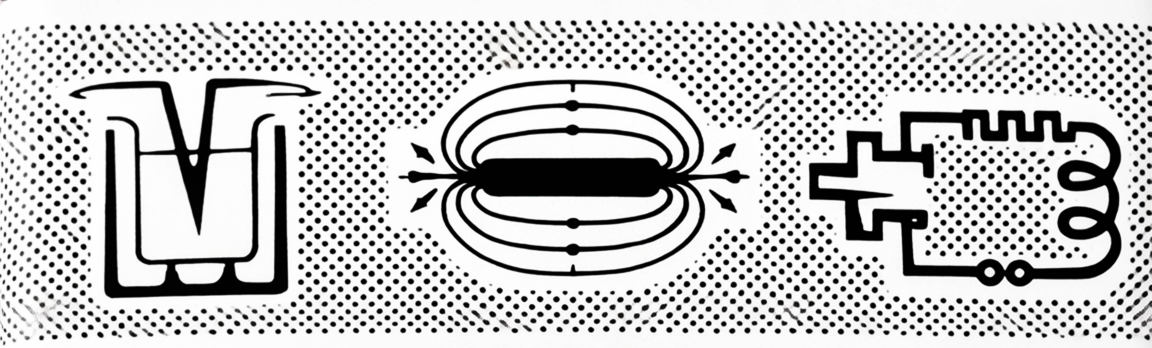
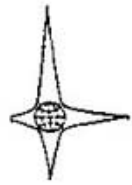


S. FRISH, A. TIMOREVA

Curso de Física General

TOMO 2



EDITORIAL MIR

www.elsolucionario.org

С. ФРИШ, А. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ II

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

S. FRISH, A. TIMOREVA

CURSO DE FISICA GENERAL

TOMO II

TRADUCIDO DEL RUSO
Por el candidato a doctor en ciencias físicas
MANUEL GISBERT TALENS

MOSCU
Editorial Mir
1968

CDU 530 (075.8) = 60

На испанском языке

Impreso en la URSS
Derechos reservados

www.elsolucionario.org

INDICE

CUARTA PARTE

ELECTROSTATICA

Capítulo XIV. Principales fenomenos electrostáticos

§ 120. Introducción 9
§ 121. Cargas eléctricas 11
§ 122. Conductores y aisladores 15
§ 123. Campo electrostático. Ley de Coulomb 17
§ 124. Intensidad del campo electrostático 22
§ 125. Líneas de fuerza 27
§ 126. Flujo eléctrico (o de las líneas de fuerza). Teorema de Ostrogradski-Gauss 29
§ 127. Una deducción más rigurosa del teorema de Ostrogradski-Gauss 34
§ 128. Aplicaciones del teorema de Ostrogradski-Gauss 35
§ 129. Trabajo de las fuerzas del campo electrostático. Potencial 42
§ 130. Superficies equipotenciales 49
§ 131. Relación entre la intensidad del campo electrostático y el potencial 51
§ 132. Relación entre la intensidad del campo, el potencial y la densidad volumétrica de las cargas 54
§ 133. Conductores en el campo electrostático 56
§ 134. Intensidad del campo en las proximidades de la superficie de un conductor 60
§ 135. El dipolo en un campo eléctrico exterior 63
§ 136. Capacidad eléctrica de los conductores 65
§ 137. Energía de un sistema de cargas 69
§ 138. Energía del campo electrostático 74

Capítulo XV. Fenómenos electrostáticos en los dieléctricos

§ 139. Dieléctricos. Constante dieléctrica 78
§ 140. Energía del condensador con dieléctrico. Energía del campo en el dieléctrico 81
§ 141. Polarización dieléctrica. Vector de polarización 83
§ 142. Intensidad del campo en el seno del dieléctrico 87
§ 143. Fuerzas que actúan en los cuerpos cargados cuando hay dieléctricos 90
§ 144. Vector de desplazamiento eléctrico 97
§ 145. Determinación de los vectores E y D por las fuerzas que actúan sobre la carga 104
§ 146. Dieléctricos dipolares. Determinación de los momentos dipolares de las moléculas 108
§ 147. Propiedades dieléctricas de los cristales. Piezoelectricidad 111
§ 148. Condensadores 113
§ 149. Diferentes tipos de condensadores 116
§ 150. Medición de la diferencia de potencial 120
§ 151. Medición de cargas muy pequeñas. Carga del electrón . . . 124
§ 152. Naturaleza del campo electrostático 128

QUINTA PARTE

CORRIENTE CONTINUA

Capítulo XVI. Leyes fundamentales de la corriente continua

§ 153. Corriente continua. Ley de Ohm 132
§ 154. Resistencia de los conductores 134
§ 155. Vector de densidad de corriente 139
§ 156. Conservación de las cargas. Circuito cerrado de las corrientes estacionarias 142
§ 157. Ley de Joule-Lenz 145
§ 158. Medición de la intensidad de la corriente y de la diferencia de potencial 149
§ 159. Resistencias y sus mediciones 154
§ 160. Electrones libres en los conductores. Concepto clásico . . . 156
§ 161. Leyes de Ohm y de Joule-Lenz desde el punto de vista de la clásica teoría electrónica 160
§ 162. Relación entre la conductibilidad eléctrica y la conductibilidad térmica de los metales 165
§ 163. Teoría cuántica de la conductibilidad eléctrica de los metales 167
§ 164. Circuito cerrado de corriente continua 172
§ 165. Energía desprendida en un circuito de corriente continua . 178
§ 166. Ley de Ohm para el circuito heterogéneo. Ley de Kirchhoff 181
§ 167. Aplicación de las ecuaciones de Kirchhoff a la solución de varios problemas 185
§ 168. Diferencia de potencial de contacto 193
§ 169. Pilas 200
§ 170. Fenómenos termoeléctricos 203
§ 171. Semiconductores 208
§ 172. Emisión de electrones por conductores incandescentes . . . 214
§ 173. Teoría de la emisión termoiónica 222

Capítulo XVII. Corriente eléctrica en los electrólitos y en los gases

§ 174. Conducción electrolítica 225
§ 175. Leyes de Faraday 228
§ 176. Disociación electrolítica 232
§ 177. Energía de los iones en la solución. 234
§ 178. Teoría de la conducción electrolítica 236
§ 179. Polarización de los electrodos 242
§ 180. Aplicaciones técnicas de la electrólisis 245
§ 181. Conducción electrolítica de los sólidos 248
§ 182. Paso de la electricidad a través de los gases 251
§ 183. Teoría de la conducción de los gases por agente ionizante 253
§ 184. Determinación experimental de los coeficientes de recombinación y de movilidad de los iones gaseosos 259
§ 185. Paso de la corriente electrónica a través del vacío 267
§ 186. Deducción de la fórmula de Boguslavski-Langmuir. Fluctuación de la intensidad de la corriente 270
§ 187. Recorrido libre de los electrones en un gas 275
§ 188. Colisiones de los electrones con los átomos y con las moléculas 279
§ 189. Movilidad de los electrones en el gas a baja presión . . . 284
§ 190. Conducción de los gases sin agente ionizante 288

SEXTA PARTE

FENOMENOS ELECTROMAGNETICOS

Capítulo XVIII. Campo magnético

§ 191. El campo magnético y su característica 295
§ 192. Representación gráfica de la excitación magnética 299
§ 193. Determinación del campo magnético de las corrientes . . . 305
§ 194. Campo magnético de un conductor circular y de un solenoide recorridos por una corriente 309
§ 195. Unidades de medición de la excitación magnética. Sistema electromagnético absoluto de unidades 314
§ 196. Fuerzas que actúan sobre la corriente en el campo magnético. Sistema internacional de unidades eléctricas 319
§ 197. Contorno cerrado recorrido por una corriente en un campo magnético 326
§ 198. Circulación del vector de la excitación magnética 334
§ 199. Aplicación de la fórmula de la circulación del vector de excitación magnética 337
§ 200. Cuerpos magnéticos 340
§ 201. Momentos magnéticos de las moléculas, átomos y electrones 344
§ 202. Vector de imanación 349
§ 203. Ferromagnetismo 354
§ 204. Naturaleza del ferromagnetismo 361
§ 205. Imanes permanentes 365
§ 206. Líneas del vector de inducción magnética. Circulación del vector de inducción magnética y del vector de excitación magnética. Condiciones límites 371
§ 207. Analogía entre los campos magnético y electrostático . . . 377
§ 208. Determinación de los vectores **H** y **B** en función de las fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido por una corriente 382
§ 209. Diferencia entre el solenoide y el imán 385
§ 210. Trabajo del desplazamiento de un contorno con corriente por un campo magnético 386
§ 211. Leyes del circuito magnético 392
§ 212. Ecuación de Kirchhoff para el circuito magnético 399
§ 213. Instrumentos de medición 402

Capítulo XIX. Desviación de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético

§ 214. Fuerza que actúa sobre una carga que se desplaza por un campo magnético 408
§ 215. Campo magnético de una carga en movimiento 413
§ 216. Estudio experimental del campo magnético de las cargas en movimiento 416
§ 217. Efecto Hall 421
§ 218. Determinación de la carga específica de los electrones 427
§ 219. Determinación de la carga específica de los iones positivos 433
§ 220. Aplicación técnica del haz electrónico 439

Capítulo XX. Inducción electromagnética

§ 221. Fenómeno de inducción electromagnética 447
§ 222. Determinación de la fuerza electromotriz de inducción . . 450

www.elsolucionario.org

§ 223. Cantidad de electricidad transportada por la corriente inducida. Unidades de las magnitudes magnéticas en el sistema internacional 455
§ 224. Determinación de la fuerza electromotriz de inducción para casos particulares 460
§ 225. Autoinducción 463
§ 226. Extracorrientes de cierre y de ruptura 468
§ 227. Inducción mutua 471
§ 228. Energía del campo magnético de las corrientes 473
§ 229. Trabajo invertido en la histéresis 477
§ 230. Coeficiente de autoinducción de un cable concéntrico . . . 479
§ 231. Corrientes de Foucault. Efecto pelicular 481
§ 232. Corriente alterna 483
§ 233. Potencia en el circuito de corriente alterna 488
§ 234. Circuito de corriente alterna con autoinducción y capacidad 491
§ 235. Dínamos y electromotores 498
§ 236. Transformadores. 501
§ 237. Rectificación y medición de las corrientes alternas 504
§ 238. Corriente trifásica 507

Capítulo XXI. Oscilaciones y ondas electromagnéticas

§ 239. Descarga oscilante del condensador 510
§ 240. Oscilaciones eléctricas forzadas 515
§ 241. Excitación de las oscilaciones continuas con ayuda del tubo catódico 519
§ 242. Corriente de desplazamiento 523
§ 243. Campo electromagnético 526
§ 244. Ecuaciones de Maxwell 531
§ 245. Ecuaciones de Maxwell-Lorentz 536
§ 246. Ondas electromagnéticas 538
§ 247. Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas 543
§ 248. Vector de Umov-Poynting (vector de Poynting) 549
§ 249. Radiotecnia. Métodos modernos de excitación y registro (detección) de las ondas electromagnéticas 551

Apéndice. Sistemas de unidades eléctricas y magnéticas 556

Indice alfabético 567

CUARTA PARTA

ELECTROSTATICA

CAPITULO XIV

Principales fenómenos electrostáticos

§ 120. Introducción. En el s. VII a. de N. E., el filósofo griego Tales de Mileto describió la propiedad del ámbar de atraer ciertos cuerpos ligeros después de frotarlo con la lana, propiedad observada por las tejedoras. El estudio de este fenómeno lo desarrolló el médico inglés Gilbert solamente en 1600, es decir, más de dos mil años después. Gilbert observó que una propiedad análoga la adquieren el vidrio y algunas materias más, si se les frota con seda. Los cuerpos que adquirían este estado se denominaban "electrizados" (literalmente tenía que ser "ambarizados", ya que en griego "elektron" es "*ámbar*").

Durante casi dos siglos, hasta finales del s. XVIII, el estudio de los cuerpos electrizados se desarrolló lentamente y se efectuaba, en general, aislado del estudio de otros fenómenos de la naturaleza. Se limitaron principalmente a electrizar los cuerpos por frotamiento y estudiar las fuerzas de acción mutua entre ellos. Esta parte de la teoría de la electricidad se denominó después *electrostática*.

En 1789 Galvani descubrió la acción fisiológica de la corriente eléctrica. Enganchando con un hilo de cobre los nervios ciáticos de una rana recién preparada y suspendiéndola de la barandilla de hierro del balcón, observó que cada vez que los músculos de la rana se ponían en contacto con la barandilla, se contraían. Aunque entonces ya se sabía que la contracción de los músculos se producía al descargar

a través de ellos cuerpos electrizados, durante mucho tiempo no se estableció la unidad de fenómenos eléctricos y se había convenido distinguir "la electricidad galvánica" y la electricidad obtenida por frotamiento. Solamente a principios del s. XIX se efectuaron una serie de grandes descubrimientos que revelaron la gran diversidad de los fenómenos eléctricos: se estudiaron las condiciones en que surgía la corriente eléctrica, se determinaron las acciones térmica y magnética de la corriente, se puso en claro la función de los dieléctricos, etc. La segunda mitad del s. XIX se caracterizó por un impetuoso desarrollo del estudio de la electricidad. Como resultado de los trabajos de Faraday y de Maxwell se estableció la unidad de los fenómenos electromagnéticos, se descubrieron las ondas electromagnéticas y se creó la teoría electromagnética de la luz.

El desarrollo de la teoría de la electricidad es de excepcional importancia: de un lado se ha aclarado la imposibilidad de reducir los fenómenos eléctricos a fenómenos mecánicos, de otro lado ha señalado la profunda relación de los fenómenos eléctricos con todos los demás procesos físicos. Con ello, el estudio de la electricidad ha facilitado el paso del materialismo mecanicista al materialismo dialéctico. Por último, no menos importancia tuvieron las aplicaciones prácticas de los fenómenos eléctricos.

Los sabios rusos desempañaron un papel importante en el desarrollo del estudio de la electricidad. A mediados del s. XVIII, M. Lomonósov, que estudiaba junto con G. Richman los fenómenos de las tormentas, llegó a la conclusión de que la electrización del aire es debida al rozamiento de las corrientes ascendentes. Ya en 1753 M. Lomonósov emitió el juicio muy avanzado para su época, de que la electricidad es un rápido movimiento de rotación de las partículas del éter. En el mismo año de 1753, la Academia de Ciencias de Petersburgo anunció un concurso mundial de tema "Sobre la naturaleza de la fuerza eléctrica". Ganó el concurso y fue premiado en 1755 el trabajo de L. Euler, en el cual la acción mutua de los cuerpos electrizados se explicaba por las tensiones del éter. Aepinus, académico de Petersburgo, introdujo la teoría de un "fluido eléctrico", que en su tiempo tuvo gran popularidad, y fue el primero en desarrollar la teoría matemática de los fenómenos eléctricos y magnéticos. En 1803, el académico V. Petrov descubrió el arco de descarga eléctrica e indicó la posibilidad de su aplicación práctica. El mismo Petrov fue uno de los primeros en estudiar la disociación electrolítica de los líquidos al pasar por ellos una corriente eléctrica. En los años treinta y cuarenta del s. XIX, Lenz, académico de número de la Academia de Ciencias de Petersburgo y profesor de la Universidad de Petersburgo, descubrió importantes leyes que establecían la dirección de la corriente inducida y las acciones térmicas de la corriente. En la segunda mitad del s. XIX, A. Stoliétov creó el método

www.elsolucionario.org

del estudio de las propiedades magnéticas del hierro y descubrió el efecto fotoeléctrico. En 1895, A. Popov inventó el radiotelégrafo, y unos años después P. Lébedev obtuvo ondas electromagnéticas milimétricas. A principios del siglo actual, A. Eijenvald, profesor de la Universidad de Moscú, demostró experimentalmente que las cargas en movimiento, como la corriente eléctrica, crean un campo magnético. Grandes éxitos en diferentes ramas del estudio de la electricidad alcanzaron los científicos soviéticos.

Los inventores rusos desempeñaron un importante papel en el desarrollo de la electrotecnia. B. Jacobi fue el primero que construyó el electromotor y lo aplicó para poner en movimiento una lancha y un vagón; además ideó la aplicación práctica de la electrólisis (galvanoplastia). P. Yáblochkov (Jablochkov) fue el primero en idear la aplicación práctica y útil para el alumbrado, del arco, y A. Lodyguin, la lámpara eléctrica de incandescencia. P. Yáblochkov e I. Usaguin fueron los primeros en introducir en la práctica el transformador eléctrico, y M. Dolivo-Dobrovolski, la corriente trifásica. N. Slaviánov y N. Benardós inventaron la soldadura eléctrica.

El importante lugar que la electrotecnia actual ocupa en la industria, ha determinado el gran papel que desempeña en la URSS. Esta importancia de la electrotecnia la subrayó V. Lenin en sus célebres palabras : "El comunismo es el Poder Soviético más la electrificación de todo el país". Las condiciones exclusivamente favorables para el desarrollo de la ciencia y de la técnica que se han creado después de la Gran Revolución Socialista de Octubre, han originado un acelerado ritmo de electrificación de la URSS y nuevos y enormes éxitos en el estudio de la electricidad y aplicación práctica de los fenómenos eléctricos. El plan económico prevé un amplio desarrollo ulterior de la construcción de centrales eléctricas de diferentes tipos (hidroeléctricas, termoeléctricas y electronucleares) y el empleo de la energía eléctrica en todas las ramas de la economía soviética.

§ 121. Cargas eléctricas. En correspondencia con el desarrollo histórico del estudio de la electricidad, empezaremos con la característica de la electrización y con las leyes de acción recíproca de los cuerpos electrizados. Como ya se ha dicho, esta parte del estudio de la electricidad se denomina electrostática. Los exprerimentos realizados a principios del s. XVIII demostraron que la electricidad puede ser de dos y solamente de dos clases: la que por sus cualidades coincide con la del vidrio al frotarlo con la piel (y que se denomina *positiva*), y la que coincide con la de la piel al ser frotada por el vidrio (y que se denomina *negativa*). Los cuerpos igualmente electrizados (por ejemplo, positivamente), se repelen; los electrizados de

distinta clase, se atraen. Al ponerse en contacto los cuerpos, la electricidad pasa de unos a otros.

El cuerpo electrizado posee una carga que sirve de característica métrica de la electrización del cuerpo. La definición de carga se dará más adelante.

En la naturaleza hay cuerpos que conducen libremente la electricidad, denominados conductores, y otros que no la conducen, denominados aisladores.

El grado de electrización se puede determinar por las fuerzas de acción recíproca entre los cuerpos electrizados. Para determinar cualitativamente la electrización se pueden utilizar, por ejemplo, dos esferas ligeras suspendidas de dos hilos bastante largos (fig. 1).

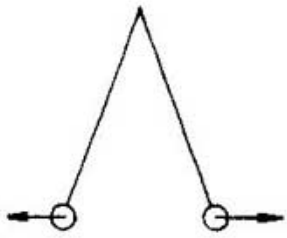


Fig. 1. Acción recíproca de esferas electrizadas.

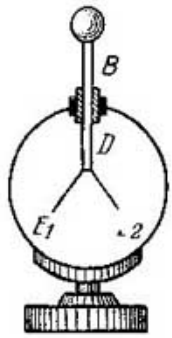


Fig. 2. Electroscopio de panes (de hojas).

Si la electricidad de las esferas es del mismo signo, entre ellas surgen fuerzas de repulsión y las esferas se separan, tanto más cuanto mayor sea la electrización. En la práctica se utilizan aparatos especiales, *electroscopios*, uno de los cuales viene representado en la fig. 2.

El electroscopio de la fig. 2 está construido de la siguiente manera: al alambre metálico D se le han unido por abajo dos delgadas láminas (hojas) de aluminio, E_1 y E_2; el alambre y las láminas se introducen en el interior de una caja metálica*) a través de un tapón de ebonita B. Esta caja tiene unas ventanillas para observar el comportamiento de las láminas. Si al alambre D se le comunica una carga eléctrica poniéndolo en contacto con un cuerpo electrizado, las láminas de aluminio se electrizan y se separan repeliéndose. Según sea la separación, se puede determinar el grado de electrización.

*) La función de esta caja se indicará más adelante (véase las págs. 58—59)

Para determinar cuantitativamente el grado de electrización, el electroscopio debe llevar una escala graduada. En este caso, el aparato se denomina "indicador eléctrico" o *electrómetro*. El primer electrómetro lo ideó y construyó G. Richman en 1745 cuando observaba junto con M. Lomonósov la electrización originada por las descargas eléctricas de las tormentas. Esquemáticamente, la representación del "indicador eléctrico" de G. Richman viene en la fig. 3, en la cual g es una varilla metálica suspendida verticalmente. A esta varilla se ha fijado un extremo de un hilo de seda f. Al electrizarse, el hilo se separa de la varilla y el grado de su separación se puede determinar en el cuadrante de madera graduado ab.

El electrómetro moderno construido según el esquema de Richman, viene representado en la fig. 4. Al electrizar la varilla D, la

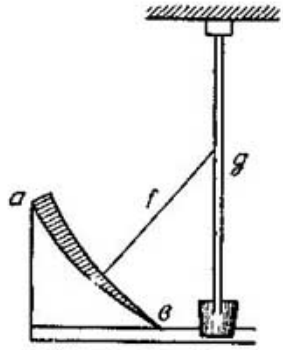


Fig. 3. Electrómetro de G. Richman.

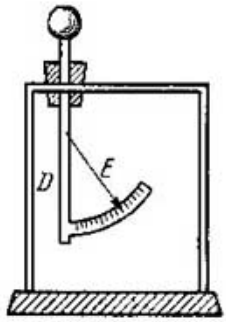


Fig. 4. Electrómetro.

lámina de aluminio E se separa de la varilla fija D; la magnitud de la separación, que depende del grado de electrización, la determina la escala.

Un fenómeno muy importante que ayuda a comprender el proceso de electrización de los cuerpos, es el siguiente: si a un cuerpo electrizado, por ejemplo, positivamente, se le empieza a electrizar negativamente, su estado de electrización disminuirá al principio, luego desaparecerá por completo, y solamente después de todo esto, el cuerpo emprezará a electrizarse negativamente. De esto se deduce que las *cargas de diferente signo se compensan mutuamente*. Este hecho sugirió la hipótesis de que en los cuerpos no cargados siempre hay cargas pero solamente de signo contrario y en una cantidad tal, que sus acciones se compensan completamente. Un cuerpo que posea excedente de cargas positivas, estará cargado positivamente. El que posea excedente de cargas negativas, estará negativamente cargado. Al electrizar los cuerpos por frotamiento, se electrizan los dos cuerpos: uno positiva y el otro, negativamente. De esto se llega a la con-

www.elsolucionario.org

clusión de que las *cargas no se crean ni desaparecen, sino que solamente se pueden trasladar de un cuerpo a otro o de un lugar a otro en el interior del cuerpo dado.* Esta deducción conocida con el nombre de *principio (ley) de la conservación de la carga eléctrica*, es fundamental en el estudio de la electricidad y lo confirman numerosos hechos, y uno de ellos es la *electrización por influencia o inducción* electrostática descubierta por Aepinus.

El fenómeno de inducción electrostática consiste en lo siguiente: si a un conductor aislado B se le acerca un cuerpo cargado A (fig. 5,*a*), en el conductor surgen cargas de manera que en la parte más cercana al cuerpo A las cargas son de signo contrario a las del cuerpo A, y en la parte más alejada, del mismo signo. Al alejar el cuerpo A, las cargas del conductor desaparacen. Sin embargo, si antes de alejar el cuerpo A se divide el conductor B en dos partes (fig. 5,*b*), las cargas se conservarán en estas partes después de alejar el cuerpo A. Esto se explica fácilmente si se supone que en el conductor B hay siempre cargas de ambos signos, positivas y negativas, y estas cargas (o por lo menos las de un mismo signo) se pueden desplazar libremente por el conductor. En este caso, al acercarle al conductor B el cuerpo A cargado positivamente, las cargas negativas del conductor B serán atraídas, y las positivas, repelidas; por lo tanto, en los extremos del conductor B la electrización será de distinto signo. Al alejar el cuerpo cargado A, dejan de actuar sobre el conductor B las fuerzas exteriores, las cargas "se mezclan" y el conductor B, en todas sus partes es de nuevo neutro. Mas si el conductor B se corta cuando el cuerpo cargado A aún se halla cerca del mismo, después de alejarlo ya no pueden "mezclarse" las cargas en el conductor B, y ambas partes del conductor B quedarán electrizadas. Se puede comprobar fácilmente que las cargas que se han conservado en estas mitades del conductor B son de igual magnitud, ya que después de ponerlas en contacto, el conductor B queda neutro.

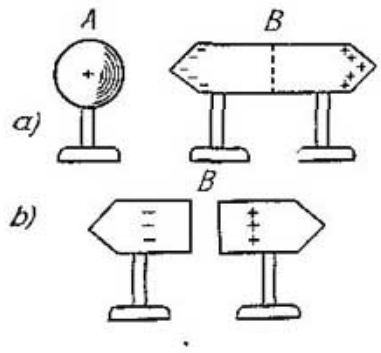


Fig. 5. Electrización por influencia. (Inducción electrostática).

La existencia de dos cargas de diferente signo y su conservación en un cuerpo neutro eléctricamente, se puede considerar establecida.

La primera teoría de los fenómenos eléctricos, que surgió a mediados del siglo XVIII, sugería la existencia de un fluido eléctrico especial. Después surgió la teoría de dos fluidos eléctricos: positivo y negativo. El académico Aepinus desarrolló la teoría de un fluido

eléctrico que él consideraba positivo. Según la teoría de Aepinus, el exceso de este fluido en los cuerpos hace que se hallen electrizados positivamente, y su escasez, que se hallen electrizados negativamente. A fines del siglo pasado se estableció que existía una carga eléctrica elemental, y que los átomos y las moléculas solamente podían adquirir cargas múltiplos de esta carga elemental. Luego se estableció que esto era debido a la existencia de partículas elementales que llevaban una carga negativa completamente determinada *e*. Esta partícula se denominó *electrón*. Como se demostrará luego, el electrón se caracteriza, no sólo por tener determinada carga negativa *e*, sino que además, posee una masa determinada *m*, y una serie de otras características físicas (como momento de rotación y momento magnético). Este complicado carácter de la naturaleza del electrón es una de las más valiosas confirmaciones del materialismo dialéctico, el cual considera que el mundo es de diversidad inagotable. V. I. Lenin escribía: "El electrón es tan inagotable como el átomo".*)

La masa del electrón es aproximadamente $\frac{1}{1\,840}$ veces menor que la del átomo más ligero, la del hidrógeno.

Según las nociones actuales (véase el t. III), el electrón entra como parte componente de todos los átomos; la parte central de los átomos se denomina *núcleo atómico* y tiene una carga positiva, casi toda la masa del átomo se concentra en su núcleo. En la actualidad se ha establecido que existen electrones positivos (denominados *positrones*), pero solamente se observan en condiciones especiales y por ahora no los estudiaremos.

§ 122. Conductores y aisladores. Como se ha dicho, la experiencia demuestra que todos los cuerpos se dividen en dos clases: 1) en cuerpos que conducen la electricidad, denominados *conductores*, y 2) en cuerpos que no la conducen, denominados *no conductores*, *aisladores* o *dieléctricos*. Los conductores se dividen en conductores de primera clase (o conductores electrónicos) y conductores de segunda clase (o electrolíticos). El transporte de cargas eléctricas en los conductores de primera clase no acarrea ninguna variación en su naturaleza química ni sensible traslación de la sustancia. El transporte de las cargas eléctricas en los conductores de segunda clase acarrea cambios químicos que llevan a un desprendimiento de las sustancias componentes en los lugares de contacto con otros conductores. A los conductores de primera clase pertenecen todos los metales: los conductores de segunda clase son las sales fundidas,

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Ediciones Pueblos Unidos, Uruguay, 1948, pág. 292.

soluciones salinas, ácidas y alcalinas. Los aisladores son los cristales de las sales, los aceites, el aire, el vidrio, la porcelana, la ebonita, el caucho, el ámbar y otras sustancias.

En la actualidad se distinguen, además, los *semiconductores*. Estos cuerpos poseen una pequeña, pero sensible, conductibilidad eléctrica y otras propiedades que permiten agruparlos aparte. En el presente se ha establecido un determinado punto de vista sobre la naturaleza de los conductores y de los dieléctricos.

En los metales (conductores de primera clase), parte de los electrones se desplaza libremente por entre los átomos. En los metales no cargados, las cargas de los electrones que se desplazan libremente, se compensan por las cargas positivas unidas a la armazón de la red cristalina del metal. La electrización del conductor se reduce a la variación del número de electrones que entran en él: en la electrización negativa, se añaden al conductor electrones de fuera; en la electrización positiva, se le quita parte de electrones, lo cual empieza a notarse por no hallarse completamente compensada la carga positiva de los núcleos atómicos.

En la electrización por influencia (inducción), los electrones se desplazan, atraídos o repelidos por la carga exterior, a un extremo del conductor; en este extremo se produce un exceso de electrones, lo cual origina la electrización negativa; en el extremo opuesto del conductor, debido a la falta de electrones, aparace una carga positiva no compensada.

Los electrones de todas los metales son iguales, por eso su desplazamiento no está relacionado con la variación de la composición química del conductor de primera clase. La masa de los electrones es tan pequeña, que en las electrizaciones que se consiguen prácticamente, no se puede percibir variación alguna de la masa del conductor por haber variado el número de electrones que contiene *).

En los conductores de segunda clase no hay electrones libres, pero hay átomos o moléculas con deficiencia o exceso de electrones. Estos átomos o moléculas cargados se denominan *iones*. El desplazamiento de las cargas en los conductores de segunda clase es debido al traslado de iones, con lo cual se explican los cambios químicos que se producen en los conductores de segunda clase.

Los *dieléctricos*, no conductores de electricidad, son de moléculas en que hay cantidades iguales de cargas positivas y negativas, o de iones que no pueden desplazarse libremente por el interior del dieléctrico. Bajo la acción de las fuerzas eléctricas, las cargas del dieléctrico solamente se desplazan un poco o varían su orientación. Por ejemplo, un modelo de dieléctrico puede ser una sustancia en que van unidas por parejas cargas de distinto signo (moléculas po-

*) Véase el cálculo en la pág. 126

www.elsolucionario.org

lares) orientadas arbitrariamente (fig. 6,*a*) de manera que el dieléctrico, tanto en su conjunto como por partes, es neutro. Si al dieléctrico se le acerca un cuerpo cargado, las cargas del dieléctrico no se desplazan, sino que solamente se orientan de una misma manera (fig. 6, *b*), a saber: hacia el extremo del dieléctrico al cual se acerca el cuerpo cargado, se orientan las de signo contrario al del cuerpo, y hacia el extremo opuesto, las del mismo signo que el del cuerpo. Este estado del dieléctrico se denomina *polarización (dieléctrica)*. Este estado es diferente al de electrización de los conductores por inducción.

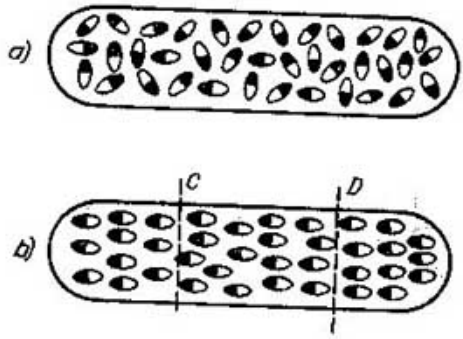


Fig. 6. Polarización del dieléctrico.

Si el dieléctrico polarizado se divide en varias partes, por ejemplo, por las líneas D y C (fig. 6,*b*), cada parte por separado y en su totalidad será neutra, y solamente en la superficie habrá cargas de uno u otro signo.

Si las fuerzas eléctricas son muy grandes, las moléculas del dieléctrico pueden destruirse y el dieléctrico se hace conductor. Este fenómeno se denomina *perforación* del dieléctrico.

§ 123. Campo electrostático. Ley de Coulomb. La ley fundamental de la electrostática es la ley de la acción recíproca de las cargas. Al principio, la acción recíproca de las cargas se consideraba análoga a la ley de la gravitación universal, considerando que las fuerzas eléctricas y las de la gravitación universal eran cierta "acción a distancia" sin que desempeñase papel alguno el espacio intermedio. En la realidad, sin embargo, las cargas originan en el espacio circundante ciertos cambios físicos (lo mismo que las masas que gravitan), los cuales se revelan ante todo en que sobre cualquiera otra carga que se aloje a cierta distancia de las que examinamos, actuarán también fuerzas. Sin meternos a examinar por ahora la naturaleza de estos cambios, diremos que cuando las cargas están en

reposo, en el espacio circundante se forma un *campo electrostático*.

La acción recíproca de dos cargas, por ejemplo, reside en lo siguiente: cada carga crea en el espacio que la rodea, un campo, y este campo actúa sobre la otra carga con una fuerza determinada.

El campo electrostático es un aspecto peculiar de la materia; transmite la acción de unos cuerpos electrizados a otros. Las propiedades del campo se estudian basándose en las leyes a que se subordinan las fuerzas que actúan sobre las cargas de parte del campo.

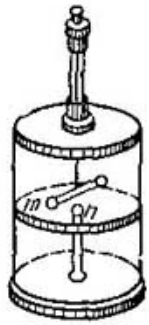


Fig. 7. Balanza de torsión de Coulomb.

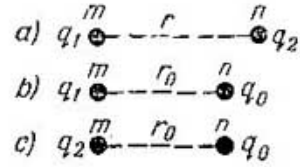


Fig. 8. Comparación de argas. (Ley de Coulomb).

Como la acción recíproca de los cuerpos cargados depende de sus formas y dimensiones, para establecer la ley de acción recíproca se examina el comportamiento de las llamadas cargas puntuales. *Se entiende por cargas puntuales los cuerpos cargados cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia entre los mismos.* Está claro que cualquier cuerpo cargado se puede considerar como un conjunto de cargas puntuales.

La ley de la acción recíproca de dos cargas puntuales la estableció experimentalmente Coulomb en 1785. La ley de Coulomb comprende al mismo tiempo la definición de magnitud de carga.

Coulomb realizó todas sus mediciones en el aire, pero rigurosamente hablando, la expresión de la ley de Coulomb que se estudia en este párrafo, se refiere al vacío, es decir, al espacio en que no hay una cantidad perceptible de átomos, moléculas u otras partículas.

Coulomb estableció la ley de acción recíproca de las cargas puntuales basándose en las mediciones realizadas con una *balanza de torsión* (fig. 7). La construcción de esta balanza es la siguiente: en el interior de un gran recipiente de vidrio hay una palanca o aguja de vidrio suspendida de un hilo fino; en uno de los extremos de la palanca hay una esfera metálica *m* y en el otro, un contrapeso. Una segunda esfera metálica *n* se fija en una varilla — soporte de

vidrio. Desde el exterior se pueden comunicar cargas eléctricas a ambas esferas, cargas que éstas retienen por cierto tiempo, ya que las esferas están aisladas una de la otra y de los cuerpos que las rodean. La distancia entre las esferas m y n se puede variar girando la cabeza de la balanza a la cual se fija el hilo que mantiene a la palanca con la esfera m. Al comunicarles cargas a las esferas m y n, éstas empiezan a atraerse o a repelerse (según el signo de las cargas), con lo cual la palanca con la esfera m gira cierto ángulo. Haciendo girar la cabeza de la balanza se puede hacer volver la esfera m a la posición inicial, en cuyo caso el momento de torsión del hilo será igual al momento de la fuerza eléctrica aplicada a la esfera m. Si el hilo se ha graduado de antemano, se puede determinar directamente, según el ángulo de giro de la cabeza, el momento de la fuerza, y sabiendo la longitud de la palanca, se determina la fuerza de acción recíproca de las esferas.

El razonamiento que nos conduce a la ley de Coulomb, es el siguiente. Ante todo, las observaciones indican que las fuerzas de acción recíproca de las cargas van dirigidas según la recta que une las cargas. Si las cargas son de un mismo signo, como se ha indicado en el § 121, estas fuerzas son de repulsión, y si las cargas son de signo contrario, las fuerzas son de atracción. Variando la distancia r entre las esferas m y n, a las cuales se les ha comunicado unas cargas invariables (fig. 8,*a*), como demuestra la experiencia, las fuerzas de acción recíproca varían en razón inversa al cuadrado de la distancia r.

Para comparar las magnitudes de dos cargas q_1 y q_2 medimos las fuerzas f_1 y f_2 de acción recíproca de estas dos cargas con una tercera carga determinada q_0 colocándolas consecutivamente a una misma distancia r_0 de esta tercera carga q_0 (fig. 8,*b* y 8,*c*). Para ello le comunicamos consecutivamente a la esfera m las cargas q_1 y q_2, y la carga de la esfera n la conservamos invariable e igual a q_0. La experiencia demuestra que la *relación f_1/f_2 de las fuerzas no depende de la magnitud q_0 de la tercera carga, ni de la distancia r_0 a que se colocan las cargas q_1 y q_2 de esta tercera carga.* Por lo tanto, el valor de la relación f_1/f_2 de las fuerzas lo determinan solamente las propias cargas q_1 y q_2. De aquí que sea natural el tomar la relación q_1/q_2 de las cargas igual a la relación f_1/f_2 de las fuerzas. De esta manera obtenemos el *método para medir la relación* q_1/q_2 de dos cargas.

Los valores absolutos de las cargas solamente se pueden obtener después de establecer la *unidad de medición* de las cargas, lo cual se hará un poco más adelante.

Disponiendo del método de comparación de las cargas, podemos *colocar a pares y a la misma distancia r una de otra*, diferentes cargas q_1, q_2, q_3... En este caso, según enseña la experiencia, la fuerza

www.elsolucionario.org

de acción recíproca f entre un par de cargas es proporcional al producto de sus magnitudes $q_1 \cdot q_2$.

De esta manera ya podemos formular definitivamente la ley de Coulomb: *la fuerza f de acción recíproca entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las magnitudes de las cargas* q_1 *y* q_2 e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre ellas:

$$f = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1)$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad.

Si anotamos las cargas positivas con el signo (+) y las negativas con el signo (−), el resultado que se obtenga con un valor negativo de la fuerza, corresponderá a la fuerza de atracción, y el de valor positivo, a la de repulsión.

La ley de Coulomb (1) puede escribirse en forma vectorial. Tracemos desde la carga puntual q_1 (fig. 9) a la carga puntual q_2 un vector r. La fuerza f que actúa sobre la carga q_2, será igual, según la (1), a la magnitud $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ y dirigida en el mismo sentido que el radio vector r, si los signos de ambas cargas q_1 y q_2 son iguales (la fig. 9 se refiere a este caso), y en sentido contrario al radio vector r, si los signos de las cargas q_1 y q_2 son diferentes. Por eso obtendremos el valor de

Fig. 9. Dirección y sentido del radio vector.

la fuerza f, en magnitud y en dirección, multiplicando la magnitud $k \frac{q_1 q_2}{r^2}$ por el vector unidad r/r, de dirección igual a la del radio vector r. De esta manera, la ley de Coulomb en forma vectorial se escribirá:

$$\mathbf{f} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (1a)$$

Para establecer la unidad cegesimal de la carga suponemos igual a la unidad el coeficiente de proporcionalidad k de la ley de Coulomb:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

De aquí obtenemos que *en el sistema CGS por unidad de carga se toma la de una carga puntual que repele a otra carga de igual valor y del mismo signo colocada a la distancia de 1 cm, con una fuerza de 1 dina.* Esta unidad se llama *unidad electrostática absoluta de carga.*

En el estudio de la electricidad las unidades eléctricas establecidas fundándose en el sistema *CGS* y las leyes de electrostática se denominan *unidades electrostáticas absolutas* y se designan con las siglas *CGSE* (sistema *CGS* electrostático).

Debido a lo pequeña que es la unidad electrostática, en el sistema internacional de unidades de ahora (véase el t. I) se toma por unidad una carga que es $c/10$ veces mayor que la unidad de carga del sistema *CGSE*, donde c es la llamada *constante electrodinámica* (véase el § 196). Esta unidad se denomina *culombio*. Como la constante electrodinámica c con alto grado de aproximación se puede considerar igual a $3 \cdot 10^{10}$ cm/seg, tenemos que:

1 culombio $= 3 \cdot 10^9$ unidades *CGSE* de carga.

Las dimensiones de la carga en el sistema *CGSE* las obtenemos de la fórmula (1):

$$[q^2] = [f] \cdot [r^2],$$

de donde

$$[q] = [f^{1/2}] \cdot L = M^{1/2} \cdot L^{3/2} \cdot T^{-1}.$$

Aduzcamos un ejemplo de determinación de las fuerzas de acción recíproca de dos cuerpos cargados.

E j e m p l o. Dos pequeñas esferas que se hallan en un campo de fuerzas de gravedad y de 0,1 g de masa cada una, están suspendidas de los hilos l de 25 cm (fig. 10). Después de haberles comunicado a las esferas una misma carga, las esferas se han separado a la distancia $r = 5$ cm. Determinar las cargas comunicadas en unidades del sistema *CGSE* y en culombios.

S o l u c i ó n. La fuerza de repulsión de las esferas es:

$$f = \frac{q^2}{r^2},$$

donde q es la carga comunicada a cada esfera. El equilibrio se alcanzará cuando la fuerza F, resultante de la de repulsión f y de la de la gravedad $P = mg$, vaya dirigida según el hilo. De la fig. 10 tenemos que:

$$f = P \cdot \operatorname{tg} \alpha = mg \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

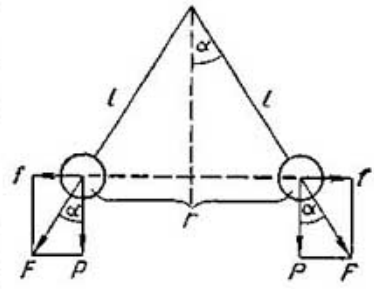


Fig. 10. Fuerzas que actúan sobre esferas electrizadas.

si el ángulo α es pequeño, se puede considerar que la $\operatorname{tg} \alpha$ es aproximadamente igual al $\operatorname{sen} \alpha$, pero

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\frac{r}{2}}{l}, \text{ de donde } f = \frac{mgr}{2l}.$$

Igualando este valor de f con q^2/r^2, tenemos que

$$\frac{q^2}{r^2} = \frac{mgr}{2l},$$

que nos da el resultado buscado de

$$q = r\sqrt{\frac{mgr}{2 \cdot l}} = 5\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 981 \cdot 5}{2 \cdot 25}}\ CGSE = 15{,}6\ CGSE.$$

Y calculando en culombios tenemos:

$$q = \frac{15{,}6}{3 \cdot 10^9} C = 5{,}2 \cdot 10^{-9}\ \text{C}.$$

Del resultado obtenido se ve que el culombio es una unidad muy grande y los valores de las cargas que se observan en la electrización corriente de los cuerpos son partes muy pequeñas de culombio.

§ 124. Intensidad del campo electrostático. Como ya se ha indicado en el § 123, toda carga origina un campo electrostático en el espacio que la rodea. El estudio de las propiedades del campo se puede realizar colocando en él *cargas puntuales* y observando las fuerzas que actúan sobre ellas, suponiendo que *estas cargas son tan pequeñas, que no varían ni la magnitud ni la disposición de las que forman el campo.* De la ley de Coulomb se deduce que en una carga positiva q situada en un punto del campo actúa una fuerza f proporcional a la magnitud de la carga q. La magnitud y dirección de esta fuerza las determinan la magnitud y disposición de todas las cargas que forman el campo. La relación entre la fuerza f que actúa sobre una carga, y la magnitud q de la misma carga, como también se deduce de la ley de Coulomb, no depende de la magnitud de la carga q; esta relación caracteriza el punto dado del campo. Por lo tanto, la relación $\mathbf{f}/q$ de todos los puntos del campo nos da la característica física de determinadas propiedades objetivas del campo. Esta relación determina la magnitud física denominada *intensidad del campo electrostático*, que designaremos por **E**:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q}. \qquad (1)$$

Si en esta fórmula suponemos $q = +1$, **E** coincidirá con la fuerza f en magnitud y dirección. De esta manera tenemos que *la intensidad del campo electrostático en un punto es una magnitud física igual numéricamente a la fuerza que actúa sobre la unidad de carga positiva situada en este punto, coincidiendo en dirección y sentido con esta fuerza.* De esta definición se deduce que la intensidad del campo es una magnitud vectorial.

Por *unidad de intensidad* del campo tomaremos la intensidad de un punto en que, sobre la unidad de carga actúe una fuerza unidad. De aquí que en el sistema *CGSE*, la unidad de intensidad del campo sea la de un punto del campo en que sobre la carga de una unidad electrostática actúe la fuerza de una dina. En este sistema, las dimensiones de la intensidad del campo se determinan según la fór-

www.elsolucionario.org

mula (1):

$$[E]=\frac{[f]}{[q]}=\frac{MLT^{-2}}{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}=M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}. \qquad (2)$$

Como ejemplos calculemos la intensidad del campo electrostático de unos cuantos importantes casos particulares.

1. Intensidad del campo de una carga puntual. Sea la carga puntual q. Determinemos la intensidad del campo en un punto cualquiera A que se halla a la distancia r de la carga.

Según la ley de Coulomb, la fuerza f que actúa sobre la carga positiva q_0 que se halla a la distancia r de la carga q, es

$$f=\frac{q\cdot q_0}{r^2}.$$

De aquí que la intensidad del campo en el punto A sea:

$$E=\frac{f}{q_0}=\frac{q}{r^2}. \qquad (3)$$

La ecuación (3) determina el *valor* de la intensidad del campo en el punto A. La dirección de la intensidad del campo coincide con la

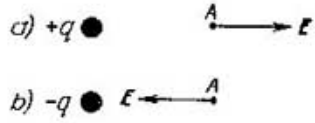


Fig. 11. Sentido de la intensidad del campo electrostático E.

de la fuerza f. Por lo tanto, el vector **E** va dirigido según la línea que une la carga q con el punto A en el sentido hacia la carga q, si q es negativa, y en sentido contrario, si q es positiva (fig. 11).

En forma vectorial, la intensidad del campo E se escribe así:

$$\mathbf{E}=\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (3a)$$

donde r es el radio vector trazado desde el lugar donde se halla la carga puntual q, hacia el lugar en que se calcula la intensidad del campo E.

Si la intensidad del campo la crean varias cargas puntuales, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *la intensidad del campo resultante en un punto cualquiera será la suma geométrica de las intensidades del campo originadas por cada una de las cargas independientemente.* Esto se deduce del hecho de que la fuerza f que actúa sobre la carga q_0, situada en

el punto dado, es igual a la suma geométrica de las fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ ..., $\mathbf{f}_n$, creadas por cada carga independientemente:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_n;$$

de esta igualdad hallamos que la intensidad del campo, medida según la relación entre la fuerza $\mathbf{f}$ y la carga q_0, será:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q_0} = \frac{\mathbf{f}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{f}_2}{q_0} + \ldots + \frac{\mathbf{f}_n}{q_0}.$$

Los sumandos de la derecha son las intensidades del campo $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ ..., $\mathbf{E}_n$, originadas por las cargas q_1, q_2 ..., q_n. Por consiguiente,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots + \mathbf{E}_n. \qquad (4)$$

2. Intensidad del campo de un dipolo. Dipolo es el conjunto de dos cargas iguales y de signo contrario que se hallan a una distancia l muy pequeña en comparación con la distancia de las cargas a los puntos en que se determina la intensidad del campo. La línea que pasa por las cargas la llamaremos eje del dipolo. Determinemos la intensidad del campo electrostático de un punto cualquiera A en el

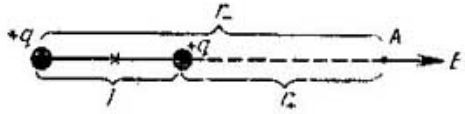


Fig. 12. Determinación de la intensidad del campo en el eje del dipolo.

eje del dipolo (fig. 12). Las distancias del punto A a las cargas $-q$ y $-q$ las designaremos respectivamente por r_+ y r_-. La distancia del punto A al punto medio del dipolo la designaremos por r; entonces tenemos que:

$$r_+ = r - \frac{l}{2}, \qquad r_- = r + \frac{l}{2}$$

La intensidad del campo $\mathbf{E}$ es igual a la suma geométrica de las intensidades del campo $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ creadas por cada una de las cargas independientemente. En el caso dado, como $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ van dirigidas según el eje del dipolo, la suma geométrica será igual a la algebraica:

$$E = \frac{q}{r_+^2} - \frac{q}{r_-^2}$$

$$E = \frac{q(r_-^2 - r_+^2)}{r_+^2 \cdot r_-^2} = \frac{q(r_- + r_+)(r_- - r_+)}{r_+^2 \cdot r_-^2}$$

Sabiendo que:

$$r_- - r_+ = l, \quad r_+ + r_- = 2r;$$

y que, según la condición establecida, $r \gg l$, tendremos aproximadamente que

$$r_+^2 \cdot r_-^2 \cong r^4,$$

y la ecuación de E se transforma en:

$$E = \frac{2ql}{r^3}.$$

El producto de la carga q por la distancia entre las cargas

$$p = ql$$

se denomina *momento del dipolo*. Introduciendo en la fórmula de E el momento del dipolo p, obtenemos definitivamente que:

$$E = \frac{2p}{r^3}. \qquad (5)$$

La intensidad del campo E en el punto A va dirigida hacia la derecha respecto al eje del dipolo.

Determinemos la intensidad del campo en el punto B que se halla en la perpendicular OB al eje del dipolo y que pasa por el punto medio del dipolo (fig. 13). La intensidad del campo en el punto B es la suma geométrica de las intensidades del campo creadas por las cargas $+q$ y $-q$. Como las distancias r_+ y r_- del punto B a ambas cargas son iguales, tendremos que el valor numérico de las intensidades será:

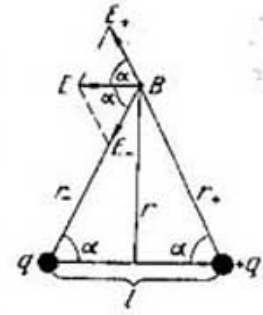


Fig. 13. Determinación de la intensidad del campo del dipolo en el punto B.

$$E_+ = E_- = \frac{q}{r_+^2}.$$

Las direcciones de los vectores de las intensidades del campo $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$ vienen indicadas en la fig. 13.

El vector resultante de la intensidad del campo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$, como se ve de la fig. 13, tiene la magnitud:

$$E = E_+ \cos\alpha + E_- \cos\alpha = \frac{2q}{r_+^2}\cos\alpha$$

o

$$E = \frac{2q}{r_+^2} \cdot \frac{l/2}{r_+} = \frac{ql}{r_+^3}.$$

www.elsolucionario.org

Designando r la distancia del punto B al punto medio del dipolo, y considerando que $l \ll r$, tendremos que aproximadamente $r_+ = r$, y la última fórmula se puede escribir de la siguiente manera:

$$E = \frac{ql}{r^3} .$$

Y, por último, introduciendo el momento del dipolo $p = ql$, obtenemos que:

$$E = \frac{p}{r^3} . \qquad (6)$$

Comparando las fórmulas (5) y (6) vemos que en ambos casos, la intensidad del campo del dipolo es directamente proporcional al momento del dipolo p e inversamente proporcional al cubo de la distancia r al dipolo.

Los ejemplos arriba analizados demuestran que la intensidad del campo resultante se puede considerarla como suma geométrica de las intensidades originadas por las cargas puntuales que forman el sistema eléctrico. No obstante, en la mayoría de los casos, el cálculo mediante la representación del sistema como un conjunto de cargas puntuales, es extremadamente desmesurado o, en general, irrealizable; por eso, en muchos problemas, la determinación de la intensidad del campo se hace recurriendo a ciertos métodos auxiliares de que se hablará más adelante.

Basándonos en la fórmula (5) de la tensión del campo del dipolo, es fácil hallar la fuerza de acción recíproca de dos dipolos rígidos dispuestos a lo largo de una recta a una distancia r que sea grande en comparación con las dimensiones propias de los dipolos.

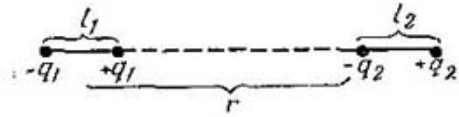


Fig. 14. Determinación de la fuerza de acción recíproca de dos dipolos.

En este caso se entiende por dipolo rígido el que no varía la distancia l entre las cargas bajo la influencia de las fuerzas exteriores, es decir, que las dos cargas del dipolo están "rígidamente" unidas.

Veamos primeramente el caso cuando ambos dipolos están orientados mutuamente según las cargas de signo opuesto (fig. 14). Sea r la distancia desde el punto medio del primer dipolo hasta la carga más próxima $-q_2$ del segundo dipolo.

La intensidad del campo E_1, originada por el primer dipolo en el punto donde se encuentra la carga $-q_2$, según la fórmula (5), será:

$$E_1 = \frac{2p_1}{r^3} ,$$

donde $p_1 = q_1 l_1$ es el momento del primer dipolo. Debido a esta intensidad del campo, sobre la carga $-q_2$ del segundo dipolo actuará la fuerza

$$f_1 = -\frac{2p_1}{r^3} q_2.$$

Sobre la carga $+q_2$ del mismo dipolo actuará la fuerza

$$f_2 = +\frac{2p_1}{(r+l_2)^3} q_2.$$

La fuerza resultante que actúa en el segundo dipolo considerado como un todo, es:

$$f = f_1 + f_2 = -\frac{2p_1}{r^3} q_2 + \frac{2p_1}{(r+l_2)^3} q_2 = -\frac{2p_1}{r^3}\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{l_2}{r}\right)^3}\right] q_2.$$

Como, según las condiciones del problema, $l \ll r$, tendremos aproximadamente que:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{l_2}{r}\right)^3} \cong 1 - 3\frac{l_2}{r}, \text{ de donde } f = -\frac{6p_1 l_2 q_2}{r^4}$$

o como $l_2 q_2 = p_2$, donde p_2 es el momento del segundo dipolo

$$f = -\frac{6p_1 p_2}{r^4}. \qquad (7)$$

El signo menos indica que la fuerza resultante es de atracción.

En el caso de que los dos dipolos estén orientados mutuamente según los extremos del mismo signo, la fuerza de acción recíproca entre ellos, como es fácil de ver, es la misma, pero positiva, es decir, es de repulsión.

La fórmula (7) indica que la fuerza de acción recíproca de los dipolos es directamente proporcional al producto de sus momentos e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia entre ellos. Los cálculos realizados son para el caso de los dipolos dispuestos a lo largo de una recta. Se puede demostrar que para otras disposiciones de los dipolos, la fuerza de acción recíproca es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia.

§ 125. Líneas de fuerza. Como se ha indicado en el párrafo anterior, cada punto del campo electrostático tiene el correspondiente vector de intensidad del campo **E**.

Introduzcamos el concepto de *línea de fuerza*. Se entiende por línea de fuerza aquella en que, en cada uno de sus puntos, *el vector de intensidad del campo va dirigido según la tangente* en el punto dado (fig. 15). La dirección de las líneas de fuerza se considera que coincide con la del vector de intensidad del campo en cada punto de la línea.

Fig. 15. Líneas de fuerza.

De esta manera tenemos que la línea de fuerza determina, en cada uno de los puntos por donde pasa, la dirección de la intensidad del campo **E** y, por lo tanto, la de la fuerza **f** que actúa sobre una carga positiva $+q$ situada en ese punto del campo. Como la dirección de

la fuerza f la determina solamente el vector de la aceleración adquirida por el cuerpo en que se concentra la carga q, y no la dirección de su desplazaminto, el cuerpo cargado, impulsado por las fuerzas del campo, en general no se moverá según las líneas de fuerza.

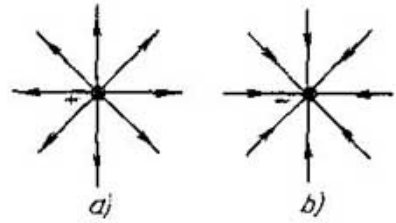


Fig. 16. Líneas de fuerza de una carga puntual: a) positiva, y b) negativa.

Un cuerpo cargado positivamente y sobre el cual no actúa ninguna fuerza excepto las eléctricas, se desplazará según la línea de fuerza solamente en el caso de que esta línea sea recta y la velocidad inicial vaya dirigida según la línea de fuerza.

Examinemos unos ejemplos sobre las líneas de fuerza.

1. **Líneas de fuerza de una carga puntual.** Es fácil de ver que las líneas de fuerza de una carga puntual son rectas que salen de la carga, si ésta es positiva, y, si es negativa, van dirigidas hacia la carga (fig. 16,*a* y *b*). De esta manera la carga positiva se puede considerar

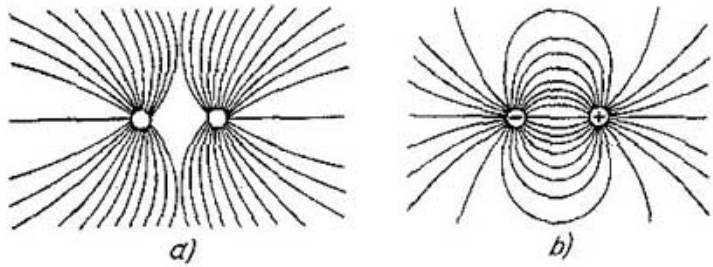


Fig. 17. Líneas de fuerza de dos cargas puntuales: *a*) del mismo signo y *b*) de distinto signo.

como el lugar inicial o comienzo de las líneas de fuerza, y la carga negativa como el lugar final o término de las mismas. En ambos casos, las tangentes a las líneas de fuerza coinciden con las mismas líneas y van dirigidas en cada punto en el mismo sentido que la intensidad del campo.

2. **Líneas de fuerza de dos cargas puntuales.** En la fig. 17,*a* se representan las líneas de fuerza de dos *cargas puntuales y del mismo*

www.elsolucionario.org

signo; en la fig. 17,*b*, las de dos *cargas puntuales de distinto signo*, pero de igual valor, es decir, las líneas de fuerza de un *dipolo*.

3. Líneas de fuerza de un campo uniforme. Se llama campo uniforme el que, en todos sus puntos, tiene iguales geométricamente las intensidades del campo, es decir, iguales en magnitud y dirección. Está claro que las líneas de fuerza de un campo uniforme son rectas, paralelas al vector de intensidad del campo.

Las líneas de fuerza se pueden revelar experimentalmente utilizando la propiedad de que los trocitos alargados de dieléctrico, al polarizarse, se orientan según las líneas de fuerza. Para demostrarlo se utilizan pequeños cristales aciculares de yeso esparciéndolos sobre una lámina de vidrio con trozos de papel de estaño pegados a ella y a los cuales se les comunican cargas eléctricas. En la fig. 18 se representa la disposición de los cristales de yeso junto a dos círculos de papel de estaño con cargas de diferente signo.

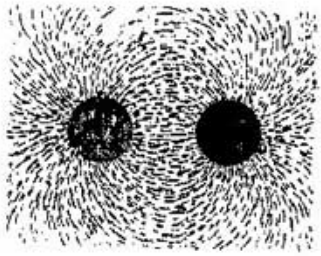


Fig. 18. Disposición de cristales de yeso en las proximidades de dos círculos de papel de estaño con cargas de diferente signo.

Como la intensidad del campo en cada uno de los puntos del espacio tiene una sola dirección, las líneas de fuerza nunca se cortan. Las líneas de fuerza empiezan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

§ 126. Flujo eléctrico (o de las líneas de fuerza). Teorema de Ostrogradski—Gauss. De lo dicho anteriormente se deduce que las líneas de fuerza se pueden trazar por cualquier punto del espacio, por lo tanto su número es ilimitado.

La línea de fuerza caracteriza la dirección de la intensidad del campo, pero no su magnitud. No obstante, se puede establecer una condición que relacione la *magnitud* de la intensidad del campo, con el *número* de líneas de fuerza trazadas. Donde la intensidad del campo sea mayor, trazaremos mayor número de líneas de fuerza, y donde aquélla sea menor, éstas estarán más espaciadas.

Cualquier campo nos lo podemos representar dividido en pequeñas regiones en las cuales la intensidad del campo varía tan poco, que podemos considerarlo uniforme en esta región. Representémonos una pequeña superficie ΔS_0 de una de estas regiones (fig. 19) trazada perpendicularmente a las líneas de fuerza.

Consideremos que por la unidad de área de esta superficie ΔS_0 pasa un número de líneas de fuerza igual al valor de la intensidad del campo en esta superficie, es decir, consideremos que se cumple la

siguiente relación:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = E. \qquad (1)$$

Si se cumple esta condición en el trazado de las líneas de fuerza, la intensidad del campo estará relacionada, efectivamente, con la densidad del trazado de líneas de fuerza. En los lugares donde la intensidad sea menor, las líneas estarán más espaciadas, y donde la intensidad del campo sea mayor, estarán más apretadas.

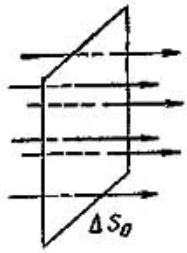


Fig. 19. Superficie elemental ΔS_0 perpendicular a las líneas de fuerza.

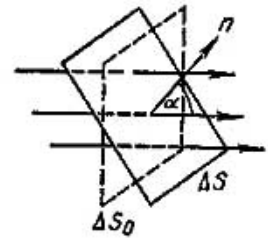


Fig. 20. Superficie elemental ΔS inclinada respecto a las líneas de fuerza.

El número total de líneas de fuerza que atraviesa una superficie lo denominaremos *flujo eléctrico* (o de las líneas de fuerza) y lo designaremos con la letra N. El número de líneas ΔN que atraviesa una supeficie elemental ΔS_0, constituirá un flujo eléctrico elemental.

Veamos qué cantidad ΔN de líneas de fuerza atraviesa una superficie elemental ΔS (fig. 20), cuya normal **n** forma un ángulo α con la dirección de las líneas de fuerza. Sea ΔS_0 la proyección de ΔS en el plano perpendicular a la dirección de las líneas de fuerza. Está claro que sola y exclusivamente las líneas que atraviesan la superficie ΔS, pasarán a través de esta superficie ΔS_0; por lo tanto, de la relación (1) tenemos que:

$$\Delta N = \Delta S_0 \cdot E = \Delta S \cdot \cos\alpha \cdot E.$$

Pero la magnitud $E \cos\alpha$ es la proyección del vector de la intensidad del campo en la dirección de la normal **n** a la superficie ΔS:

$$E\cos\alpha = E_n,$$

por lo tanto,

$$\Delta N = E_n \cdot \Delta S. \qquad (2)$$

Esta ecuación determina el flujo eléctrico elemental que atraviesa una superficie elemental ΔS orientada arbitrariamente. Por consiguiente, el flujo eléctrico elemental que atraviesa una superficie

elemental orientada arbitrariamente es igual al producto de la componente de la intensidad del campo E normal a la superficie elemental, por el área de esta superficie.

Si la superficie ΔS es paralela a las líneas de fuerza, el flujo que la atraviesa es igual a cero, ya que en este caso

$$\alpha = \pi/2 \text{ y } E_n = 0.$$

El signo del flujo dependerá del ángulo que formen las líneas de fuerza con la dirección de la normal que se ha elegido como positiva. En la fig. 20, el flujo es positivo; si hubiésemos elegido como positivo el sentido opuesto de la normal n indicado en la fig. 20, el signo del flujo sería negativo.

El flujo eléctrico que pasa a través de una superficie finita S se determina como la suma algebraica de los flujos elementales:

$$N = \sum \Delta N = \sum E_n \Delta S. \tag{3}$$

La suma abarca a todos los elementos en que hemos dividido la superficie S.

Las superficies elementales ΔS tienen que ser infinitamente pequeñas. Por consiguiente, llamando dS a la superficie elemental, obtenemos para el flujo eléctrico elemental dN la siguiente ecuación:

$$dN = E_n dS.$$

El flujo eléctrico N que pasa a través de la superficie S será la suma de infinidad de flujos elementales dN, es decir, la integral

$$N = \int_S E_n dS, \tag{3a}$$

donde el signo S indica que la integral se extiende a toda la superficie examinada.

Aclaremos qué número de líneas de fuerza hay que trazar desde una carga puntual q cuya intensidad del campo varía inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (§ 124). Como la carga puntual q crea un campo de simetría esférica, las líneas de fuerza, como se ha indicado en el § 125, son líneas radiales simétricamente dispuestas (fig. 21). Su número total lo designaremos por N. Tracemos mentalmente una superficie esférica de cualquier radio r y de centro en la carga q. Según se ha establecido, el número de líneas de fuerza que atraviesa una unidad de superficie perpendicular a aquéllas, es igual al valor de la intensidad del campo en los puntos de la superficie dada. La superficie esférica trazada es per-

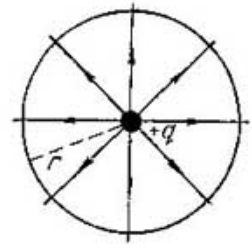


Fig. 21. Representación gráfica para la deducción del teorema de Ostrogradski-Gauss.

www.elsolucionario.org

pendicular a las líneas de fuerza, que son radiales. El número total de líneas de fuerza es N, por consiguiente, por unidad de superficie pasarán $\frac{N}{4\pi r^2}$. Según la (1), esta magnitud debe ser numéricamente igual a la intensidad del punto del campo situado a la distancia r de la carga, es decir,

$$\frac{N}{4\pi r^2} = \frac{q}{r^2},$$

de donde

$$N = 4\pi q. \qquad (4)$$

De esta manera tenemos que hay que *trazar 4 πq líneas de fuerza simétricamente dispuestas desde cada carga puntual.*

Generalizando esta conclusión se deduce el llamado *teorema de Ostrogradski—Gauss*, el cual señala la relación general entre el

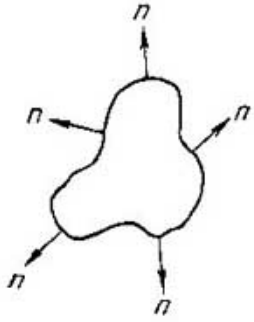


Fig. 22. Sentido positivo de las normales a una superficie cerrada.

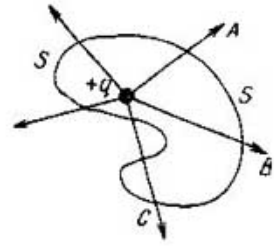


Fig. 23. Intersección de una superficie cerrada arbitraria por las líneas de fuerza.

flujo eléctrico que pasa por una superficie cerrada y la magnitud de las cargas que se hallan en el interior de esta superficie. Este teorema facilita en muchos casos particulares la determinación del vector de intensidad del campo creado por cargas que se hallan en el interior de cuerpos de dimensiones finitas e, incluso, infinitas.

El teorema de Ostrogradski—Gauss se puede formular de la siguiente manera: *el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada con cargas en su interior, es igual al producto de 4π por la suma algebraica de las cargas que comprende.*

Para demostrarlo supongamos que para una superficie cerrada, la dirección de la normal al elemento de superficie es positiva si "sale" de la superficie cerrada (fig. 22). Entonces, las líneas de fuerza que salen del volumen limitado por la superficie dada, formarán un flujo eléctrico positivo, mientras que las líneas que entran en el volumen dado, formarán un flujo negativo.

Admitida esta suposición del signo de la normal, demostremos antes que nada la veracidad del teorema de Ostrogradski—Gauss para una carga puntual. Rodeemos la carga puntual q, que consideraremos positiva, de una superficie cerrada arbitraria S (fig. 23). Según lo demostrado, de la carga hay que trazar $4\pi q$ líneas de fuerza. Cada una de estas líneas cortará a la superficie S bien una vez, como las líneas A y B; bien un número cualquiera *impar* de veces, como, por ejemplo, la línea C que atraviesa a la superficie tres veces. Pero la línea C *sale dos veces* de la superficie S y *entra una vez en ella*. Por consiguiente, según lo establecido respecto al signo del flujo, en los lugares de salida creará un flujo positivo, y en los de entrada, negativo; por lo tanto, para calcular el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada S, se considera que la línea de fuerza C atraviesa una sola vez la superficie. Lo mismo ocurrirá con cualquiera otra línea de fuerza. Como consecuencia tenemos que el número total de líneas de fuerza que atraviesan la superficie cerrada de forma cualquiera en cuyo interior hay una carga puntual q, es igual al número de líneas de fuerza que salen de la carga puntual, es decir, igual a $4\pi q$. Según la definición este número total de líneas de fuerza N es el que da el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada S.

Así hemos demostrado la veracidad del teorema de Ostrogradski—Gauss para una carga puntual.

Para el caso general cuando en el interior de la superficie hay un número cualquiera k de cargas $q_1, q_2, \ldots q_k$, veamos el flujo eléctrico creado por una de ellas, que designaremos por q_i. Según lo establecido, el flujo creado por esta carga será $N_i = 4\pi q_i$; teniendo en cuenta que el signo del flujo coincide con el de la carga.

El flujo total N creado por todas las cargas será igual a la suma algebraica de los flujos creados por las cargas individuales, es decir,

$$N = \sum N_i = 4\pi \sum q_i. \qquad (5)$$

Este resultado es el teorema de Ostrogradski—Gauss arriba formulado.

Del teorema de Ostrogradski—Gauss se sacan importantes consecuencias.

En primer lugar se deduce que las líneas de fuerza pueden empezar solamente en los lugares donde se hallan las cargas positivas, y terminar en los de las cargas negativas.

Segundo: si tomamos una superficie cerrada que comprenda varias cargas cuya suma algebraica sea igual a cero, el flujo eléctrico total que atraviesa la superficie, será igual a cero. Esto significa que el número de líneas de fuerza que salen del volumen limitado por la superficie dada, es igual al número de líneas de fuerza que entran en el mismo.

Tercero: si la superficie cerrada se traza en un campo de manera que en su interior no haya cargas, las líneas de fuerza la atravesarán sin empezar ni terminar en el interior de esta superficie. Por consiguiente, el número de líneas de fuerza que entran será igual al número de líneas que salen, y el flujo eléctrico total que atraviesa la superficie también será igual a cero.

§ 127. Una deducción más rigurosa del teorema de Ostrogradski-Gauss. Debido a la importancia de las cuestiones examinadas en el § 126, deduzcamos el teorema de Ostrogradski-Gauss directamente de la ley de Coulomb sin basarnos en la aplicación de las líneas de fuerza. Como se ha hecho antes, dividamos el campo en regiones tan pequeñas, que en los límites de las mismas se puede considerar uniforme el campo.

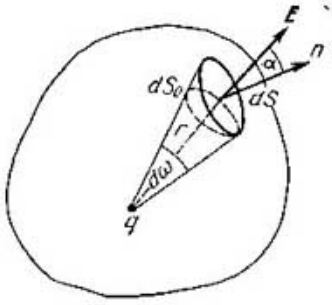


Fig. 24. Representación gráfica para una deducción más rigurosa del teorema de Ostrogradski-Gauss.

Si tomamos en una de estas regiones una superficie infinitamente pequeña dS (fig. 24), en los límites de ésta podemos considerar que la intensidad del campo E es constante en magnitud y dirección. Elijamos una dirección positiva de la normal a la superficie y llamémosla n. El flujo eléctrico elemental dN que atraviesa la superficie dS lo determinaremos de la relación:

$$dN = E_n\, dS,$$

donde E_n es la proyección del vector E según la dirección de la normal n. Determinemos ahora el flujo elemental que pasa por la superficie dS, creado por la carga puntual q que se halla en un punto desde el cual la superficie elemental dS se ve según el ángulo sólido $d\omega$ (fig. 24). Según la ley de Coulomb, la intensidad del campo E va dirigida según el radio vector r trazado desde el punto donde se halla la carga. Por eso, el ángulo α entre la normal n y la intensidad del campo E es igual al ángulo entre las superficies elementales dS y dS_0, donde dS_0 es la proyección de dS según la dirección perpendicular al radio vector r. De aquí que:

$$dN = E_n dS = E \cos\alpha\, dS = E dS_0.$$

Como, según la ley de Coulomb,

$$E = \frac{q}{r^2}$$

la ecuación de dN se podrá escribir:

$$dN = \frac{q}{r^2}\, dS_0.$$

La magnitud $\frac{dS_0}{r^2}$ es, por definición, el ángulo sólido $d\omega$ con que se ve el elemento dS desde el lugar de la carga. De aquí que, definitivamente, obtengamos:

$$dN = q\, d\omega, \qquad (1)$$

es decir, el flujo eléctrico elemental dN creado por una carga puntual y que pasa por el elemento de superficie dS, es igual a la magnitud de la carga q multiplicada

www.elsolucionario.org

por la del ángulo sólido $d\omega$ con que se ve el elemento de superficie dS desde el punto donde se halla la carga.

El flujo eléctrico total N que atraviesa la superficie cerrada, es la suma de los flujos elementales a través de los elementos de superficie. Pero, debido a que los flujos elementales son infinitamente pequeños, la suma se sustituye por la integral:

$$N = \int dN.$$

Utilizando la fórmula (1) y sustituyendo dN por su valor, tendremos que

$$N = q \int d\omega. \qquad (2)$$

Antes de pasar adelante volvamos a considerar positiva la dirección de la normal que sale del volumen limitado por la superficie dada; y el ángulo sólido lo consideraremos positivo cuando desde el punto donde se halla la carga, se vea la parte interior de la superficie.

Si la carga está en el interior de la superficie, la integral de la fórmula (2) abarcará todo el ángulo sólido con que se ve la superficie cerrada desde el punto que se halla en el interior de esta superficie. Como se sabe, este ángulo es igual a 4π, de donde:

$$N = q \int d\omega = 4\pi q.$$

Si la carga se halla fuera de la superficie cerrada (fig. 25), cada ángulo sólido elemental $d\omega$ entrará en la integral con dos signos: con el signo más (para el elemento de la superficie dS_1, cuya parte interior se ve desde el punto de la carga) y con el signo menos (para el elemento dS_2, cuya parte exterior se ve desde el punto de la carga); por consiguiente, en este caso, al integrar según los ángulos obtendremos que la integral es igual a cero, de donde $N = 0$.

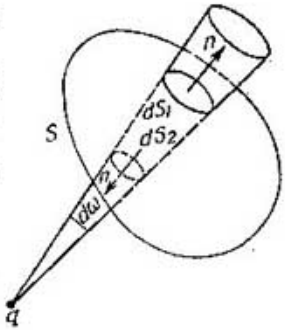


Fig. 25. Determinación del flujo de una carga que se halla fuera de una superficie cerrada.

El resultado de estas integraciones nos da el teorema de Ostrogradski-Gauss: el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al producto de 4π por la carga que se halla en el interior de la superficie.

§ 128. Aplicaciones del teorema de Ostrogradski—Gauss. Como cualquier carga nos la podemos representar como una suma de un número infinito de cargas infinitesimales que se pueden considerar puntuales, el teorema de Ostrogradski—Gauss será justo al aplicarlo a cargas de cualesquiera forma y magnitud. En esto se basa su gran aplicación.

Antes de examinar las aplicaciones del teorema, introduzcamos los conceptos de densidad volumétrica de carga o carga por unidad de volumen, y densidad superficial de carga o carga por unidad de superficie.

En muchos problemas, las cargas están distribuidas en determinado volumen. En estos problemas es muy importante introducir el concepto de densidad volumétrica de distribución de las cargas.

Sea un volumen ΔV con una carga Δq. Entenderemos por *densidad volumétrica* media de la carga la magnitud física determinada por la relación

$$\overline{\rho} = \frac{\Delta q}{\Delta V} . \qquad (1)$$

La densidad ρ en el punto dado la determinaremos como el límite a que tiende esta relación al tender a cero el volumen ΔV:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta V} \right) . \qquad (1a)$$

En algunos casos, las cargas se distribuyen por la superficie de los cuerpos, donde el espesor de la capa de las cargas es tan pequeña, que se puede despreciar. En este caso es conveniente introducir el concepto de *densidad superficial de las cargas*. Supongamos que a la superficie ΔS le corresponde la carga Δq; entonces, la densidad superficial media de la carga $\overline{\sigma}$ la determinaremos de la relación:

$$\overline{\sigma} = \frac{\Delta q}{\Delta S} . \qquad (2)$$

La densidad superficial σ en el punto dado será igual al límite a que tiende esta relación cuando la superficie ΔS tiende a cero:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \left(\frac{\Delta q}{\Delta S} \right) . \qquad (2a)$$

Determinemos ahora con ayuda del teorema de Ostrogradski-Gauss, la intensidad del campo para una serie de casos.

1. Intensidad del campo de un plano infinito cargado uniformemente. Veamos el campo electrostático creado por un plano infinito, cargado con una densidad de $+\sigma$ constante en todos los puntos del plano. Por razones de simetría se puede considerar que las líneas de fuerza son perpendiculares al plano y parten del mismo. Para convencernos de ello demostrémoslo por reducción al absurdo: supongamos que las líneas de fuerza forman cierto ángulo con la perpendicular al plano. Si las líneas de fuerza siguiesen la dirección de las líneas de puntos representadas en la fig. 26, significaría que del semiplano superior se repelería la carga positiva con más fuerza que del inferior, lo cual contradeciría nuestra suposición de plano infinito y de la constancia de la densidad superficial de la carga en este plano. Razonando de la misma manera se puede demostrar que las líneas de fuerza no pueden tener otra dirección que la de la normal a la superficie. Sea el punto A situado a la derecha del plano. La intensidad del campo en este punto irá dirigida hacia la derecha, lo cual se deriva de que es igual a la fuerza con que actúa sobre una carga *positiva* unidad, que *es repelida* del plano cargado positiva-

mente. Si tomamos el punto B situado a la izquierda del plano simétricamente al punto A, repitiendo los razonamientos anteriores veremos que en este punto, la intensidad del campo **E** va dirigida en sentido contrario (en comparación con la del punto A). Por consiguiente las líneas de fuerza serán rectas que salen del plano perpendicularmente al mismo.

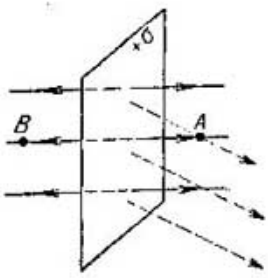


Fig. 26. Líneas de fuerza de un plano infinito.

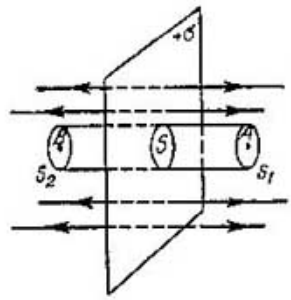


Fig. 27. Representación gráfica para calcular la intensidad del campo de un plano infinito.

Determinemos el valor de la intensidad del campo en el punto A aplicando el teorema de Ostrogradski-Gauss. Como superficie cerrada elijamos una superficie cilíndrica (fig. 27), construida de la siguiente manera: tomemos un espacio S del plano cargado como sección media del cilindro, y tracemos las superficies laterales del cilindro paralelamente a las líneas de fuerza. Las dos bases del cilindro S_1 y S_2 las trazamos respectivamente por los puntos A y B paralelamente al plano. Con esto y por razones de simetría se puede considerar que la intensidad es constante en todos los puntos de cada una de las bases S_1 y S_2, es decir que tienen el mismo valor numérico e igual al de la intensidad buscada E del punto A. Calculemos el flujo eléctrico que pasa a través de la superficie cilíndrica. El flujo que atraviesa la superficie lateral es igual a cero, ya que las líneas de fuerza son paralelas a esta superficie. Por consiguiente, el flujo total N se compone de los flujos N_1 y N_2 que pasan a través de las bases del cilindro S_1 y S_2. Estos dos flujos son positivos. Como las superficies S_1 y S_2 son perpendiculares a las líneas de fuerza, los flujos a través de ellas se obtienen multiplicando el valor de la intensidad por el área de la base. De esta manera tenemos que:

$$N = N_1 + N_2 = ES_1 + ES_2 = E \cdot 2S.$$

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss el flujo total debe ser igual al producto de la magnitud 4π por la carga encerrada en el interior

www.elsolucionario.org

de la superficie; el valor de esta carga es de σS. Por consiguiente,

$$2SE = 4\pi\sigma S,$$

de donde la intensidad buscada E será igual a

$$E = 2\pi\sigma \qquad (3)$$

El valor de E no depende de la distancia del punto A al plano. Lo mismo tenemos con el punto B. Así resulta que a la derecha y a la izquierda del plano tenemos campos uniformes. Si el plano está cargado negativamente, la dirección de la intensidad será en sentido contrario a la del ejemplo analizado: las líneas penetrarán en el plano. El resultado obtenido es justo solamente para los planos infinitos, ya que sólo en este caso se pueden utilizar las razones de simetría aducidas; no obstante, con aproximación es justo para el espacio que rodea inmediatamente a la parte media de un plano finito, lejos de los extremos.

2. Campo de dos planos paralelos infinitos con cargas de distinto signo y de densidades $+\sigma$ y $-\sigma$.

La solución se puede obtener directamente de la suma geométrica de los campos de los dos planos cargados de diferente signo. De la

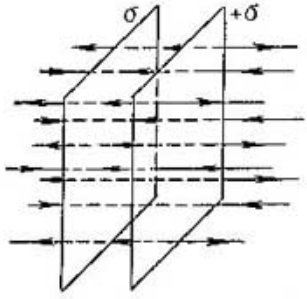


Fig. 28. Líneas de fuerza de dos planos paralelos.

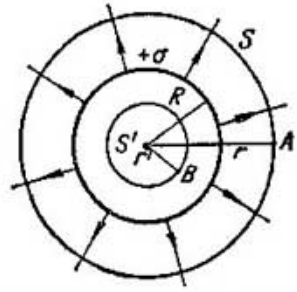


Fig. 29. Determinación de la intensidad del campo de una esfera cargada.

fig. 28 se ve que la intensidad de los campos de ambos planos en la región situada *entre* los planos, tiene un mismo sentido, por lo tanto, la suma geométrica es la suma aritmética. La intensidad del campo de cada plano, según hemos visto arriba, es igual a $2\pi\sigma$, por consiguiente, la intensidad total *entre* los planos será:

$$E = 2\pi\sigma + 2\pi\sigma = 4\pi\sigma. \qquad (4)$$

Las intensidades del campo creadas por ambos planos a la derecha del de la derecha y a la izquierda del de la izquierda, van dirigidas en sentido contrario; por consiguiente, la suma geométrica es igual

a la diferencia de sus valores numéricos. Como el valor numérico de las intensidades creadas por cada plano es igual a $2\pi\sigma$, la intensidad resultante para los puntos *fuera* de los planos es igual a cero:

$$E=0 \tag{4a}$$

3. Intensidad del campo creado por una superficie esférica cargada uniformemente. Sea la superficie esférica de radio R cargada positivamente y la densidad superficial de la carga $+\sigma$ es constante en todos los puntos de la superficie. La carga total de la superficie esférica la designaremos por q. Dividiremos el problema en dos partes: a) determinación de la intensidad del campo electrostático *fuera de la superficie esférica*, b) determinación de la intensidad del campo *en el interior de la superficie esférica*.

Sea el punto A alejado del centro de la superficie esférica a la distancia $r>R$ (fig. 29). Tracemos mentalmente por este punto una superficie esférica S de radio r y de centro en el centro de la esfera cargada. Por la simetría se ve claramente que el valor numérico de la intensidad será el mismo en todos los puntos de esta esfera. De la misma manera se ve que el vector de intensidad del campo (en cada punto) estará dirigido según la prolongación del radio.

Apliquemos el teorema de Ostrogradski-Gauss a esta superficie esférica S de radio r. Como esta superficie es perpendicular a las líneas de fuerza, el flujo total que pasa a través de ella lo obtenemos multiplicando la intensidad del campo E por la magnitud de la superficie, de donde el flujo total es igual a $E\cdot 4\pi r^2$.

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss tenemos que:

$$E\cdot 4\pi r^2=4\pi q,$$

de donde

$$E=\frac{q}{r^2} \text{ siendo } r>R, \tag{5}$$

es decir, *la intensidad del campo creado fuera de una superficie esférica cargada uniformemente, es la misma que si toda carga se hallase en el centro de la esfera.*

Pasemos a los puntos que están en el interior de la superficie esférica. Sea el punto B (fig. 29) a la distancia $r'<R$ del centro de la esfera y tracemos por este punto una superficie esférica S' de centro en el de la esfera cargada. Está claro que el valor numérico de la intensidad del campo en todos los puntos de esta superficie será el mismo. Lo mismo que antes, por la simetría se ve que la intensidad (si no es igual a cero), puede tener solamente sentido radial y, por consiguiente, será perpendicular a la superficie esférica S'.

Aplicando el teorema de Ostrogradski-Gauss a la superficie esférica S', obtenemos

$$E\cdot 4\pi r'^2=0,$$

ya que en el interior de la esfera S' la carga es igual a cero; de aquí que:

$$E = 0, \text{ si } r' < R. \tag{6}$$

Por consiguiente, *la intensidad del campo electrostático en todos los puntos del interior de una superficie esférica uniformemente cargada es igual a cero.*

Se puede demostrar (compárese con el § 132) que las fórmulas (5) y (6) son también justas para una esfera *conductora* con una carga q.

4. **Intensidad del campo creado por una esfera uniformemente cargada.** Sea una esfera de radio R, cuya carga total positiva q está distribuida por el volumen de la esfera con una densidad constante.

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

La intensidad del campo en un punto cualquiera A (fig. 29) *fuera de la esfera cargada* a la distancia $r > R$ del centro de la misma, se expresará de la misma manera que la intensidad producida por una superficie esférica cargada:

$$E = \frac{q}{r^2},$$

e irá dirigida según el radio en su prolongación, ya que las razones de simetría y el cálculo serán los mismos. Así tenemos que *una esfera uniformemente cargada crea en los puntos fuera de ella la misma intensidad del campo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro.*

Determinemos la intensidad del campo en el punto B *del interior de la esfera cargada* a la distancia $r' < R$ del centro de la misma. En este caso, las condiciones de simetría serán las mismas que las arriba indicadas, de lo cual se deduce que el valor numérico de la intensidad será el mismo para todos los puntos de la superficie esférica de radio r' de centro en el de la esfera cargada, teniendo en cuenta que en cada punto la intensidad va dirigida según el radio. La carga q' que se halla en el interior de la superficie r', será:

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3,$$

o, como $\rho = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, tenemos que:

$$q' = q\frac{r'^3}{R^3}.$$

www.elsolucionario.org

Aplicando el teorema de Ostrogradski-Gauss a la superficie esférica de radio r', obtenemos que:

$$N = E \cdot 4\pi r'^2 = 4\pi q' = 4\pi \frac{r'^3}{R^3} q,$$

de donde

$$E = \frac{N}{4\pi r'^2} = \frac{q}{R^3} r'. \qquad (7)$$

De la fórmula (7) se ve que *la intensidad del campo en el interior de una esfera cargada uniformemente crece proporcionalmente a la*

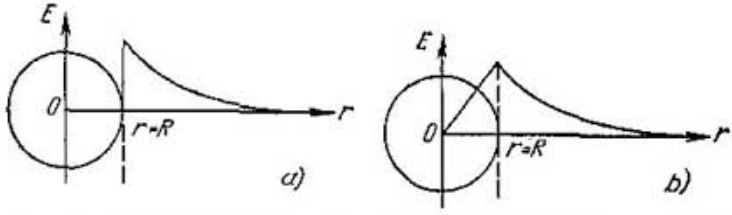


Fig. 30. Intensidad del campo: *a*) de la superficie cargada de una esfera y *b*) de una esfera cargada en todo su volumen.

distancia al centro de la esfera. Ello es debido a que la intensidad, como se ha dicho, la crea solamente la parte de la carga total que no está más distanciada del centro, que el punto en que se calcula la intensidad. Las cargas que se hallan fuera de la esfera mentalmente trazada de radio r', según el teorema de Ostrogradski-Gauss, nos darán en la superficie de esta esfera una intensidad del campo igual a cero.

En la fig. 30, *a* se representa el gráfico de la intensidad para el caso de la superficie cargada de una esfera, y en la fig. 30, *b*, para el caso de una esfera cargada en todo su volumen.

5. Intensidad del campo creado por una superficie cilíndrica infinita uniformemente cargada. Sea una superficie cilíndrica de radio R, cargada uniformemente con una densidad superficial de carga de $+\sigma$. Determinemos la intensidad en el punto A a la distancia $r > R$ del eje del cilindro (fig. 31). La simetría del problema nos permite deducir directamente que la intensidad del campo en el punto A debe estar dirigida según la prolongación del radio vector $\mathbf{r}$. El teorema de Ostrogradski-Gauss lo aplicaremos a la superficie cilíndrica que pasa por el punto A, cuyo eje coincide con el del

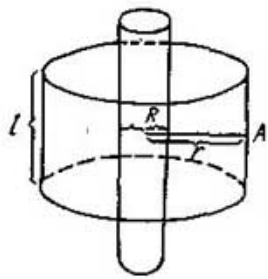


Fig. 31. Determinación de la intensidad del campo de un cilindro cargado.

cilindro cargado, y las bases superior e inferior son perpendiculares al eje y se hallan a la distancia l una de otra. El flujo total que pasa a través de esta superficie, será el que atraviesa la superficie lateral del cilindro, ya que la intensidad del campo es paralela a las bases y el flujo a través de éstas será igual a cero. Como las líneas de fuerza son perpendiculares a la superficie lateral del cilindro, obtendremos el flujo total N multiplicando el valor de la intensidad del campo E por el área de la superficie lateral $2\pi rl$:

$$N = 2\pi rl \cdot E. \tag{8}$$

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss, el flujo N es igual numéricamente al producto de 4π por la carga encerrada en el interior de la superficie que atraviesa el flujo que se calcula. Esta carga q es igual a la carga correspondiente a la longitud l del cilindro:

$$q = \sigma \cdot 2\pi Rl,$$

por consiguiente, según el teorema de Gauss:

$$N = 4\pi q = 4\pi\sigma \cdot 2\pi Rl.$$

Comparando esta expresión para N con la (8), obtenemos que:

$$E = \frac{4\pi\sigma R}{r}. \tag{9}$$

Como $2\pi R$ es igual numéricamente al área de la superficie lateral del cilindro por unidad de su longitud, la magnitud $\eta = 2\pi R\sigma$ será la carga por unidad de longitud del cilindro. De aquí que la fórmula (9) se pueda escribir de la forma:

$$E = \frac{2\eta}{r}. \tag{9a}$$

La intensidad del campo disminuye inversamente proporcional a la distancia del eje del cilindro. De manera análoga se puede demostrar fácilmente que *la intensidad del campo en el interior de una superficie cilíndrica uniformemente cargada es igual a cero.*

Los ejemplos analizados demuestran que la aplicación del teorema de Ostrogradski-Gauss permite calcular el campo electrostático cuando éste es simétrico y por razones de simetría se puede indicar de antemano la dirección de las líneas de fuerza.

§ 129. Trabajo de las fuerzas del campo electrostático. Potencial. Al desplazarse las cargas por un campo electrostático, las fuerzas aplicadas a las cargas realizan un trabajo. Como se demostrará más abajo, las fuerzas del campo electrostático poseen la propiedad de que el trabajo realizado por ellas al trasladar una carga no depende

le la trayectoria de desplazamiento de la carga, sino que depende sólo de la magnitud de la carga y de las posiciones inicial y final de la misma. Esta propiedad del campo permite caracterizar cualquier punto del mismo por medio de una función especial denominada *potencial* en un punto del campo. El trabajo de desplazamiento de una carga desde un punto a otro lo expresa la diferencia de valores de los potenciales de estos dos puntos.

Veamos primeramente el trabajo de las fuerzas eléctricas en un campo de cargas puntuales.

Sea una carga positiva q_0 que se desplaza por el campo de una carga q desde el punto a al punto b de distancia muy pequeña (fig. 32). Supongamos que la carga q está inmóvil en un punto O cualquiera. El desplazamiento infinitamente pequeño ds de la carga q_0 entre los puntos a y b se puede considerar rectilíneo y despreciar la variación de la fuerza f aplicada a la carga q_0 considerándola constante en magnitud y en dirección durante el desplazamiento. Según la definición de trabajo, el trabajo elemental dA de la fuerza f en el desplazamiento ds, será:

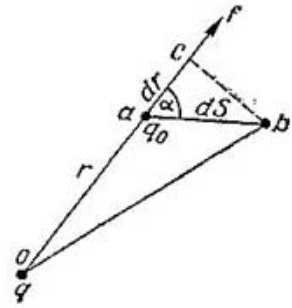


Fig. 32. Determinación del trabajo de desplazamiento de una carga q_0 en el trayecto ds.

$$dA = fds \cdot \cos\alpha,$$

donde α es el ángulo formado por la dirección de la fuerza f (que coincide con la dirección de la intensidad del campo **E**) y la dirección del desplazamiento ds. Trazando una perpendicular desde el punto b sobre la prolongación de la recta Oa, veremos que $ds \cdot \cos\alpha = Oc - Oa$; pero Oc, si el desplazamiento ds es infinitamente pequeño, se puede considerar igual a Ob, de donde $ds \cdot \cos\alpha = Ob - Oa = dr$, donde dr es la variación de la distancia entre las cargas q y q_0 al desplazarse la carga q_0 desde el punto a hasta el punto b. De aquí obtenemos que el trabajo elemental dA será:

$$dA = fdr. \qquad (1)$$

La fuerza f es una fuerza de Coulomb de acción recíproca de las cargas q_0 y q. Debido a lo pequeño que es el desplazamiento ds, esta fuerza se puede considerar constante en todo el trayecto ds y, por consiguiente, igual a

$$f = \frac{qq_0}{r^2},$$

donde $r = Oa$. Colocando este valor de f en la expresión del trabajo

www.elsolucionario.org

(1) hallamos que:

$$dA = \frac{qq_0}{r^2}\,dr. \tag{2}$$

Sea, ahora, la carga q_0 que se desplaza desde el punto A, que se halla a la distancia r_1 de la carga q, hasta el punto B, que se halla a la distancia r_2 de la misma (fig. 33), y que los puntos A y B no estén cerca. Para determinar el trabajo en el desplazamiento finito AB, lo dividiremos en trayectos infinitesimales ds. En cada uno de estos desplazamientos, el trabajo elemental dA se expresará por la fórmula (2), y el trabajo total A en todo el trayecto AB será la suma de todos estos trabajos elementales, es decir, la integral en los límites desde r_1 hasta r_2:

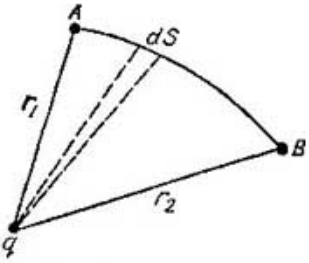


Fig. 33. Determinación del trabajo de desplazamiento de una carga en el trayecto AB.

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{r^2}\,dr. \tag{3}$$

Sacando el producto qq_0 del signo de la integral por ser constante, obtenemos:

$$A = qq_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = qq_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Este valor del trabajo A lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$A = q_0 \left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r^2}\right), \tag{4}$$

de donde tenemos que *el trabajo de las fuerzas de un campo al trasladar la carga q_0 en el campo de la carga puntual q es el producto del valor de la carga trasladada por la diferencia de los valores de q/r en los puntos inicial y final de la traslación.*

Introduzcamos la función V determinada por la igualdad

$$V = \frac{q}{r} + C, \tag{5}$$

donde C es una constante arbitraria. La función V tendrá para el punto A el valor de:

$$V_1 = \frac{q}{r_1} + C,$$

y para el punto B, el valor de:

$$V_2 = \frac{q}{r_2} + C.$$

La diferencia $V_1 - V_2$ será igual a $\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$, ya que las constantes aditivas C se eliminan. La función V determinada por la ecuación (5) se denomina *potencial de la carga puntual* q. Introduciendo el valor del potencial en la fórmula (4), tenemos:

$$A = q_0 (V_1 - V_2). \tag{6}$$

donde V_1 y V_2 son los valores de la función V en los puntos A y B. Así tenemos que *el trabajo de las fuerzas de un campo al desplazar una carga, es igual numéricamente, al producto de la magnitud de la carga por la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final del trayecto*, por lo tanto, no depende de la forma del trayecto sino solamente de la posición de los puntos inicial y final. Si la trayectoria es una línea cerrada, los puntos inicial y final coinciden, de donde $V_1 = V_2$ y, según la (6), $A = 0$, es decir, *al desplazar una carga por una trayectoria cerrada, el trabajo de las fuerzas eléctricas es igual a cero.*

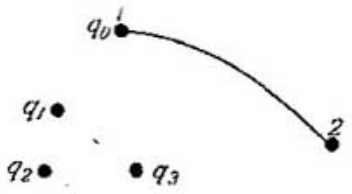


Fig. 34. Desplazamiento de una carga q_0 en un campo de un sistema de cargas $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Veamos ahora el trabajo de las fuerzas eléctricas al trasladar una carga en un campo de un sistema de cargas puntuales. Sea un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2 \ldots q_n$ (fig. 34), y supongamos que la carga q_0 se desplaza en el campo de este sistema desde el punto *1* al punto *2*. La fuerza $\mathbf{f}$ que actúa sobre la carga q_0, es la resultante de las fuerzas $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots \mathbf{f}_n$, con que actúa sobre la carga q_0 cada una de las cargas $q_1, q_2, \ldots q_n$ independientemente. Como el trabajo de la fuerza resultante es la suma algebraica de los trabajos de las fuerzas componentes, el trabajo de traslación de la carga q_0 en el campo de un sistema de cargas puntuales $q_1, q_2 \ldots, q_n$, será igual a $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, donde $A_1, A_2 \ldots, A_n$ son los trabajos de traslación de las fuerzas $f_1, f_2, \ldots, f_n$ independientemente. El trabajo A_1 de la fuerza f_1 se puede representar según la (6), de la siguiente manera: $A_1 = q_0 (V_1^{(1)} - V_2^{(1)})$, donde $V_1^{(1)}$ y $V_2^{(1)}$ son los potenciales creados por la carga q_1 en los puntos *1* y *2* respectivamente. De la misma manera, llamando $V_1^{(2)}$ y $V_2^{(2)}$ los potenciales creados por la carga q_2 en los puntos *1* y *2* respectivamente, obtenemos que $A_2 = q_0 (V_1^{(2)} - V_2^{(2)})$, etc. El trabajo total A será:

$$A = q_0 (V_1^{(1)} - V_2^{(1)}) + q_0 (V_1^{(2)} - V_2^{(2)}) + \ldots + q_0 (V_1^{(n)} - V_2^{(n)}).$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$A = q_0 [(V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \ldots + V_1^{(n)}) - (V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + \ldots + V_2^{(n)})].$$

Llamando V a la suma algebraica de todos los potenciales en el punto dado, tendremos que:

$$\left.\begin{aligned} V_1^{(1)} + V_1^{(2)} + \ldots + V_1^{(n)} &= V_1, \\ V_2^{(1)} + V_2^{(2)} + \ldots + V_2^{(n)} &= V_2. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

de donde resulta que el trabajo es igual a:

$$A = q_0 (V_1 - V_2), \quad (8)$$

es decir, el valor numérico del trabajo A se puede determinar como el producto del valor de q_0 por la diferencia de los valores de la función V en los puntos 1 y 2, que corresponden al comienzo y al final del trayecto. Por consiguiente, la función V es el potencial creado por todas las cargas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ en el punto dado. Según la (7), *el potencial V de un sistema de cargas puntuales es igual a la suma algebraica de los potenciales $V^{(1)}, V^{(2)}, \ldots, V^{(n)}$*, creados por las cargas independientes.

Cualquier sistema cargado se puede dividir en infinitas cargas muy pequeñas que, para los puntos fuera del sistema cargado, se pueden considerar puntuales. Por consiguiente, según lo dicho anteriormente, se puede hablar del potencial creado por cualquier sistema fuera del mismo. El concepto de potencial se puede generalizar y extender a los puntos del mismo sistema cargado, si este sistema está cargado con densidades superficiales o volumétricas finitas de carga. Esta generalización del concepto de potencial se da en la teoría general del campo eléctrico.

Detengámonos, además, en el sentido físico de potencial. De la fórmula (8) se deduce que la diferencia de potencial en dos puntos del campo electrostático, numéricamente es igual a la relación entre el trabajo efectuado por las fuerzas del campo al trasladar una carga de un punto a otro, y la magnitud de la carga desplazada:

$$\frac{A}{q_0} = V_1 - V_2. \quad (9)$$

Si suponemos que $q_0 = +1$, vemos que *la diferencia de potencial de dos puntos viene dada por el trabajo realizado por las fuerzas del campo al trasladar una carga positiva unidad del primer punto al segundo.*

De la ecuación (9) se puede determinar la unidad de medición de la diferencia de potencial. En el sistema *CGSE*, por unidad de diferencia de potencial se tomará la diferencia de potencial que hay entre dos puntos en que, al trasladar de uno a otro una carga unidad, se efectúa un trabajo de un ergio. Esta unidad se denomina unidad electrostática de diferencia de potencial. En el sistema internacional

www.elsolucionario.org

de unidades, por unidad de diferencia de potencial se toma la diferencia de potencial entre dos puntos en que, al trasladar de uno a otro una carga de un culombio, se efectúa un trabajo de un julio. Esta unidad de diferencia de potencial se denomina *voltio*. Como, aproximadamente, 1 $C=3\cdot10^9$ unid. *CGSE*, con el mismo grado de exactitud tenemos que:

1 voltio $=\frac{1}{300}$ unidades electrostáticas de diferencia de potencial.

Las dimensiones de la diferencia de potencial en el sistema *CGSE* se obtienen de la ecuación (9):

$$[V_1-V_2]=\frac{[A]}{[q]}=\frac{ML^2T^{-2}}{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}=M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}.$$

Observemos que la ecuación (9) relaciona el trabajo de desplazamiento de las cargas solamente con la diferencia de potencial. Esto determina el que podamos tomar, en consonancia con la fórmula (5), como potencial una carga puntual, un número infinito de funciones que se diferencien una de otra en la constante aditiva C. La diferencia de potencial no varía con la elección de diferentes C.

Así tenemos que la constante C se puede elegir arbitrariamente. El caso más simple lo obtenemos haciendo $C=0$; entonces el potencial de la carga puntual q, en un punto a la distancia r será:

$$V=\frac{q}{r}. \tag{5a}$$

El potencial, por definición, es una magnitud escalar. Al elegir la constante aditiva $C=0$, el potencial de una carga puntual adquiere el siguiente sentido físico; *el valor numérico del potencial de un punto dado del campo es igual al trabajo que realizan las fuerzas del campo al trasladar una carga positiva unidad desde el punto dado hasta el infinito, donde el potencial es cero*. Efectivamente, el trabajo de traslación de una carga unidad desde el punto dado del campo hasta el infinito será:

$$A_0=\frac{A}{q_0}=\frac{q}{r}-\frac{q}{\infty}=\frac{q}{r}.$$

Cuando operamos con sistemas complejos de cargas, elegiremos en lo posible, el valor de cualquier constante que entre en la expresión del potencial, de manera que el potencial de los puntos infinitamente alejados del sistema sea igual a cero *). En este caso, el valor numérico del potencial del punto dado será igual al trabajo A_0

*) Esta elección arbitraria de la constante siempre se puede realizar, si el sistema cargado tiene dimensiones finitas.

realizado por las fuerzas del campo que actúan sobre la carga al trasladar la carga unidad desde el punto dado hasta el infinito. En los casos prácticos, en los cuales nos interesa generalmente la diferencia de potencial, con frecuencia es preferible considerar igual a cero el potencial de la superficie terrestre.

Veamos ahora el caso general de traslación de una carga q_0 en un campo electrostático cualquiera caracterizado por una intensidad del campo E. En un traslado infinitamente pequeño se realiza el trabajo:

$$dA = f \cos \alpha ds.$$

Teniendo en cuenta que $f = q_0 E$, tendremos que el trabajo elemental dA será:

$$dA = q_0 E \cos \alpha ds.$$

Pero $E \cos \alpha$ es la proyección del vector intensidad **E** en la dirección tangente a la trayectoria en el punto dado (fig. 35). Denominando E_s a esta proyección tenemos:

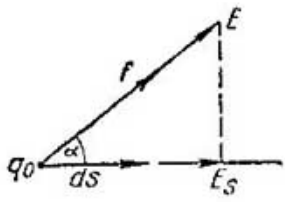


Fig. 35. Determinación del trabajo elemental dA.

$$dA = q_0 E_s ds.$$

El trabajo A realizado en un trayecto finito lo obtendremos integrando esta ecuación:

$$A = \int_A^B q_0 E_s \, ds,$$

donde la integral se toma en los límites correspondientes al punto inicial del trayecto A y al punto final del mismo B. Según lo dicho el valor numérico de este trabajo es igual al producto de la magnitud de la carga q_0 por la diferencia de potencial de los puntos A y B, de donde:

$$\int_A^B q_0 E_s \, ds = q_0 (V_A - V_B).$$

Sacando de la integral el valor de la carga q_0, como magnitud constante, y reduciendo tenemos:

$$\int_A^B E_s ds = V_A - V_B.$$

Para una trayectoria cerrada $V_A = V_B$ y, por consiguiente,

$$\int_s E_s ds = 0, \qquad (10$$

donde la integración se extiende a todo el contorno cerrado.

La integral curvilínea en un contorno cerrado $E_s ds$ es el límite de la suma $\Sigma E_s \Delta s$ de todos los elementos Δs del contorno cerrado cuando los elementos Δs tienden a cero y su número crece infinitamente. Esta integral se denomina circulación del vector de intensidad del campo electrostático. La fórmula (10 es la expresión matemática de que en un campo electrostático, el trabajo de las fuerzas eléctricas por un contorno cerrado es igual a cero. La circulación del vector de intensidad del campo electrostático es igual a cero. Como el campo el

que el trabajo de las fuerzas a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a cero, se denomina campo potencial, se puede decir que la ecuación (10) expresa el carácter potencial del campo electrostático.

§ 130. Superficies equipotenciales. El potencial de un campo electrostático es una función que varía de un punto a otro. No obstante, en todo caso real se puede determinar un conjunto de puntos de igual potencial.

El lugar geométrico de los puntos de igual potencial lo llamaremos *superficie equipotencial*.

Está claro que el trabajo de traslación de una carga por una superficie equipotencial será igual a cero.

Como ilustración veamos la superficie equipotencial de una carga puntual. El potencial de una carga puntual, como se ha demostrado, es:

$$V = \frac{q}{r}, \qquad (1)$$

donde r es la distancia del punto en que se calcula el potencial de la carga q. Por consiguiente, la superficie equipotencial será una superficie de valor r constante, es decir, una esfera de centro en la carga puntual (fig. 36).

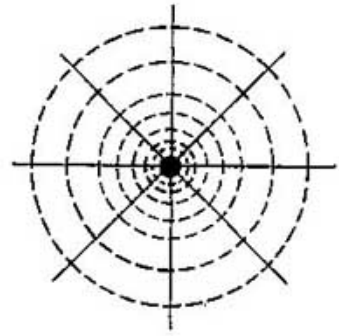


Fig. 36. Superficies equipotenciales (líneas de puntos) y líneas de fuerza (de trazo continuo) de una carga puntual.

La disposición de las superficies equipotenciales frecuentemente se puede determinar por razones de simetría, sin recurrir a la expresión matemática del potencial, basándose en que el trabajo de traslación de una carga por una superficie equipotencial es igual a cero. Por ejemplo, para determinar las superficies equipotenciales creadas por una esfera uniformemente cargada, observemos que el campo creado por la esfera tiene una simetría esférica, por consiguiente, el trabajo realizado por las fuerzas del campo al trasladar una carga positiva unidad por una superficie esférica de cualquier radio es igual a cero. De ello deducimos que las superficies equipotenciales serán, también en este caso, esferas concéntricas con la esfera cargada. El mismo resultado se obtiene para una esfera conductora cargada. En ambos casos, el potencial fuera de la esfera y en su superficie lo determinará la fórmula (1).

Si la carga puntual, o la carga de la esfera, es positiva, las fuerzas del campo que actúan sobre la carga, efectuarán un trabajo positivo

www.elsolucionario.org

al alejar una carga positiva unidad desde el origen del campo. En este caso, por consiguiente, el valor numérico de los potenciales de las superficies equipotenciales disminuirá con el aumento del radio. Si la carga puntual, o la de la esfera, es negativa, al alejarse del origen del campo la carga positiva, las fuerzas del campo realizarán un trabajo negativo. En este caso, el valor de los potenciales de las superficies equipotenciales será negativo y a medida que aumente el radio, aumentarán los potenciales (disminuyendo en valor absoluto).

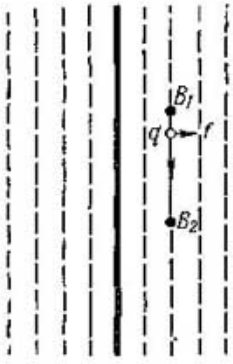


Fig. 37. Superficies equipotenciales de un plano infinito cargado.

Sea un plano infinito uniformemente cargado. El campo creado por este plano es uniforme y las líneas de fuerza son normales al plano. De esto se deduce que el trabajo de traslación de una carga desde un punto determinado B_1 (fig. 37) a otro punto cualquiera B_2 que se halle a la misma distancia del plano cargado que el punto B_1, será igual a cero.

Por consiguiente, el potencial de estos puntos es el mismo:

$$V_{B_1} = V_{B_2},$$

así tenemos que las superficies equipotenciales son planos paralelos al plano cargado. Si el plano está cargado positivamente, el valor del potencial disminuirá a medida que nos alejemos del plano cargado. Está claro que las superficies equipotenciales estarán dispuestas simétricamente a ambos lados del plano cargado.

En todos los casos particulares que hemos examinado, el vector de intensidad del campo es perpendicular a las superficies equipotenciales. Demostremos que esto es justo también para el caso general. Sea una superficie equipotencial. Examinemos el trabajo que se realiza al trasladar una carga un pequeño trayecto Δs por la superficie equipotencial. En este caso, por definición, el trabajo de la fuerza eléctrica, $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$, en el trayecto dado será:

$$\Delta A = f \Delta s \cos \alpha = qE \Delta s \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre la dirección de la fuerza f y el trayecto Δs. Por otro lado este trabajo es igual a cero, ya que es igual a cero la diferencia de potencial de dos puntos de una superficie equipotencial.

Por consiguiente tenemos:

$$qE \Delta s \cos \alpha = 0,$$

Debido a que ni la carga q, ni la intensidad del campo E, ni el trayecto Δs son iguales a cero, el coseno del ángulo α entre la dirección de la fuerza f y el trayecto Δs debe ser igual a cero; de donde nos da que la fuerza f es perpendicular al trayecto Δs. El sentido de la fuerza $\mathbf{f}=q\mathbf{E}$ coincide con el de la intensidad del campo (cuando $q>0$), o es opuesto al de la misma (cuando $q<0$). Por lo tanto, la igualdad $\cos\alpha=0$ significa que la dirección de la intensidad del campo es perpendicular a las superficies equipotenciales.

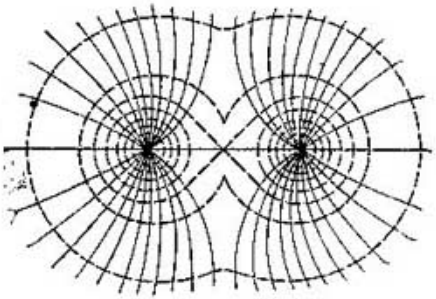


Fig. 38. Superficies equipotenciales (líneas de puntos) y líneas de fuerza (de trazo continuo) de dos cargas puntuales de un mismo signo.

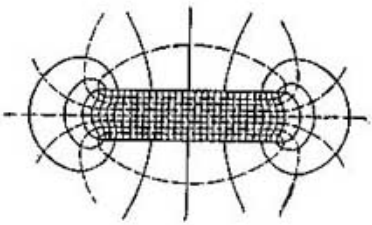


Fig. 39. Superficies equipotenciales (líneas de puntos) y líneas de fuerza (de trazo continuo) de dos discos cargados y de signo contrario.

Así tenemos que *las líneas de fuerza son una familia de líneas normales (ortogonales) a la familia de superficies equipotenciales.* En la fig. 38 vienen representadas las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales para el caso de dos cargas puntuales numéricamente iguales y del mismo signo, y en la fig. 39, para dos discos cargados y de signo contrario, pero de densidades superficiales numéricamente iguales.

§ 131. Relación entre la intensidad del campo electrostático y el potencial. Establezcamos ahora la relación entre el potencial y la intensidad del campo. La existencia de esta relación se deduce del hecho de que el trabajo de las fuerzas eléctricas en función de la intensidad del campo, se puede expresar también en función de la diferencia de potencial de los puntos del campo.

Sea un campo electrostático cualquiera. Tracemos en él dos superficies equipotenciales cercanas. Sea V el potencial de una de estas superficies, y $V+\Delta V$, el de la otra. Supongamos que $\Delta V>0$ (fig. 40). En determinado punto B de la superficie equipotencial V trazamos una normal $\mathbf{n}$ a la superficie en el sentido hacia donde el potencial aumenta. El punto de intersección de la normal $\mathbf{n}$ con la su-

perficie equipotencial $V-\Delta V$ lo designaremos con la letra B'. Sea Δn la distancia entre los puntos B y B'. La intensidad del campo **E** es perpendicular a la superficie equipotencial, es decir, va dirigida según la normal **n**, y debido a la proximidad de los puntos B y B', se puede considerar constante en toda esta distancia entre los puntos. Entonces, el trabajo de traslación de cierta carga q desde el punto B al punto B' se expresará de la siguiente manera:

$$A = qE\Delta n.$$

Por otro lado, este mismo trabajo A se puede expresar en función de

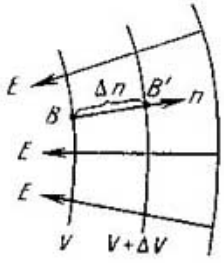


Fig. 40. Normal n a dos superficies equipotenciales próximas.

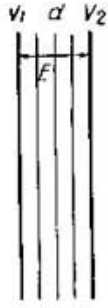


Fig. 41. Dos planos cargados.

la diferencia de potencial de los puntos B y B':

$$A = q\,[V-(V+\Delta V)].$$

Comparando ambas ecuaciones del trabajo A, hallamos que:

$$E\cdot\Delta n = -\Delta V.$$

que nos da para E la siguiente ecuación:

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta n}. \qquad (1)$$

El signo menos indica que la intensidad del campo **E** va en sentido contrario al de la normal **n**. Efectivamente, la normal **n** la hemos trazado en el sentido en que aumenta el potencial, mientras que la intensidad del campo **E**, por definición, va en el sentido en que actúe la fuerza sobre la carga positiva, es decir, hacia donde disminuye el potencial. Si en la fórmula (1) suponemos $\Delta n=1$, obtenemos que *el valor numérico de la intensidad del campo es igual a la variación del potencial por unidad de longitud en dirección perpendicular a la superficie equipotencial en el sentido hacia donde disminuye el potencial.*

www.elsolucionario.org

La magnitud $\Delta V/\Delta n$, que indica la velocidad de variación del potencial en la traslación dirigida perpendicularmente a las superficies equipotenciales en el sentido de su aumento, se llama *gradiente del potencial*. Utilizando el concepto de gradiente del potencial, la ecuación (1) se puede formular así: el *valor numérico de la intensidad del campo es igual al gradiente del potencial*.

Veamos el siguiente ejemplo.

Determinemos la intensidad del campo electrostático entre dos planos paralelos que tienen un potencial constante.

Sean dos planos paralelos infinitos de potenciales V_1 y V_2. La distancia entre los planos es igual a d (fig. 41). Por razones de simetría deducimos que las superficies equipotenciales son planos paralelos a los dados.

La intensidad del campo electrostático es la misma para todos los puntos que se hallan entre los planos cargados y de dirección perpendicular a ellos. El valor numérico de la intensidad del campo lo obtenemos hallando la variación del potencial por unidad de longitud en dirección perpendicular a las superficies equipotenciales:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \qquad (2)$$

La intensidad del campo va en sentido de la disminución del potencial. De esta manera, la intensidad del campo entre dos planos paralelos de potencial determinado es directamente proporcional a la diferencia de sus potenciales e inversamente proporcional a la distancia entre ellos.

En el caso de un campo variable, la magnitud algebraica de la intensidad del campo E en el punto dado la debemos considerar igual al límite a que tiende la relación $-\Delta V/\Delta n$ cuando Δn disminuye infinitamente:

$$E = -\lim_{\Delta n \to 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta n}\right),$$

o, utilizando las notaciones del cálculo diferencial:

$$E = -\frac{dV}{dn}. \qquad (2a)$$

Utilicemos el concepto de *gradiente* que se da en el cálculo vectorial. Sea una magnitud escalar C en función de las coordenadas x, y, z. Por grad C se entiende un vector **A**, cuyas componentes A_x, A_y, A_z según los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas, vienen determinadas por las relaciones:

$$A_x = \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad A_y = \frac{\partial C}{\partial y}, \qquad A_z = \frac{\partial C}{\partial z}. \qquad (3)$$

Resulta que este vector va dirigido, en cada punto dado según la normal a la superficie equipotencial de la escalar C en el sentido del aumento de C. Su longitud es igual a dC/dn. Utilizando el concepto de gradiente, la ecuación (2a) se

puede escribir de la manera siguiente:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{4}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V. \tag{4a}$$

De esta manera tenemos que el vector de intensidad del campo **E** es igual al gradiente del potencial V tomado con signo contrario.

Ejemplo 1. Determinemos la intensidad del campo en el eje de un dipolo a una distancia r, grande en comparación con las propias dimensiones del dipolo.

Este problema ya lo hemos resuelto directamente en el § 124. Utilizando la relación de la (2a) entre la intensidad del campo y el potencial, resolveremos este problema de una manera más sencilla. El potencial en el punto A (fig. 12) es igual a la suma de potenciales creados por las cargas $+q$ y $-q$:

$$V = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} = q\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = q\frac{l}{r_+ r_-}.$$

A distancias r_+ y r_- mucho mayores que l, tenemos aproximadamente que $r_+ \cdot r_- = r^2$, de donde

$$V = \frac{ql}{r^2} = \frac{p}{r^2},$$

donde p es el momento del dipolo.

La dirección de la normal n a la superficie equipotencial en el punto A coincide con r, por consiguiente, según la (2a):

$$E = -\frac{dV}{dr} = \frac{2p}{r^3},$$

que coincide con la fórmula (5) del § 124.

§ 132. Relación entre la intensidad del campo, el potencial y la densidad volumétrica de las cargas. Entre la tensión del campo electrostático y la densidad de las cargas hay una relación diferencial que es justa para cada punto del campo. Esta relación se puede hallar mediante un análisis más detallado del teorema de Ostrogradski-Gauss.

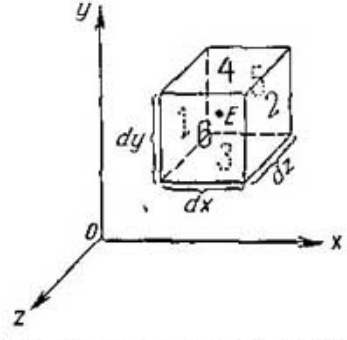


Fig. 42. Representación gráfica para deducir la relación entre la intensidad del campo y la densidad volumétrica de las cargas.

Supongamos que en la región que estamos examinando, la carga está distribuida con una densidad volumétrica de ρ, que no es constante. Sea un volumen elemental de aristas dx, dy, dz paralelas a los ejes de coordenadas (fig. 42). El volumen del cubo es igual a $dx\,dy\,dz$. Debido a la pequeñez del cubo, se puede considerar que la densidad ρ de la carga es constante en todos los puntos del interior del cubo; por lo tanto, la carga q que se halla en el interior del cubo, será igual a $\rho\,dx\,dy\,dz$. La intensidad del campo en el centro del cubo (marcado con un asterisco en la fig. 42), la llamaremos **E**, y sus componentes, E_x, E_y y E_z.

Entonces, el valor de la componente E_x en la cara *1* será:

$$E_{x_1} = E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx,$$

ya que la coordenada x de la cara *1* es $\frac{1}{2} dx$ menor que la del centro del cubo. De la misma manera, para la componente E_{x_2} en la cara *2* obtenemos:

$$E_{x_2} = E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx.$$

Igualmente, para las componentes E_y y E_z en las cuatro caras restantes del cubo, obtenemos:

$$E_{y_3} = E_y - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, \qquad E_{z_4} = E_z - \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz,$$

$$E_{y_4} = E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy, \qquad E_{z_5} = E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{2} dz.$$

Apliquemos a nuestro cubo el teorema de Ostrogradski-Gauss. Para ello calculemos el flujo eléctrico a través de las caras del cubo. Recordemos que el flujo eléctrico dN a través de la superficie dS es igual al producto de la componente de la intensidad del campo E normal a la superficie, por el área de la superficie dS. La normal a la cara *1* va dirigida hacia el sentido negativo del eje OX, por eso la componente de la intensidad del campo E normal a la cara *1* será igual a $-E_{x1}$. El área de la cara *1* es igual a $dy\ dz$, de donde el flujo eléctrico a través de la cara *1* será igual a:

$$dN_1 = -E_{x_1}\, dy\, dz = -E_x\, dy\, dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx\, dy\, dz.$$

La normal a la cara *2* va dirigida en el sentido del eje positivo OX, por eso, el flujo eléctrico a través de ella será:

$$dN_2 = +E_{x_2}\, dy\, dz = E_x\, dy\, dz + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} dx\, dy\, dz.$$

La suma de los flujos a través de las caras *1* y *2* será:

$$dN_1 + dN_2 = \frac{\partial E_x}{dx} dx\, dy\, dz.$$

De la misma manera obtenemos que la suma de los flujos eléctricos a través de las caras *3* y *4* es:

$$dN_3 + dN_4 = \frac{\partial E_y}{\partial y} dx\, dy\, dz,$$

y a través de las caras 5 y 6:

$$dN_5 + dN_6 = \frac{\partial E_z}{\partial z} dx\, dy\, dz.$$

El flujo total a través de las seis caras del cubo será:

$$dN = dN_1 + dN_2 + dN_3 + dN_4 + dN_5 + dN_6 = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz. \qquad (1)$$

Según el teorema de Ostrogradski-Gauss, $dN = 4\pi q$, donde q es la carga encerrada en el interior del cubo; pero esta carga es igual a $\rho\, dx\, dy\, dz$, de donde

www.elsolucionario.org

utilizando la ecuación (1) de la dN, obtenemos que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=4\pi\rho. \qquad (2)$$

La fórmula (2) nos da la relación buscada entre la densidad volumétrica ρ de las cargas y las derivadas del vector de intensidad del campo **E**. Como se sabe del cálculo vectorial, la suma de las derivadas de las componentes de un vector según los correspondientes ejes de coordenadas se denomina divergencia del vector y se denota así:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Utilizando la notación div **E**, escribimos la fórmula (2) de la manera siguiente:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho.$$

Utilicemos las fórmulas (4) de la pág. 54 que nos dan la relación entre las componentes de la intensidad del campo **E** y las derivadas del potencial según las coordenadas:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

La derivada segunda de estas expresiones según las coordenadas será:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y}=-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z}=-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

Poniendo este valor de la suma $\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$ en la (2), hallamos que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho. \qquad (3)$$

Esta fórmula nos da la relación entre la densidad volumétrica de las cargas ρ y las segundas derivadas del potencial según las coordenadas. La suma de las segundas derivadas de una función $F(x, y, z)$ según las variables x, y, z, se ha establecido denominar con el símbolo $\Delta F(x, y, z)$, donde Δ se denomina laplaciana u operador laplaciano. Introduciendo esta notación en la fórmula (3) obtenemos:

$$\Delta V=-4\pi\rho. \qquad (3a)$$

Esta ecuación es la ecuación diferencial fundamental del potencial electrostático.

§ 133. Conductores en el campo electrostático. Como ya se ha indicado en el § 122, el conductor es un cuerpo que tiene electrones libres cuyas cargas están compensadas con las cargas positivas ligadas a la red cristalina del conductor. Los electrones libres del conductor, bajo la acción de fuerzas eléctricas de dirección determinada, adquieren una velocidad en el mismo sentido en que actúan las fuerzas

y, por consiguiente, pueden desplazar cargas eléctricas, es decir, crear una corriente eléctrica. Si nosotros nos limitamos a los problemas electrostáticos, debemos poner en claro las condiciones de equilibrio de las cargas. La condición indispensable de equilibrio de las cargas en el interior del conductor es la igualdad a cero de la intensidad del campo electrostático. Si la intensidad del campo no fuese igual a cero, crearía fuerzas eléctricas que originarían traslaciones orientadas de electrones. Así tenemos que la condición del carácter electrostático del problema es:

$$E = 0, \qquad (1)$$

pero esta condición tiene que cumplirse en todos los puntos dentro del conductor.

La condición (1) lleva a la conclusión de que en un conductor cargado, las cargas libres (no compensadas) pueden localizarse solamente en su superficie. Para demostrar esto, apliquemos el teorema de Ostrogradski-Gauss a una superficie cualquiera que encierre determinado volumen *dentro* del conductor. En todos los puntos de esta superficie, la intensidad del campo electrostático, según la (1), es igual a cero, ya que la superficie la hemos trazado *dentro* del conductor. Por consiguiente, el flujo eléctrico a través de la superficie es igual a cero, por lo tanto también es igual a cero la carga total que se halla dentro de la superficie considerada. Como la superficie ha sido elegida arbitrariamente, el resultado es aplicable a cualquier región del interior de un conductor. Así tenemos que en cualquier zona del interior de un conductor situado en un campo electrostático, la carga es igual a cero. Las cargas, en el conductor cargado, se ubican solamente en la superficie del conductor.

La ausencia de cargas en las partes internas del conductor es una consecuencia del teorema de Ostrogradski-Gauss que, a su vez, se deriva de la ley de Coulomb, por la cual las fuerzas de acción recíproca de las cargas puntuales son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre ellas. Si en la ecuación que expresa la ley de Coulomb

$$f = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

el exponente de r no fuese igual a 2, sino a otro número cualquiera n, en las partes internas del conductor habría cargas. Así tenemos que la ausencia de cargas dentro del contuctor es una confirmación indirecta de la veracidad de la ley de Coulomb. Las mediciones directas de Coulomb con la balanza de torsión (§123) no eran muy exactas. Realizarlas con mayor exactitud es muy difícil, ya que difícilmente se pueden crear las condiciones para que con un grado de exactitud bastante elevado se puedan considerar puntuales las cargas. La ausencia de cargas dentro del conductor se puede establecer

con mucha mayor exactitud. Una comprobación de esta clase la realizó Cavendish, el cual, en 1773, es decir 12 años antes que Coulomb, estableció la ley de la razón inversa de las fuerzas eléctricas respecto al cuadrado de la distancia. Pero los trabajos de Cavendish no se conocieron hasta 1879, año en que los publicó Maxwell.

Maxwell repitió los experimentos de Cavendish con más exactitud y de manera un poco distinta.

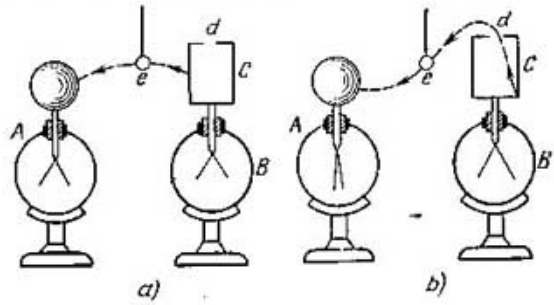


Fig. 43. Experimento con la caja de Faraday.

Maxwell dispuso dos esferas conductoras, una dentro de la otra, y las puso en contacto con un alambre conductor. Al comunicarle a la esfera exterior una carga, la interior permanecía descargada, lo cual Maxwell lo pudo establecer con gran exactitud; y encontró que el exponente n de la ley de Coulomb no podía diferir de 2 en una fracción mayor de 1/20 000.

Como veremos más adelante, las cargas no sólo no se hallan dentro del conductor, sino que tampoco las hay en la superficie interna de todo conductor hueco. En la teoría general de los fenómenos electrostáticos se demuestra que la intensidad del campo **E** dentro de la cavidad de un conductor cargado, es decir, debajo de la capa superficial, también es igual a cero. En este caso se sobrentiende que en el interior no haya otros cuerpos cargados.

La propiedad de las cargas de distribuirse en la superficie exterior del conductor se puede demostrar de manera muy convincente. Sean dos electroscopios A y B, uno de los cuales lleva atornillado un cilindro hueco casi cerrado C (fig. 43), teniendo solamente en la parte superior un pequeño orificio d. Este cilindro se denomina caja de Faraday. Comuniquemos al electroscopio B una carga determinada, lo cual se revela en que se separan las hojas del electroscopio. Tomemos una pequeña esfera e sujeta a un hilo de material aislante. Tocando con la esfera e la parte exterior de la caja de Faraday C, cargamos la esfera; después, según el trayecto indicado por la línea de puntos de la fig. 43, a, la ponemos en contacto con el electroscopio A. Con ello le comunicamos al electroscopio A cierta carga. Repitien-

www.elsolucionario.org

do este traslado varias veces se puede obtener una sensible separación de las hojas del electroscopio A. Si en vez de hacer estas operaciones, ponemos en contacto la esfera e con la parte *interna* de la caja de Faraday C (fig. 43, *b*) no le comunicaremos a la esfera ninguna carga ni podremos cargar el electroscopio A.

El experimento descrito es reversible. Sea un cuerpo A (fig. 44) de potencial constante V mantenido por una fuente de energía. Carguemos la esfera e poniéndola en contacto con el cuerpo A y, después, acerquémosla al electroscopio B poniéndola en contacto con la parte interna de la caja de Faraday C. Como la esfera, en este caso, es una componente de las partes internas de un cuerpo complejo formado por ella y la caja de Faraday, en la esfera no deben conservarse las cargas. En otras palabras, la esfera transmite *por entero* su carga al electroscopio B. Podemos repetir este traslado las veces que se quiera y veremos que la esfera siempre transmite toda su carga al electroscopio, ya que la condición de que no haya cargas en las partes internas de un conductor, no depende ni de la magnitud de su carga ni de su potencial. Así tenemos que transportando la esfera e un número bastante elevado de veces podemos cargar el electroscopio B hasta un potencial *mayor* que V del cuerpo A, del cual tomamos las cargas. En principio, repitiendo esta traslación infinito número de veces, podemos elevar el potencial del electroscopio B hasta el infinito * . Prácticamente, el aumento del potencial lo limita la fuga de cargas, la cual aumenta con el potencial. El esquema de este experimento con la caja de Faraday se utiliza en el moderno generador de alto voltaje, que permite alcanzar diferencias de potencial de varios millones de voltios (véase el t. III).

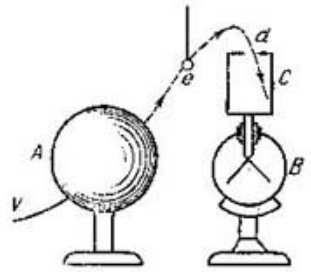


Fig. 44. Experimento con la caja de Faraday.

La ausencia de campo en la cavidad interna del conductor permite crear la *protección electrostática* (*pantalla*). Un conductor que rodee por todos los lados a una cavidad, la protege contra los campos electrostáticos creados por las cargas exteriores. Prácticamente, el conductor macizo se puede sustituir por una red metálica bastante tupida. A fin de crear una protección electrostática, las hojas del electroscopio se colocan en el interior de una caja metálica (véase lo dicho en la pág. 12). La caja se une a tierra, entonces

* En el § 137 veremos que la energía de un cuerpo cargado aumenta con el aumento del potencial V. De aquí que pueda parecer que este experimento con la caja de Faraday contradiga a la ley de la conservación de la energía. No obstante no es así: en la traslación de la esfera e hacia la caja de Faraday hay que invertir un trabajo, que será tanto mayor cuanto mayor sea la carga de la caja

ces adquiere el potencial de la Tierra y los campos exteriores no pueden variar ni el campo ni el potencial del interior de la caja. Las hojas del electroscopio que se cargan deben estar aisladas de la caja. Si las unimos a la caja con un conductor, será imposible comunicarles carga alguna y no se separarán cualesquiera que fueren las fuentes de electrización que tuviésemos fuera de la caja del electroscopio.

§ 134. Intensidad del campo en las proximidades de la superficie de un conductor. Debido a que la intensidad del campo dentro de un conductor es igual a cero, éste es una especie de zona de potencial constante. Efectivamente, el valor numérico de la intensidad del campo es igual a la variación del potencial por unidad de longitud normal a la superficie equipotencial. De aquí, siendo igual a

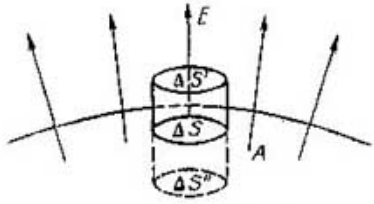


Fig. 45. Intensidad del campo E en las proximidades de la superficie de un conductor cargado.

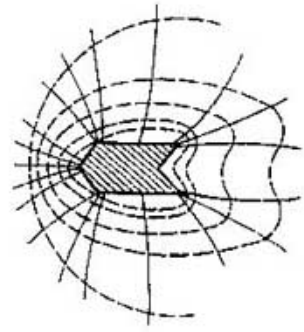


Fig. 46. Disposición de las superficies equipotenciales (líneas de puntos) y de las líneas de fuerza (de trazo continuo) de un cuerpo con salientes y entrantes.

cero el campo en todos los puntos del conductor, nos da que la variación del potencial es igual a cero en todos los puntos del conductor; por lo tanto, el valor del propio potencial será constante. De esto se deduce que *todos los puntos de un conductor, tanto en el interior como en la superficie, tienen un mismo potencial*. De donde se infiere que la superficie de un conductor es una superficie equipotencial. Como la intensidad del campo electrostático en cada punto dado es normal a la superficie equipotencial en este punto, *la intensidad del campo electrostático fuera del conductor en las proximidades a su superficie, es normal a la superficie del conductor*.

Hay una relación determinada entre la intensidad del campo electrostático en las proximidades de la superficie del conductor y la densidad superficial de cargas en su superficie. Establezcamos esta relación utilizando el teorema de Ostrogradski-Gauss. Sea una pequeña área ΔS en la superficie de un conductor cargado A (fig. 45). Supongamos que la densidad superficial de la carga en esta

área se pueda considerar constante e igual a σ. Entonces, la carga q que corresponde a esta área será:

$$q = \sigma \cdot \Delta S. \tag{1}$$

Tracemos mentalmente una pequeña superficie cilíndrica cerrada S de generatrices normales a la superficie del conductor y de bases $\Delta S'$ y $\Delta S''$, paralelas a ΔS. Según el teorema de Ostrogradski-Gauss, el número de líneas de fuerza que atraviesan la superficie cerrada S, es igual a $4\pi q$. Como en el interior del conductor, donde está la base $\Delta S''$, la intensidad del campo $E=0$ y la superficie lateral es paralela a E, todas las $4\pi q$ líneas de fuerza pasarán a través de la base $\Delta S'$. Llamando E a la intensidad del campo en los límites de esta base $\Delta S'$, tenemos que:

$$E \cdot \Delta S' = 4\pi q,$$

de donde, utilizando la relación (1) y observando que $\Delta S' = \Delta S$, hallamos que:

$$E = 4\pi\sigma. \tag{2}$$

De la ecuación (2) se ve que la intensidad del campo electrostático en las proximidades de un conductor es directamente proporcional a la densidad superficial de carga.

En los casos en que la superficie exterior del conductor tenga salientes, las superficies equipotenciales que pasan cerca del conductor, se acercarán a los salientes. En estos lugares la intensidad del campo será mayor, ya que en ellos, la variación del potencial por unidad de longitud, es mayor. Así tenemos que en los salientes la intensidad del campo eléctrico será mayor y, por consiguiente, mayor será la densidad superficial de carga en los mismos salientes. En la fig. 46 se representa un cuerpo conductor cargado, con salientes y entrantes; la intensidad del campo en el espacio que lo rodea, es máxima en las proximidades de los salientes y mínima, en los entrantes. Las superficies equipotenciales representadas en la fig. 46 por líneas de puntos, son más densas en los lugares donde el campo es más intenso. En correspondencia con ello, la densidad superficial de carga del cuerpo, tendrá valores máximos en los salientes y mínimos, en los entrantes.

En las regiones internas, la intensidad del campo será igual a cero y, en correspondencia con ello, la densidad de la carga en las superficies internas de los conductores, también será igual a cero.

Sobre todo es intenso el campo en las proximidades de los salientes muy agudos. Esto hay que tenerlo en cuenta al cargar conductores a grandes potenciales: si hay ángulos o salientes agudos, cerca de ellos puede tener lugar una perforación del dieléctrico que le rodea (en un caso particular, el aire) y empezar la descarga, que es el

www.elsolucionario.org

llamado *efecto corona* (*efluvio eléctrico*); por eso, todas las partes metálicas de instrumentos y aparatos que se cargan a altos potenciales, se les da forma redondeada y las superficies se hacen lisas.

Todo sector de superficie cargada de un conductor se halla en un campo electrostático formado por la parte restante de la superficie del conductor cargado.

Por esto, sobre cada sector ΔS (fig. 47) de un conductor cargado actúa una fuerza

$$\Delta f = \sigma \Delta S \cdot E_1, \tag{3}$$

donde E_1 es la intensidad del campo creado por el resto de la superficie del conductor.

Para determinar E_1 examinemos el campo que crea el elemento ΔS en los puntos muy próximos a su superficie. Este campo es normal a la superficie del elemento ΔS y simétrico a ambos lados del mismo.

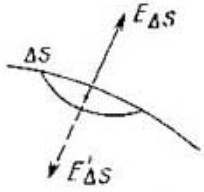


Fig. 47. Intensidad del campo creado por un elemento de superficie de un conductor cargado.

La intensidad de este campo a ambos lados del elemento ΔS viene representada en la fig. 47 por las flechas $E_{\Delta S}$ y $E'_{\Delta S}$.

La intensidad total $\mathbf{E}$ creada por toda la superficie del cuerpo cargado en las proximidades de ΔS, *fuera* del cuerpo, naturalmente será igual a la suma de las intensidades $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_{\Delta S}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{\Delta S}.$$

Como los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{E}_{\Delta S}$ son perpendiculares a la superficie del elemento ΔS, el vector $\mathbf{E}_1$ también será perpendicular a ΔS, por consiguiente, esta última igualdad se puede escribir en forma algebraica

$$E = E_1 + E_{\Delta S}.$$

De la ecuación (2) sabemos que $E = 4\pi\sigma$, de donde:

$$E_1 + E_{\Delta S} = 4\pi\sigma. \tag{4}$$

De la misma manera obtenemos que el campo junto a la superficie del elemento ΔS dentro del cuerpo es *igual* a la suma $E_1 + E'_{\Delta S} = E_1 - E\Delta S$. Como dentro del cuerpo la suma de las intensidades del campo es igual a cero, tenemos que

$$E_1 - E_{\Delta S} = 0 \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) hallamos que:

$$E_1 = E_{\Delta S} = 2\pi\sigma,$$

después de lo cual, la ecuación (3) nos da la fuerza buscada que actúa sobre el elemento superficial del cuerpo cargado:

$$\Delta f = 2\pi\sigma^2 \cdot \Delta S,$$

o, teniendo en cuenta la (2):

$$\Delta f = \frac{E^2}{8\pi}\Delta S.$$

Como las cargas de un mismo signo se repelen, la fuerza Δf, independientemente del signo de la carga del conductor, va dirigida hacia fuera del conductor.

§ 135. El dipolo en un campo eléctrico exterior. Examinemos el dipolo en un campo eléctrico exterior *uniforme* **E**. Sea un dipolo de cargas $+q$ y $-q$ situadas a una distancia invariable l una de otra.

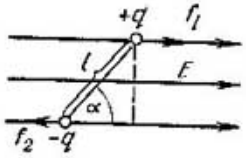


Fig. 48. Dipolo en un campo exterior uniforme.

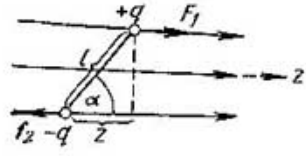


Fig. 49. Dipolo en un campo exterior variable (no uniforme).

El momento eléctrico de este dipolo, según lo dicho en el § 124, es $p=ql$. Sea α el ángulo que forma la dirección del dipolo con la de la intensidad del campo **E** (fig. 48). Sobre la carga positiva del dipolo actúa la fuerza $f_1=qE$, dirigida según el campo; y sobre la negativa, la fuerza $f_2=-qE$, de sentido contrario al campo. Estas fuerzas forman un par de momento $M=fl \operatorname{sen}\alpha=qlE \operatorname{sen}\alpha$. Teniendo en cuenta que $ql=p$, obtenemos que sobre un dipolo en un campo eléctrico exterior uniforme *actúa un par de fuerzas* con un momento

$$M = pE \operatorname{sen}\alpha. \qquad (1)$$

Accionado por este par, el dipolo tiende a girar y orientarse a lo largo de las líneas de fuerza.

El momento del dipolo **p** se puede considerar una magnitud vectorial. Para ello tracemos la distancia l como un vector dirigido desde la carga negativa $-q$, a la positiva $+q$. Determinemos el vector **p** de la ecuación:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}. \qquad (2)$$

Entonces tenemos que en un campo eléctrico exterior uniforme, el dipolo tiende a girar a manera que el sentido del vector de su

momento eléctrico **p** coincida con el de **E**. Esta posición corresponde al ángulo $\alpha = 0$ y, según (1), a la igualdad a cero del momento de fuerzas que actúan sobre el dipolo. Está claro que el momento de las fuerzas que actúan sobre el dipolo, será también igual a cero ($M = 0$) cuando $\alpha = \pi$. Sin embargo, esta última posición es inestable: a la menor desviación del dipolo surge un momento que lo inclina más apartándolo de esta posición.

Si al principio el dipolo formaba con las líneas de fuerza un ángulo α diferente de cero, al acercarse a la posición de equilibrio, naturalmente, adquirirá cierta velocidad de rotación y por inercia se pasará de la posición de equilibrio. Como resultado de la acción del momento de fuerzas M, el dipolo empezará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Si sobre el dipolo, además del momento de fuerzas M, actúan fuerzas de rozamiento, las oscilaciones serán amortiguadas, y el dipolo, al fin y al cabo, se orientará a lo largo de las líneas de fuerzas. Si las fuerzas de rozamiento son muy grandes, su movimiento puede ser aperiódico, es decir, el dipolo se aproxima según una asíntota a la posición de equilibrio disminuyendo gradualmente la velocidad hasta cero.

En el § 35 del t. I hemos visto que el momento de fuerzas **M** se puede considerar una magnitud vectorial, cuya dirección está relacionada con la dirección de las fuerzas, componentes del par, según la regla del sacacorchos. En la fig. 48, el vector **M** está dirigido perpendicularmente al plano del dibujo. La magnitud y el sentido vienen determinados por el producto vectorial de **p** y **E**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \tag{1a}$$

Estudiemos ahora el dipolo en un campo eléctrico exterior *variable* (*no uniforme*). En este caso, las líneas de fuerza serán convergentes o divergentes. No obstante, supondremos que dentro de los límites dimensionales del dipolo, la variación del campo es tan insignificante, que las fuerzas f_1 y f_2 que actúan sobre las cargas $+q$ y $-q$, se pueden considerar dirigidas en sentidos opuestos (según el eje Z y en sentido opuesto), y que la mayor variación de la intensidad del campo se produce según la dirección del eje Z. Estas fuerzas serán:

$$f_1 = +qE_1, \quad f_2 = -qE_2,$$

donde E_1 y E_2 son los valores de las intensidades del campo en los lugares donde están las cargas $+q$ y $-q$. La suma de estas fuerzas es:

$$f = f_1 + f_2 = q(E_1 - E_2). \tag{3}$$

Midamos la coordenada z paralelamente a las fuerzas, como se indica en la fig. 49. Entonces

$$E_1 - E_2 = \left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right) Z,$$

www.elsolucionario.org

donde $(\Delta E/\Delta z)$ es el gradiente de intensidad del campo. Observando que $Z=l\cos\alpha$, tenemos que

$$E_1 - E_2 = \left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right) l \cos\alpha.$$

Colocando este valor de E_1-E_2 en la (3), hallamos que:

$$f = ql\left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right)\cos\alpha$$

o

$$f = p\left(\frac{\Delta E}{\Delta z}\right)\cos\alpha. \qquad (4)$$

Así tenemos que en un campo eléctrico exterior variable, además del momento de fuerzas, sobre el dipolo *actúa una fuerza que será tanto mayor, cuanto mayor sea el gradiente del campo*, es decir, *cuanto mayor sea la variación del campo*. Según la ecuación (4), cuando $\alpha<\frac{\pi}{2}$, la fuerza f va dirigida en el sentido en que el valor de la intensidad del campo es mayor. Para los valores dados de p y de $(\Delta E/\Delta z)$, la fuerza f alcanzará su valor máximo cuando $\alpha=0$, es decir, cuando el dipolo se oriente a lo largo de las líneas de fuerza del campo. En definitiva tenemos que en un campo exterior, el dipolo tiende a girar orientándose a lo largo de las líneas de fuerza coincidiendo, del extremo negativo al positivo, con el sentido de las líneas de fuerza del campo E; además, sobre el dipolo actúa una fuerza más que es proporcional al momento del dipolo p y al gradiente de la intensidad del campo $(\Delta E/\Delta z)$. Esta fuerza traslada al dipolo hacia el lado donde la intensidad del campo es mayor.

La existencia de fuerzas que trasladan al dipolo hacia la región de mayor intensidad del campo, explica la atracción que ejerce un objeto de vidrio o ebonita electrizado sobre cuerpos ligeros que no han estado en contacto con el primero. Bajo la influenca del campo electrostático del vidrio o de la ebonita, en el cuerpo atraído surgen cargas inducidas que lo transforman en dipolo. Debido a la variación del campo del objeto electrizado, sobre este dipolo actúa una fuerza que lo traslada hacia la región donde el valor del campo es mayor, es decir, hacia el objeto electrizado (vidrio o ebonita), independientemente del signo de la carga.

§ 136. Capacidad eléctrica de los conductores. Pasemos a examinar una propiedad muy importante de los conductores, llamada *capacidad eléctrica* o simplemente *capacidad*. La experiencia nos dice que diferentes conductores, habiendo sido cargados de la misma cantidad de electricidad, adquieren distintos potenciales. Esto indica que se diferencian unos de otros por la propiedad física que caracteriza una magnitud denominada *capacidad*.

La capacidad de un conductor depende de la disposición de los cuerpos que lo rodean, por eso determinaremos primeramente el concepto de capacidad de un conductor individual, es decir, de un conductor en cuyas proximidades no haya otros cuerpos que puedan influir en la distribución de cargas en él. El potencial V de un conductor individual es proporcional a la magnitud de la carga Q, ya que al aumentar la carga un número determinado de veces, el mismo número de veces aumenta la intensidad del campo y, por consiguiente, el trabajo de traslación de una carga desde el conductor hasta el infinito:

$$Q = CV. \tag{1}$$

El coeficiente de proporcionalidad C depende de la forma y de la magnitud del conductor, y se llama *capacidad* del conductor. De la igualdad (1) tenemos que:

$$C = \frac{Q}{V}. \tag{2}$$

Esta relación indica que *la capacidad de un conductor individual es una magnitud física de valor igual a la cantidad de electricidad que hay que comunicar al conductor sin carga para que el potencial sea igual a la unidad* (si $V=1$, $C=Q$). En este caso consideramos que la constante indeterminada en la expresión del potencial se ha elegido de manera que los potenciales de los puntos infinitamente alejados del conductor, sean iguales a cero.

La dimensión de la capacidad se determina de la relación (2):

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}{M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}} = L,$$

es decir, tiene la *dimensión de longitud*. Por unidad de capacidad tomaremos la de un conductor individual cuyo potencial varía en una unidad al comunicarle una carga unidad. En el sistema *CGSE* será un conductor que al comunicarle una unidad *CGSE* de carga, varíe su potencial en una unidad *CGSE* de potencial. Es fácil de ver que esto será la capacidad de una esfera de 1 cm de radio. Efectivamente, el potencial de una esfera conductora es (véase el § 130):

$$V = \frac{Q}{R},$$

donde R es el radio de la esfera. Comparando esta ecuación con la fórmula (2), nos da que

$$C = R,$$

es decir, la capacidad de una esfera es numéricamente igual al radio de la misma. Por eso *en el sistema CGSE, por unidad de capacidad*

se toma la de una esfera individual de radio igual a 1 cm. En el sistema *CGSE* se ha establecido llamar *centímetro* a la unidad de capacidad.

En el sistema internacional de unidades, por unidad de capacidad se ha determinado tomar la de un conductor que, al aumentarle la carga en un culombio, acarrea un aumento de potencial de un voltio. Esta unidad se denomina *faradio*. La relación entre la unidad de capacidad del sistema *CGSE* y el faradio es la siguiente:

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} \cong \frac{3 \cdot 10^9 \text{ unidades } CGSE \text{ de carga}}{\frac{1}{300} \text{ unidades } CGSE \text{ de potencial}} \cong$$

$$\cong 9 \cdot 10^{11} \text{ unidades } CGSE \text{ de capacidad.}$$

Está claro que el faradio es una unidad excesivamente grande. Efectivamente, es la capacidad de una esfera de radio igual a $9 \cdot 10^{11}$ cm, es decir, de un radio de 9 millones de kilómetros (1 400 veces mayor que el radio de la esfera terrestre). Por eso, en la práctica se usa, junto con el faradio, una unidad menor denominada *microfaradio*, que es igual a una millonésima parte del faradio. La capacidad de un microfaradio la tiene una esfera individual de 9 km de radio, es decir, una esfera bastante grande aún.

La capacidad de un conductor depende de los cuerpos que lo rodean. Efectivamente, por capacidad de un conductor entendemos la magnitud física que mide la relación entre la carga del conductor y su potencial; mientras que el potencial del conductor depende no sólo de la carga del mismo, sino de la de los cuerpos que lo rodean. Incluso si los cuerpos que rodean al conductor dado, no han sido cargados de antemano, al cargar el conductor que examinamos, se cargan por influencia y, de esta manera, varían el potencial en el conductor dado. En este caso, el concepto de capacidad es natural generalizarlo introduciendo la siguiente definición que sirve también para los problemas dinámicos:

$$C = \frac{dQ}{dV};$$

la capacidad se define como la relación entre el incremento de la carga del conductor y el incremento de su potencial al tender a cero estos incrementos, es decir, como la derivada de la carga de un conductor respecto a su potencial. No obstante se puede construir un sistema de conductores de capacidad prácticamente independiente de los cuerpos que lo rodean; para ello, el sistema debe estar protegido contra la influencia de otros cuerpos. Los condensadores son un ejemplo de ello.

El denominado *condensador plano* consta de dos placas paralelas A y B (fig. 50), colocadas a una distancia d una de otra, distancia

www.elsolucionario.org

que es pequeña en comparación con las propias dimensiones. Consideraremos que entre las placas no hay nada (prácticamente hay aire).

Supongamos que la placa B está unida a tierra. Si a la otra placa A se le comunica una carga $+Q$, debido a la inducción electrostática, en la placa B surge una carga $-Q$ (la carga $+Q$ igual a ésta se va a tierra y no desempeña ningún papel). La placa B unida a tierra, adquiere el potencial de la Tierra, que designaremos por V_2. En este caso la placa A adquiere un potencial V_1 cuyo valor lo determina solamente la magnitud de la carga Q y el potencial V_2 de la placa B. Los demás cuerpos sin carga no influirán en el potencial V_1 ni, por consiguiente, en la capacidad del condensador C, ya que el campo de las cargas $+Q$ y $-Q$ se concentra solamente en el espacio entre las placas A y B; por eso no puede originar en los demás cuerpos exteriores cargas inducidas.

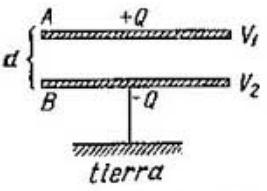


Fig. 50. Condensador plano.

Por capacidad C de un condensador se entiende la magnitud medida por relación entre la carga de una de las placas (la positiva) y la diferencia de potencial entre las placas:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}, \tag{3}$$

donde consideramos que $V_1 > V_2$.

Expresemos la capacidad del condensador plano en función de las magnitudes que caracterizan sus dimensiones. Como las dimensiones de las placas son grandes en comparación con la distancia entre ellas, la intensidad del campo entre las placas será la misma que en el caso de dos planos infinitos de carga igual, pero de diferente signo. Por consiguiente, según lo dicho en el § 128, tenemos que la intensidad del campo E entre las placas será:

$$E = 4\pi\sigma,$$

donde σ es la densidad superficial de la carga. Llamando S a la superficie de una lámina, tenemos que $\sigma = \frac{Q}{S}$ y

$$E = 4\pi \frac{Q}{S},$$

de donde

$$Q = \frac{ES}{4\pi}. \tag{4}$$

Expresemos la intensidad del campo E en función de la diferencia

de potencial $V_1 - V_2$ (véase el § 131):

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

Colocando en la fórmula (4) este valor de E hallamos que:

$$Q = \frac{(V_1 - V_2)S}{4\pi d}.$$

Utilizando esta ecuación y la fórmula (3), obtenemos para la capacidad C de un condensador plano:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S}{4\pi d}. \qquad (5)$$

De la fórmula (5) se ve que la capacidad de un condensador plano es proporcional a la superficie de la placa S e inversamente proporcional a la distancia entre las placas d. Cuando más cerca una de otra estén las placas, mayor capacidad tendrá el condensador. Después (véase el § 139) veremos cómo varía la capacidad de un condensador, si el espacio entre las placas lo llenamos de un cuerpo cualquiera no conductor (dieléctrico).

§ 137. Energía de un sistema de cargas. Al formar un sistema cualquiera de cuerpos cargados, se realiza un trabajo, ya que las cargas actúan recíprocamente, según la ley de Coulomb, y para colocarlas en los lugares dados hay que realizar un trabajo. Este trabajo lo debe realizar alguna fuerza exterior mantenida por alguna fuente de energía exterior, por ejemplo, por la energía de los procesos químicos de una pila con la cual se cargan los cuerpos, etc. Según la ley de la conservación de la energía, el trabajo de las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema determina la variación de su energía; por consiguiente, el sistema de cuerpos cargados tendrá cierta energía. Si estos cuerpos se descargan o se trasladan después, su energía eléctrica, en parte o totalmente, se transforma en otra clase de energía.

Como ejemplo calculamos la energía eléctrica de un sistema que consta de dos cargas puntuales q_1 y q_2 que se hallan en los puntos B_1 y B_2 a la distancia r una de otra. Para ello es suficiente calcular el trabajo que invierten las fuerzas exteriores en el transporte de las cargas q_1 y q_2 desde el infinito, donde las fuerzas de acción recíproca entre las mismas son iguales a cero, hasta los puntos dados B_1 y B_2. En este caso no se tiene en cuenta el trabajo invertido en la formación de las propias cargas q_1 y q_2 considerando que las cargas están dadas.

El trabajo de traslado de las cargas q_1 y q_2 desde el infinito, no depende del orden de traslación de las cargas. Traslademos primera-

mente la carga q_1 desde el infinito hasta el punto B_1. El trabajo de la traslación de la carga q_1 cuando q_2 queda aún en el infinito, es igual a cero, ya que las fuerzas de acción mutua son iguales a cero. Después de colocar la carga q_1 en el punto B_1, trasportemos la carga q_2 al punto B_2. En ello se invierte un trabajo igual al producto de la magnitud de la carga q_2 por la diferencia de potencial entre el punto B_2 y un punto infinitamente alejado. El potencial de un punto en el infinito es igual a cero; el potencial del punto B_2 lo crea la carga q_1 y, como se ha indicado en el § 129, es igual a q_1/r. Así tenemos que el trabajo A invertido para colocar las cargas q_1 y q_2 a la distancia r es:

$$A = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Este trabajo es el valor de la energía de acción recíproca W del sistema de dos cargas puntuales:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r}.$$

Si V_1 es el potencial creado por la carga q_2 en el punto B_1, y V_2 el creado por la carga q_1 en el punto B_2, tenemos:

$$V_1 = \frac{q_2}{r}, \quad V_2 = \frac{q_1}{r}.$$

La ecuación de la energía W la escribimos de la siguiente manera:

$$W = \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2}\frac{q_1}{r} \cdot q_2 + \frac{1}{2}\frac{q_2}{r} \cdot q_1, \tag{1}$$

de donde obtenemos que:

$$W = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2. \tag{1a}$$

Si las cargas son del mismo signo, la energía será positiva; si las cargas son de signo contrario, el de la energía será negativo.

La ecuación (1a) se puede generalizar para un sistema de n cargas colocadas a determinadas distancias unas de otras. La energía de este sistema será la suma de los trabajos necesarios para trasladar cada una de las cargas q_i desde el infinito hasta el lugar donde debe estar colocada. En este caso nos da la ecuación:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i V_i, \tag{2}$$

donde V_i es el potencial creado por todas las cargas, excepto la carga q_i, en el lugar donde se halla la carga q_i.

www.elsolucionario.org

La energía del sistema de cargas tiene carácter de energía potencial. De esto se deduce una consecuencia importante. Como se sabe, al estado estable de un sistema le corresponde un mínimo de energía potencial. Sin embargo, la energía de un sistema de cargas nunca alcanza el mínimo, cualquiera que sea la disposición mutua de las cargas. Efectivamente, la energía de cada par de cargas q_i y q_k la expresa el término [véase la fórmula (1)] de aspecto general $\frac{1}{2}\frac{q_i q_k}{r_{ik}}$, donde r_{ik} es la distancia entre estas cargas. Para las cargas del mismo signo, esta expresión será positiva y disminuirá continuamente a medida que aumente la distancia entre las cargas r_{ik}. Esto corresponde al hecho de que dos cargas del mismo signo se repelen hasta que se hallen a una distancia infinita entre ellas. Para cargas de diferente signo, la expresión $\frac{1}{2}\frac{q_i q_k}{r_{ik}}$ es negativa, por consiguiente, su valor disminuye continuamente a medida que se aproximan las cargas: dos cargas de distinto signo se atraen continuamente hasta que se confundan y se neutralicen en parte o por completo. Se puede demostrar rigurosamente que esta deducción de la configuración inestable formada por cada par de cargas es justa para un sistema de cargas cualquiera que sea su disposición inicial, lo mismo que para el caso de un sistema eléctrico con cargas que se caracterizan por la densidad volumétrica.

La estabilidad de una configuración estática de cargas eléctricas es imposible. De esto se deduce que los átomos y moléculas, que son sistemas eléctricos complejos, no pueden ser sistemas estáticos. Puede parecer que la estabilidad se puede conseguir en el movimiento continuo de las partículas, lo mismo que la estabilidad del sistema solar se consigue debido al movimiento de los planetas alrededor del Sol. Sin embargo, desde el punto de vista de la electrodinámica, incluso en este caso, el sistema permanece inestable, ya que la partícula cargada que se mueve con aceleración, pierde continuamente energía irradiándola. Desde el punto de vista clásico, es imposible construir un modelo estable de átomos o de moléculas que consten de partículas individuales cargadas. El estado estable de los átomos o de las moléculas se explica solamente en la mecánica cuántica.

Calculemos ahora la energía electrostática de un *conductor cargado* individual. Supongamos que al principio el conductor no estaba cargado y después se le ha cargado una cantidad de electricidad Q, tomando el potencial en este caso el valor V.

En la carga del conductor se invertirá un trabajo que nos sirve para medir la energía del conductor cargado; este trabajo lo podemos recuperar al descargar el conductor. Calculemos el trabajo invertido en la carga.

Entre la carga del conductor y su potencial tenemos la relación:

$$Q = CV, \tag{3}$$

donde C es la capacidad del conductor.

Al cargar el conductor aumenta su carga Q y, junto con ella, el potencial V, estando continuamente relacionados estos valores según la ecuación (3). Gráficamente, la dependencia entre el potencial V y la carga Q se representa con una recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 51).

Supongamos que en el conductor ya hay una carga Q, y tenemos que calcular el trabajo dA que hay que invertir para trasladar desde

el infinito hasta el conductor una carga infinitesimal dQ. Debido a la pequeñez de la carga dQ, podemos considerar que el potencial que le comunica al conductor es insignificante. Por lo tanto, el trabajo dA será igual al producto de la carga dQ por la diferencia de potencial entre el conductor y el infinito, donde el potencial es igual a cero, según lo supuesto. Así tenemos que $dA = V\,dQ$. El trabajo total de traslación de todas las cargas al elevar el potencial de un cuerpo desde 0 hasta V, será la suma de todos los trabajos elementales dA, es decir, la integral tomada entre los límites desde 0 hasta V:

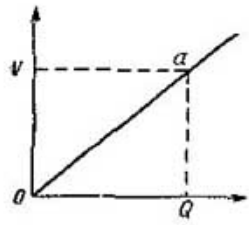


Fig. 51. Dependencia entre el potencial V y la carga Q.

$$V = \int_0^V V\,dQ.$$

De la (3) tenemos que $dQ = C\,dV$, de donde:

$$A = \int_0^V CV\,dV.$$

La capacidad C del cuerpo es una magnitud constante; por eso se puede sacar del signo de la integral:

$$A = C\int_0^V V\,dV = \frac{CV^2}{2}.$$

Este trabajo determina la energía W del cuerpo cargado. Así tenemos que la energía del conductor cargado es:

$$W = \frac{CV^2}{2}. \qquad (4)$$

Expresando la capacidad C en función de la carga Q y del potencial V según la (3), tendremos otra expresión de la energía:

$$W = \frac{1}{2}\,QV, \qquad (4a)$$

y, por último, expresando el potencial en función de la carga y de la capacidad, obtenemos la tercera fórmula para expresar la energía de un conductor cargado:

$$W = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}. \qquad (4b)$$

Las fórmulas obtenidas para la energía son fáciles de generalizar extendiéndolas al caso del *condensador cargado*. El proceso de cargar las placas se puede considerar que transcurre de la siguiente manera: al principio las placas neutras se van cargando gradualmente

al trasladarse cantidades infinitesimales de electricidad $+dQ$ de una placa a otra. Esta traslación aumenta la carga positiva de una placa en dQ, y disminuye la carga positiva o, lo que es lo mismo, aumenta la carga negativa de la otra placa en la misma magnitud. Así, en el proceso de la carga siempre tenemos en ambas placas la misma cantidad de electricidad, pero de signo distinto. La translación de una cantidad dQ de electricidad de una placa a otra exige cierto trabajo. Si el potencial de una de las placas es igual a V_1, y el de la otra, V_2, el trabajo a invertir será:

$$dA = (V_1 - V_2)\, dQ.$$

De esta manera obtenemos la misma expresión para el trabajo elemental dA que para la carga de un cuerpo individual: sólo que en vez del potencial V tenemos la diferencia de potencial $V_1 - V_2$. De aquí que la energía total de un condensador cargado se puede expresar por la fórmula (4a), si sustituimos en ella V por $V_1 - V_2$:

$$W = \frac{1}{2} Q\,(V_1 - V_2). \tag{5}$$

Utilizando la relación existente entre la carga Q y la capacidad del condensador $Q = C\,(V_1 - V_2)$, le damos a esta fórmula otro aspecto:

$$W = \frac{1}{2} C\,(V_1 - V_2)^2, \tag{5a}$$

y

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \tag{5b}$$

Todas estas fórmulas nos dan la energía de un condensador cargado en función de dos magnitudes de las tres que hay: diferencia de potencial de las armaduras del condensador $V_1 - V_2$, carga Q de las armaduras y capacidad C.

Veamos un ejemplo numérico. Determinemos la energía de un condensador de $1\mu F$ cargado hasta alcanzar una diferencia de potencial de 3 000 V.

El ejemplo lo resolveremos utilizando dos sistemas diferentes de unidades: a) el *CGSE*, y b) el sistema práctico.

a) En el sistema *CGSE*, la capacidad $C = 1\mu F = 9 \cdot 10^5$ cm, $V_1 - V_2 = 3\,000$ V $= \frac{3000}{300}$ unidades *CGSE* de potencial, es decir, $V_1 - V_2 = 10$ unid. *CGSE*. De aquí, según la fórmula (5a):

$$W = \frac{1}{2} C\,(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \text{ erg} = 4{,}5 \text{ julios}.$$

b) En el sistema práctico de unidades, $C = 1\mu F = 10^{-6}$ F, $V_1 - V_2 = 3\,000$ V; de donde:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\,(3 \cdot 10^3)^2 \text{ julios} = 4{,}5 \text{ julios}.$$

www.elsolucionario.org

Determinemos la energía de un dipolo en un campo electrostático uniforme exterior de intensidad E (fig. 52). Sea l el eje del dipolo, que forma el ángulo α con la dirección de la intensidad del campo E. Las fuerzas que actúan sobre las cargas, negativa y positiva, del dipolo serán respectivamente igual a $+qE$ y $-qE$. Estas fuerzas, como se ha indicado en el § 135, forman un par de momento

$$M = qEl \operatorname{sen} \alpha = pE \operatorname{sen} \alpha,$$

donde $p=ql$ es el momento del dipolo.

Cuando el eje del dipolo es paralelo a la intensidad del campo, $\alpha=0$ y el momento de fuerzas $M=0$; cuando el eje del dipolo es perpendicular a la intensidad del campo $(\alpha=\pi/2)$, el momento de fuerzas adquiere el valor máximo $M=pE$. Consideremos que la energía del dipolo en este último caso es igual a cero.

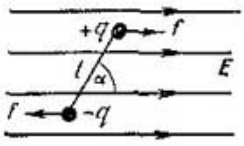


Fig. 52. Dipolo en un campo eléctrico exterior.

Al girar el dipolo un ángulo infinitamente pequeño $d\alpha$, las fuerzas eléctricas realizan un trabajo:

$$dA = Md\alpha = pE \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha;$$

en esta misma magnitud disminuirá la energía del dipolo W. La reserva de energía que el dipolo tendrá cuando su eje forme el ángulo α con E, será igual al trabajo de las fuerzas al hacerlo girar de la posición perpendicular al vector E $(\alpha=\pi/2)$, a la posición determinada por el valor dado de α:

$$W = \int_{\pi/2}^{\alpha} pE \operatorname{sen} \alpha \cdot d\alpha = pE \int_{\pi/2}^{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha.$$

Integrando:

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = -\cos \alpha,$$

nos da

$$W = -pE \cos \alpha,$$

que es la ecuación buscada de la energía del dipolo. El signo menos es debido a que hemos considerado la energía del dipolo perpendicular a la intensidad del campo E igual a cero. Por lo tanto, para los ángulos $\alpha < \frac{\pi}{2}$ será aún menor, es decir, adquirirá valores negativos. La posición de $\alpha=0$ corresponde al *mínimo* de energía eléctrica. Al mismo tiempo, esta posición (en la cual el momento de fuerzas $M=0$) es la de equilibrio.

Así tenemos que a la posición de equilibrio le corresponde el *mínimo* de energía eléctrica. Como en mecánica el estado de equilibrio corresponde al mínimo de energía potencial, tendremos que la energía eléctrica de los cuerpos cargados que se hallan en un campo electrostático, como ya se ha indicado, es análoga a la energía potencial de la mecánica.

§ 138. Energía del campo electrostático. Las fórmulas deducidas en el § 136 nos permiten expresar la energía de un condensador plano en función de las magnitudes que caracterizan el campo electrostático creado entre sus armaduras. Para ello utilicemos la relación

entre la carga Q de las placas de un condensador plano y la intensidad del campo E entre las placas (pág. 68):

$$E = \frac{4\pi Q}{S}, \tag{1}$$

donde S es la superficie de las placas. Además, la diferencia de potencial entre las armaduras está relacionada con la intensidad del campo E y la distancia d entre las placas del condensador mediante la siguiente ecuación:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}. \tag{2}$$

Colocando los valores de Q y de $V_1 - V_2$ de las fórmulas (1) y (2) en la expresión de la energía del condensador [fórmula (5) del § 137], obtenemos que:

$$W = \frac{1}{8\pi} E^2 Sd. \tag{3}$$

La fórmula (3) nos da la energía del condensador en función de la intensidad del campo E. Así resulta que la energía del condensador se puede expresar de dos maneras: bien en función de la carga y del potencial de las placas, bien en función de la intensidad del campo electrostático creado por las cargas. Esta última circunstancia nos permite considerar que el campo electrostático tiene energía y, por consiguiente, se puede hablar *de la energía del campo electrostático*. Este punto de vista lo confirma el que, según la fórmula (3), la energía es proporcional al producto Sd, el cual es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador. Como el campo de las placas es diferente de cero solamente en el espacio comprendido entre ellas, el producto Sd nos da al mismo tiempo el volumen del espacio en que, en el caso dado, se ha concentrado el campo. Así resulta que la energía W es proporcional al volumen del espacio ocupado por el campo.

Al examinar la energía del campo electrostático del condensador, se puede introducir el concepto de *densidad volumétrica de energía*, sobrentendiendo con ello la magnitud

$$w = \frac{W}{Sd}, \tag{4}$$

es decir, una magnitud de valor numérico igual a la energía por unidad de volumen del campo. Colocando en la (4) el valor de W según la (3), obtenemos que:

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2. \tag{5}$$

El concepto de densidad de energía se ha introducido para el caso del campo uniforme del condensador; pero es fácil de generalizarlo para cualquier campo electrostático.

Si el campo es variable, consideraremos que la densidad media e energía $\overline{w}$ correspondiente al volumen ΔV de un campo variable, s la magnitud dada por la relación entre la energía ΔW corresondiente al volumen ΔV, y este volumen:

$$\overline{w} = \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

a densidad de energía en el punto dado de campo será el límite a ue tiende esta relación al disminuir infinitamente el volumen ΔV a el punto dado:

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\Delta W}{\Delta V} \right).$$

En un volumen muy pequeño, cualquier campo se puede considerar proximadamente uniforme y caracterizado por determinado valor el vector de intensidad del campo **E**. Por consiguiente, la densidad e energía de un campo variable en el punto dado es

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2,$$

onde E es la intensidad del campo en el punto del campo para el ual se calcula la densidad de energía. De aquí se ve que la ecuación 5) de la densidad de energía es justa para cualquier campo. La ensidad de energía de un campo variable, cambia de un punto a tro.

Para calcular la energía de un volumen V finito de un campo electrostático. hay que dividir este volumen en volúmenes elementales ΔV, determinar la energía correspondiente a cada uno de ellos, $\Delta W = w \cdot \Delta V$, y sumarlas según todo el volumen:

$$W = \sum w \cdot \Delta V. \qquad (6)$$

Aquí w es el valor de la densidad de energía correspondiente a cada olumen elemental ΔV dado.

La idea de la distribución de la energía del campo según el volumen, es decir, la idea de la densidad de energía w, la ha confirmado l desarrollo ulterior del estudio de los fenómenos eléctricos y magnéticos, en que se ha demostrado que la energía se puede transmitir a través del "vacío" como energía de ondas electromagnéticas de velocidad $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/seg. Esta deducción tiene gran importancia para comprender la naturaleza del campo. La energía es una de las características del estado de la materia y, por consiguiente, el concepto de energía no puede estar divorciado del de materia. Esto lo confirma la deducción sacada en el § 124 de que el mismo campo electrostático es un aspecto particular de la materia (para más detalles véase el § 152).

www.elsolucionario.org

Una expresión más exacta de la energía de un volumen finito de un campo variable la obtenemos examinando los elementos de volumen dV infinitamente pequeños. Entonces, la energía dW por cada uno de estos volúmenes infinitamente pequeños la expresaremos con la fórmula:

$$dW = \frac{1}{8\pi} E^2 \, dV.$$

La energía W del campo encerrado en un volumen finito V vendrá determinada por la suma de las energías de todos los sectores infinitamente pequeños del campo, es decir, por la integral

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E^2 \, dV, \qquad (6a)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen V del campo.

Determinemos, utilizando la fórmula (6a), la energía total del campo electrostático uniforme de una esfera de radio R. Sea Q la carga de la esfera que se halla en el vacío.

Calculemos la energía dW que corresponde a una capa esférica infinitamente delgada y concéntrica con la esfera cargada. Sea r el radio de esta capa esférica y dr su espesor. Debido al pequeño espesor de la capa, la intensidad del campo E en todos los puntos del interior de la capa se puede considerar constante e igual a

$$E = \frac{Q}{r^2}.$$

El volumen de la capa es $dV = 4\pi r^2 dr$, de donde la energía del campo encerrado en el interior de la capa será:

$$dW = \frac{Q^2}{2r^2} \, dr.$$

La energía de todo el campo la obtendremos integrando dW según r desde el valor $r = R$ (correspondiente a los puntos que se hallan cerca de la superficie de la esfera cargada) hasta $r = \infty$:

$$W = \int_R^\infty \frac{Q^2}{2r^2} \, dr = \frac{Q^2}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}.$$

Integrando obtenemos que:

$\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{R}$, de donde hallamos que:

$$W = \frac{Q^2}{2R}.$$

Como la capacidad de una esfera individual es igual a su radio ($C = R$), esta última ecuación se puede escribir así:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C},$$

lo cual coincide con la (4b) del § 137 para la energía de un cuerpo cargado. Así tenemos que, partiendo de la ecuación de la densidad de energía del campo eléctrico, llegamos a la ecuación primaria de la energía de un cuerpo cargado en función de la carga y de la capacidad.

CAPITULO XV

Fenómenos electrostáticos en los dieléctricos

§ 139. Dieléctricos. Constante dieléctrica. A mediados del siglo pasado, Faraday, haciendo experimentos con un condensador esférico observó que si el espacio entre las armaduras del condensador se llenaba de azufre (en lugar de aire), la capacidad eléctrica del condensador aumentaba varias veces. Después se estableció que este fenómeno tiene carácter general y la capacidad de cualquier condensador depende del cuerpo aislador *(dieléctrico)* que llena el espacio entre sus armaduras. Sea C_0 la capacidad del condensador cuando entre sus armaduras se ha hecho el vacío. La capacidad del condensador cuando hay un dieléctrico entre sus armaduras será:

$$C = \varepsilon C_0. \tag{1}$$

La magnitud ε denominada *constante dieléctrica (o coeficiente dieléctrico)*, indica la cantidad de veces en que aumenta la capacidad del condensador si, en lugar del vacío entre sus armaduras, tenemos un dieléctrico.

Tabla I

Constante dieléctrica ε

Sustancia	ε	Sustancia	ε	Sustancia	ε
Aire (a 1 atm)	1,0006	Parafina	2,1	Ebonita	2,5
Azufre	4	Mica	6—7	Queroseno	2,0
Cera	7,8	Vidrio	5,5—7	Agua	81
		Porcelana	5,7—6,3		

El valor de la constante dieléctrica depende de la naturaleza del dieléctrico y de las condiciones en que se halla (temperatura, presión, etc). La experiencia enseña que para todas las sustancias $\varepsilon > 1$. En correspondencia con la fórmula (1), la constante dieléctrica es una magnitud sin dimensiones; para el vacío $\varepsilon = 1$*). En la tabla I

*) Más adelante se indicará que se puede introducir un sistema eléctrico de medición en que la constante dieléctrica ε sea una magnitud dimensional y su valor numérico para el vacío no sea igual a la unidad.

se dan los valores de la constante dieléctrica de una serie de sustancias (a la temperatura de la habitación). Como se ve, los valores de las constantes dieléctricas varían desde magnitudes que se diferencian poco de la unidad (gases a la presión atmosférica), hasta varias decenas de unidades. Sobre todo, una constante dieléctrica muy grande la tiene el agua ($\varepsilon=81$).

Veamos lo que ocurre al introducir un dieléctrico homogéneo entre las placas de un condensador plano.

Supongamos primeramente que las armaduras del condensador están aisladas de los cuerpos que las rodean de manera que sus cargas no varíen:

$$Q=\sigma S.$$

En estas condiciones, el aumento de la capacidad del condensador al introducirle un dieléctrico se produce a costa de la disminución de la diferencia de potencial entre las armaduras. Efectivamente, de la ecuación

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2} \qquad (2)$$

se ve que el aumento de la capacidad en ε veces debe producirse al disminuir en ε veces la diferencia de potencial V_1-V_2 entre las armaduras. La disminución de la diferencia de potencial es debida a la debilitación de la intensidad del campo electrostático entre las armaduras, ya que según la ecuación (2) del § 131, tenemos que:

$$E=\frac{V_1-V_2}{d}.$$

De aquí se ve que la intensidad del campo E entre las armaduras de un condensador con dieléctrico es ε veces menor que la intensidad del campo E_0 del mismo condensador sin dieléctrico:

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Examinemos las causas del debilitamiento del campo. En el dieléctrico introducido en el campo eléctrico de las armaduras, se produce una polarización (véase el § 122) acompañada de una nueva distribución de las cargas en las moléculas del dieléctrico o de un giro de las moléculas polares (dipolos). En el caso de un dieléctrico homogéneo, esta polarización no va acompañada de formación de cargas volumétricas en el interior del dieléctrico, ya que las moléculas, en su conjunto, son neutrales y las cargas de las moléculas vecinas se compensan mutuamente (véase la fig. 53). No obstante, en los extremos del dieléctrico no hay compensación de cargas. Resulta que en la superficie que está frente a la lámina negativa,

www.elsolucionario.org

surgen cargas positivas no compensadas, y en la superficie que está frente a la lámina positiva, surgen cargas negativas no compensadas. Estas cargas se denominan cargas *aparentes* y se pueden considerar distribuidas en la superficie del dieléctrico con una densidad superficial constante de $+\sigma'$ y $-\sigma'$. (Para más detalles véase el § 141).

Como resultado de ello en el dieléctrico se crea un campo eléctrico complementario, formado por la polarización del dieléctrico, *dirigido en sentido contrario al del campo creado por las armaduras del condensador.*

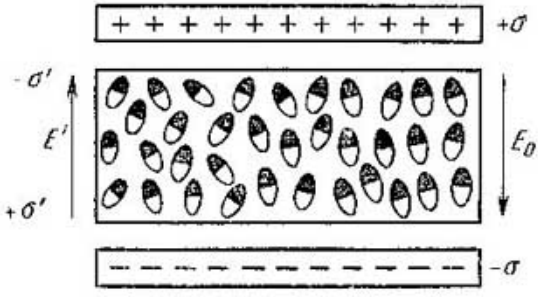


Fig. 53. Dieléctrico en un condensador.

Supongamos que el campo entre las armaduras del condensador sin dieléctrico tiene la intensidad de $\mathbf{E}_0$. Esta magnitud $\mathbf{E}_0$ está relacionada con la densidad σ de las cargas en las armaduras, que denominaremos *cargas libres*, mediante la relación:

$$E_0 = 4\pi\sigma.$$

La intensidad E' del campo creado por la polarización del dieléctrico, se relaciona con la densidad de las cargas aparentes mediante una ecuación análoga:

$$E' = 4\pi\sigma'.$$

El campo total entre las armaduras del condensador con dieléctrico lo caracterizará la intensidad E igual a la suma geométrica de las intensidades del campo de las armaduras y del campo del dieléctrico polarizado:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

Teniendo en cuenta que los vectores $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$ van en sentido contrario, hallemos el valor numérico de la intensidad resultante:

$$E = E_0 - E' = 4\pi(\sigma - \sigma').$$

Así tenemos que la polarización del dieléctrico *debilita* el campo.

Utilizando la relación

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon},$$

hallamos la relación existente entre la densidad de las cargas aparentes y la intensidad del campo en el dieléctrico:

$$\sigma' = \frac{4\pi\sigma - E}{4\pi} = \frac{\varepsilon E - E}{4\pi} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E = \varkappa E. \qquad (3)$$

La magnitud $\varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$ se llama susceptibilidad eléctrica. Está claro que la susceptibilidad eléctrica depende de la clase del dieléctrico. De la última ecuación se ve que la densidad de las cargas que surgen en las zonas limítrofes del dieléctrico debido a su polarización, es proporcional a la intensidad del campo que actúa en el dieléctrico (para más detalle véase el § 142).

Observemos que en este caso el dieléctrico polarizado crea un campo debilitado sólo en el seno del propio dieléctrico, ya que las cargas aparentes $+\sigma'$ y $-\sigma'$ están distribuidas según dos planos paralelos. Como sabemos, unas cargas iguales que éstas fuera de la zona limitada por estos planos, crean una intensidad igual a cero (véase el § 128). Por consiguiente, si entre el dieléctrico y las placas hay algún espacio, la intensidad del campo eléctrico en este espacio será la misma que había antes de introducir el dieléctrico.

Veamos ahora la influencia del dieléctrico en el caso cuando el dieléctrico se introduce en un condensador en cuyas armaduras se mantiene una diferencia de potencial constante (conectando las armaduras a una fuente de constante diferencia de potencial). En este caso la intensidad del campo entre las armaduras seguirá siendo la misma que antes de introducir el dieléctrico (según la relación fundamental entre la intensidad y el potencial). Como la polarización del dieléctrico debilita el campo, está claro que la intensidad se puede conservar invariable solamente si aumentamos la carga libre de las armaduras del condensador a costa de las cargas de la fuente conectada.

De la (2) se ve que el aumento de la capacidad en ε veces significa que, en estas condiciones, la carga libre en las armaduras aumenta en ε veces.

§ 140. Energía del condensador con dieléctrico. Energía del campo en el dieléctrico. Veamos lo que ocurre con la energía de un condensador al introducir entre sus placas un dieléctrico. En el § 137 hemos visto que la energía de un condensador W la determina la ecuación

$$W = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2), \qquad (1)$$

donde Q es la carga de una placa del condensador. Como esta ecuación para W se ha obtenido solamente calculando el trabajo de traslación de las cargas entre las placas a la diferencia de potencial dada, *servirá también cuando entre las placas del condensador haya un dieléctrico*. La fórmula (1) nos permite comparar la energía W del condensador vacío con la energía W_ε del mismo condensador con dieléctrico. Aquí, sin embargo, hay que concretar las condiciones en que se hace la comparación.

Si las *cargas* en las armaduras del condensador vacío y del condensador con dieléctrico *son iguales*, la diferencia de energías es debida a la diferencia de potencial en las armaduras de ambos condensadores. Como hemos examinado en el § 139, en este caso, la diferencia de potencial en las armaduras del condensador con dieléctrico es ε veces menor que la diferencia de potencial en las armaduras del condensador vacío; por eso, en estas condiciones tenemos que

$$\frac{W_\varepsilon}{W} = \frac{1}{\varepsilon},$$

es decir, la *energía* del condensador *disminuye* en ε veces al llenarle de dieléctrico.

Y viceversa, si se mantiene la misma diferencia de potencial en las armaduras de los condensadores vacío y con dieléctrico, la energía será proporcional a las cargas libres Q de las armaduras.

En este caso, como hemos visto, la carga de las armaduras del condensador con dieléctrico es ε veces mayor que la de las armaduras del condensador vacío, y tenemos que

$$\frac{W_\varepsilon}{W} = \varepsilon,$$

es decir, la *energía* del condensador *aumenta* al llenarle de dieléctrico. El aumento de energía se produce a costa de la fuente que mantiene invariable la diferencia de potencial de las armaduras.

De la ecuación de la energía del condensador

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)$$

es fácil hallar la densidad de energía del campo electrostático en el interior de un dieléctrico análogamente a como en el § 138 se ha obtenido la densidad de energía del campo eléctrico en el vacío. Para ello examinemos un condensador plano con dieléctrico y cuyo campo se puede considerar uniforme. Colocando en la fórmula (1) los valores de Q y de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ en función de la intensidad del campo,

$$Q = \sigma S = \frac{\varepsilon S E}{4\pi} \text{ y } V_1 - V_2 = Ed,$$

www.elsolucionario.org

hallamos que

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E^2 Sd.$$

Dividiendo esta última ecuación por el volumen del dieléctrico del condensador Sd, nos da la densidad de energía en el dieléctrico:

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \qquad (2)$$

Se puede generalizar esta fórmula y aplicarla a los dieléctricos heterogéneos y a los campos variables, dividiendo el dieléctrico en volúmenes ΔV tan pequeños, que dentro de sus límites se pueda despreciar la heterogeneidad. Repitiendo, entonces, los razonamientos del § 138 para la energía de un campo variable, obtenemos que

$$W = \sum \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \Delta V.$$

§ 141. Polarización dieléctrica. Vector de polarización. Veamos con más detalle el proceso de polarización dieléctrica.

El dieléctrico consta de moléculas compuestas de partículas cargadas: electrones negativos y núcleos positivos. Las cargas positivas y negativas en el interior de cada molécula se compensan mutuamente, de manera que en su totalidad la molécula es neutral. No obstante, los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas de la molécula pueden no coincidir, formando entonces un momento dipolo **p**. Veamos primeramente el caso cuando una molécula tiene un momento constante **p**, que no varía bajo la influencia del campo exterior. Esta molécula se llama *molécula polar* (o *heteropolar*).

Si no hay campo exterior, gracias al movimiento térmico desordenado, los momentos de las moléculas no están orientados. Si tomamos un pequeño volumen ΔV del dieléctrico con un número bastante elevado de moléculas, la suma vectorial de los momentos de todas las moléculas $\Sigma \mathbf{p}$ de este volumen será igual a cero. Si hay un campo eléctrico exterior, los dipolos, en parte, se orientarán según el campo, y la suma de los momentos $\Sigma \mathbf{p}$ no será igual a cero, y tanto más se diferenciará de cero, cuanto mayor sea la intensidad del campo. El dieléctrico con momentos polares en mayor o menor grado orientados está *polarizado*.

Para medir la polarización de un dieléctrico tomamos un vector **P** igual a la suma de los momentos de la molécula $\Sigma \mathbf{p}$ por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \frac{\Sigma \mathbf{p}}{\Delta V}. \qquad (1)$$

El volumen ΔV, en los límites en que se toma la suma de los momentos de las diferentes moléculas $\Sigma \mathbf{p}$ debe contener una cantidad suficiente de moléculas y, al mismo tiempo, ser tan pequeño, que en su interior se puedan considerar constantes todas las magnitudes macroscópicas, como la densidad, temperatura, intensidad del campo electrostático E, etc. El vector **P** se denomina *vector de polarización*.

El grado de orientación de las moléculas es natural considerarlo proporcional a la intensidad del campo **E** en el seno del dieléctrico. Entonces, el vector de polarización **P** también *será proporcional a la intensidad del campo* **E**:

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}. \tag{2}$$

Más abajo demostraremos que el coeficiente $\varkappa$ coincide con la susceptibilidad eléctrica de que hemos hablado en el § 139.

Si al principio la molécula no tenía momento polar (molécula homopolar o apolar), bajo la influencia del campo eléctrico exterior, las cargas se desplazan y surge un momento dipolar **p**. En este caso también se puede considerar que la suma de los momentos es proporcional a la intensidad del campo. En el caso de la molécula homopolar, la $\Sigma \mathbf{p}$ aumentará debido a dos causas: debido al aumento de los momentos dipolares de las moléculas **p** y a su orientación. Pero, incluso en este caso, la suma de los momentos $\Sigma \mathbf{p}$ aumentará proporcionalmente a **E**. Por consiguiente, la fórmula (2) es justa para las moléculas de cualquier tipo.

Si el dieléctrico homogéneo se halla en un campo eléctrico, cualquier elemento de su volumen ΔV, que contenga una cantidad suficientemente grande de moléculas, permanecerá neutral. No ocurre lo mismo, como hemos visto, en la delgada capa superficial del dieléctrico. Gracias al giro de las moléculas, en la superficie limítrofe por donde entran las líneas de fuerza, habrá exceso de extremos (polos) negativos de las moléculas, y en la superficie limítrofe por donde salen las líneas de fuerza, habrá exceso de extremos positivos de las moléculas (véase la pág. 79).

Debido a ello, en la superficie del dieléctrico polarizado *surgen cargas formando cierta densidad superficial* σ'.

En el caso de un *dieléctrico heterogéneo surgen, además, cargas volumétricas* ρ' *en el seno del mismo dieléctrico*. Examinemos, por ejemplo, un dieléctrico heterogéneo en un campo eléctrico. Supongamos que la concentración de las partículas del dieléctrico aumenta de izquierda a derecha (fig. 54) y que la intensidad del campo vaya en esta misma dirección. Separemos mentalmente en este dieléctrico una capa limitada por las superficies aa' y bb'. En la superficie aa' de la capa, el número de partículas por unidad de volumen, según se ha supuesto, es menor que en la superficie bb'. Por consiguiente, la superficie aa' dividirá menos moléculas que

la superficie *bb'*. Como cada molécula es un dipolo orientado según el campo, por la superficie *aa'* penetrarán, de la parte izquierda del dieléctrico, menos extremos positivos de moléculas que los que salen por la superficie *bb'*. Por lo tanto, en el interior de la capa *aa'bb'* habrá deficiencia de cargas positivas y resultará cargada negativamente.

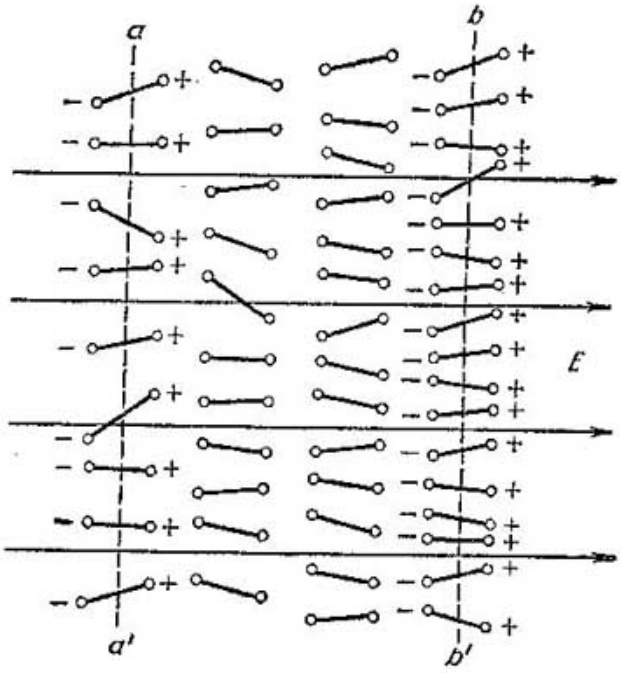


Fig. 54. Cargas volumétricas al polarizar un dieléctrico heterogéneo.

Debido a la orientación de las moléculas causada por un campo eléctrico exterior, varían las propiedades mecánicas del dieléctrico. Por eso, al polarizar un dieléctrico, en éste surgen tensiones que le hacen variar de volumen y de forma. Este fenómeno se llama *electrostricción*. Además, en las superficies de los dieléctricos surgen tensiones mecánicas complementarias.

Las cargas superficiales y volumétricas que surgen al polarizar un dieléctrico se denominan *aparentes*. Las demás cargas (no debidas a la polarización) se denominan *libres* o *verdaderas*.

Entre el vector de polarización y la densidad superficial de cargas en las zonas limítrofes del dieléctrico hay una relación sencilla. La vamos a establecer en un simple caso particular. Introduzcamos una lámina de dieléctrico homogéneo infinitamente grande y de

www.elsolucionario.org

caras paralelas en un campo uniforme. En este caso, el campo **E** del interior del dieléctrico y el vector de polarización **P** [fórmula (2)] serán constantes. Limitemos un volumen cilíndrico ΔV de esta lámina de manera que sus generatrices sean paralelas a la intensidad del campo **E** de la lámina (véase la fig. 55, donde **n** es normal a la superficie de la lámina). Al polarizar el dieléctrico, en las superficies de la lámina aparecen cargas, siendo $+\sigma'$ y $-\sigma'$ las densidades superficiales. Como en el caso que examinamos (el de un dieléctrico homogéneo no cargado de antemano), en el interior del volumen ΔV no surgen cargas, macroscópicamente considerado, el momento eléctrico del volumen ΔV es debido solamente a las cargas superficiales en las bases del cilindro S. Estas cargas son respectivamente iguales a $+\sigma' S$ y $-\sigma' S$, y la distancia entre ellas es igual a la longitud del cilindro L. De aquí que el momento eléctrico del cilindro sea igual a $\sigma' SL$. Pero, de otra parte, el momento de todo el cilindro es igual al valor numérico de la suma de los vectores de los momentos de todas las moléculas del interior del cilindro, de donde:

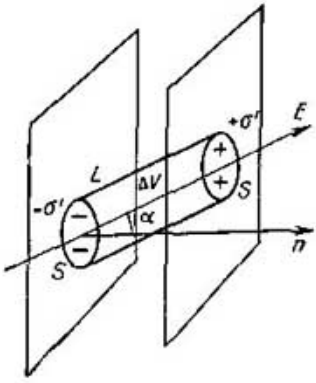


Fig. 55. Determinación del vector de polarización **P**

$$|\sum \mathbf{p}| = \sigma' SL.$$

El valor numérico del vector de polarización **P** dentro de los límites del cilindro lo obtenemos dividiendo el momento suma $|\Sigma \mathbf{p}|$ por el volumen ΔV:

$$P = \frac{|\Sigma \mathbf{p}|}{\Delta V} = \frac{\sigma' SL}{\Delta V}.$$

El volumen del cilindro es

$$\Delta V = SL \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo formado entre la generatriz del cilindro L y la dirección de la normal a la base del cilindro S. Colocando este valor de ΔV en la ecuación de P, nos da:

$$P = \frac{\sigma'}{\cos \alpha}, \text{ de donde } \sigma' = P \cdot \cos \alpha,$$

La dirección de la generatriz del cilindro L, según se ha establecido al trazarlo, coincide con la intensidad del campo **E**, y con ésta coincide la del vector de polarización **P**, de donde:

$$P \cos \alpha = P_n,$$

donde P_n es la proyección del vector de polarización sobre la normal a la superficie en que aparecen las cargas. Por consiguiente,

$$\sigma' = P_n, \tag{3}$$

es decir, *la densidad de las cargas superficiales aparentes* σ' *es igual numéricamente a la componente normal del vector de polarización.*

Esto nos permite sacar una importante consecuencia. Según la fórmula (2), el vector de polarización P es proporcional a la intensidad del campo E; por lo tanto, según la (3), tenemos que la densidad de las cargas superficiales σ' es proporcional a la componente normal de la intensidad del campo E_n:

$$\sigma' = \varkappa E_n. \tag{4}$$

Este resultado coincide con el obtenido para el caso particular del § 139, ecuación (3). Así vemos que el coeficiente $\varkappa$ de la fórmula (2) coincide con la susceptibilidad eléctrica del § 139.

En lo que se refiere a las cargas aparentes volumétricas, como se ha indicado, surgen cuando el dieléctrico es heterogéneo y en los lugares donde hay cargas libres. Se puede decir que la densidad volumétrica de las cargas aparentes ρ' la determina la divergencia del vector de polarización P tomado con signo menos:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \tag{5}$$

Las fórmulas (3) y (5) permiten, en cada caso particular, hallar las cargas superficiales y volumétricas que surgen en la polarización del dieléctrico.

§ 142. Intensidad del campo en el seno del dieléctrico. Al examinar los fenómenos electrostáticos en el vacío, se ha supuesto que las cargas son debidas al exceso o a la escasez de electrones en cada elemento de volumen del cuerpo cargado con una cantidad suficientemente elevada de moléculas.

Estas cargas las hemos llamado *libres* o *verdaderas*. En el párrafo anterior hemos visto que al polarizar un dieléctrico pueden surgir otras cargas originadas bien por el giro de los momentos dipolares constantes de las moléculas polares, bien por surgir momentos inducidos en las moléculas, permaneciendo neutra cada molécula. Estas cargas las hemos llamado *aparentes*. Las cargas aparentes surgen solamente cuando en el dieléctrico hay un campo eléctrico*). Así tenemos que la fuente primaria del campo siempre son las cargas libres.

No obstante, *si en el campo hay un trozo de dieléctrico, al campo primario originado por las cargas libres se le suma un campo complementario formado por las cargas aparentes.* Este campo complementario no es igual a cero ni en el mismo dieléctrico, ni fuera de él.

*) Más abajo se hablará de la posibilidad de conservar las cargas aparentes después de cesar la acción del campo.

Para hallar la resultante de la intensidad del campo E, hay que sumar la intensidad del campo de las cargas libres $\mathbf{E}_0$ con la intensidad del campo de las cargas aparentes E′:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'. \qquad (1)$$

Hallemos, en correspondencia con la ecuación (1), la intensidad del campo en el dieléctrico para simples casos particulares cuando las cargas aparentes que surgen, se pueden determinar fácilmente. En este caso consideraremos que las cargas libres siguen siendo invariables.

1. *Dieléctrico homogéneo que rodea a una esfera conductora cargada.* Supongamos que la esfera conductora cargada de radio R se ha introducido en un dieléctrico homogéneo que se extiende hasta el infinito. Sea Q la carga de la esfera. Como hemos visto (§ 128, 3), una esfera conductora cargada origina en el espacio exterior un campo, como si toda su carga Q estuviese concentrada en el centro.

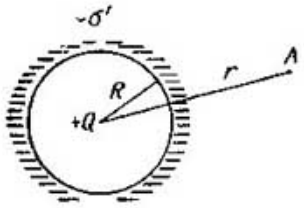


Fig. 56. Influencia del dieléctrico en el campo de una esfera cargada.

Por consiguiente, la intensidad del campo $\mathbf{E}_0$ en el punto A a la distancia r del centro de la esfera será:

$$E_0 = \frac{Q}{r^2}.$$

En el interior de la esfera, la intensidad del campo será igual a cero. Bajo la influencia del campo, el dieléctrico se polariza y en la superficie limítrofe con la de la esfera surgen cargas aparentes Q' de signo contrario a las de Q. La densidad superficial de estas cargas es:

$$-\sigma' = -\varkappa E_R,$$

donde E_R es la intensidad del campo en el interior del dieléctrico junto a la superficie de la esfera (fig. 56). Como la superficie de la esfera es igual a $4\pi R^2$, tenemos que

$$Q' = -\sigma' \cdot 4\pi R^2 = -4\pi R^2 \varkappa E_R.$$

Esta carga está distribuida según una superficie esférica concéntrica a la esfera cargada; por eso origina en el punto A un campo complementario:

$$E' = \frac{Q'}{r^2} = -\frac{4\pi R^2 \varkappa E_R}{r^2}.$$

De aquí que la intensidad del campo en el punto A sea:

$$E = E_0 + E' = \frac{Q}{r^2} - \frac{4\pi R^2 \varkappa E_R}{r^2}. \qquad (2)$$

www.elsolucionario.org

Como la intensidad del campo de una esfera conductora cargada y la de una superficie esférica en un dieléctrico homogéneo disminuye inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera, tenemos que:

$$\frac{E_R}{E}=\frac{r^2}{R^2},\ \text{de donde}\ E_R=\frac{r^2}{R^2}E.$$

Colocando este valor de E_R en la (2), nos da:

$$E=\frac{Q}{r^2}-4\pi\varkappa E\ \text{ o }\ E=\frac{Q}{(1+4\pi\varkappa)\,r^2},$$

de donde, teniendo en cuenta que $1+4\pi\varkappa=\varepsilon$, hallamos que:

$$E=\frac{Q}{\varepsilon r^2}=\frac{E_0}{\varepsilon} \tag{3}$$

independientemente del radio de la esfera cargada R. Así tenemos que también en este caso, la intensidad del campo E en el dieléctrico es ε veces menor que la intensidad del campo E_0 originada por las cargas libres.

2. Arriba hemos examinado el caso de una lámina de dieléctrico plano entre las armaduras de un condensador (véase el § 137). Allí se demostró que en este caso, el dieléctrico causa un debilitamiento de la intensidad en ε veces, siendo invariables las cargas libres:

$$E=\frac{E_0}{\varepsilon}.$$

Los dos casos estudiados se caracterizan por que el dieléctrico *homogéneo* llena *todo* el espacio en que el campo no es igual a cero. En este caso, la intensidad del campo disminuye en ε veces. Resulta que esta conclusión es de carácter general: *en un dieléctrico homogéneo que llena por completo un espacio donde el campo es diferente de cero, la intensidad de este campo creada por las cargas libres es ε veces menor que la intensidad del campo de las mismas cargas en el vacío*. En este caso, como $\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{E}_0$, los tres vectores $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$, que entran en la fórmula (1), son paralelos, y basándonos en la ecuación $\varepsilon=1+4\pi\varkappa$ y en la fórmula (2) del § 141, tenemos que:

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}-\mathbf{E}_0=-4\pi\mathbf{P}. \tag{4}$$

Los resultados anteriores no son justos para los dieléctricos *heterogéneos*, ni para el caso cuando el dieléctrico (aunque homogéneo) no llene por completo el espacio ocupado por el campo *) (por

*) Esta regla tiene excepciones, que son los casos de alto grado de simetría. Así, para dieléctrico esférico homogéneo uniformemente cargado introducido en otro dieléctrico infinito homogéneo, la intensidad del campo fuera de la esfe-

ejemplo, trozos independientes de dieléctrico homogéneo introducidos en el campo). Para determinar la intensidad del campo en estos casos hay que tener en cuenta todas las cargas aparentes que surgen, calcular su campo y sumarlo al de las cargas libres. Veamos, por ejemplo, una carga puntual $+q$ (fig. 57) junto a la cual hay un trozo alargado de dieléctrico D. Bajo la influencia del campo de la carga $+q$, en los extremos del dieléctrico S_1 y S_2 surgen las cargas aparentes $-q'$ y $+q'$. Todo el trozo del dieléctrico se transforma en un dipolo de momento determinado p. Como hemos visto (§ 125),

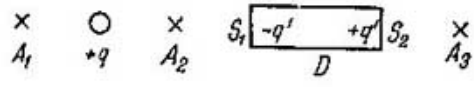


Fig. 57. Trozo de dieléctrico D situado junto a una carga puntual $+q$.

el dipolo forma un campo, cuyas líneas de fuerza salen de su extremo positivo y van a parar al negativo. Veamos tres puntos, A_1, A_2 y A_3 que están en una recta con la carga $+q$. La intensidad del campo E', originada por las cargas aparentes del dielécrico, en los puntos A_2 y A_3 tiene el mismo sentido que la intensidad del campo E_0; mientras que en el punto A_1, tiene sentido contrario. La intensidad resultante del campo $E=E_0+E'$ en el punto A_1 es menor que la intensidad del campo de la carga $+q$; mientras que en los puntos A_2 y A_3 es mayor. Si tomamos un punto que no esté en esta recta, los vectores $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$ de este punto no serán paralelos.

Así, este ejemplo nos indica que en el caso general, entre la intensidad del campo $\mathbf{E}_0$ de las cargas libres y la intensidad del campo $\mathbf{E}'$ de las cargas aparentes, no hay una relación simple.

§ 143. Fuerzas que actúan en los cuerpos cargados cuando hay dieléctricos. Las fuerzas que actúan entre los cuerpos cargados introducidos en un dieléctrico, no se pueden determinar teniendo en cuenta solamente la acción recíproca entre las cargas libres y aparentes. Para demostrarlo, examinemos dos placas paralelas con cargas de signo contrario introducidas en un dieléctrico homogéneo, por ejemplo, en un dieléctico líquido. Si las placas se hallan a una distancia

ra cargada disminuye en ε veces (en el interior no varía). Lo mismo tenemos en el caso de un condensador plano (o esférico) lleno de capas paralelas (o concéntricas) de diferentes dieléctricos homogéneos, en que la intensidad del campo en cada capa será $E_k=\frac{1}{\varepsilon_k}E_0$.

pequeña en comparación con sus dimensiones, el campo creado por ellas se encuentra solamente en el espacio entre las placas. Por eso, quedará polarizada solamente la parte del dieléctrico que haya entre las placas. A causa de la polarización de esta parte del dieléctrico, en las capas del mismo, junto a las placas, surgen cargas superficiales aparentes de densidad $\pm\sigma'$. Estas cargas son equivalentes a dos superficies cargadas paralelas y, por consiguiente, varían el campo solamente en el seno del dieléctrico que se halla entre las placas, sin actuar de ninguna manera sobre las placas. Así llegamos a la conclusión de que en el caso dado, la polarización del dieléctrico no puede variar la fuerza de acción mutua entre las placas (a condición de que las cargas de las placas permanezcan invariables), y las fuerzas de acción recíproca seguirán siendo iguales que en el vacío. En la realidad no ocurre así: la experiencia demuestra que si las placas cargadas paralelas a una distancia pequeña en comparación con sus dimensiones se introducen en un dieléctrico líquido, conservando las cargas invariables, las fuerzas entre ellas disminuyen en ε veces, donde ε es la constante dieléctrica del líquido dado. Lo mismo tendremos si llenamos el espacio con algún gas dieléctrico. Claro está que con un dieléctrico sólido es muy difícil realizar semejante experimento.

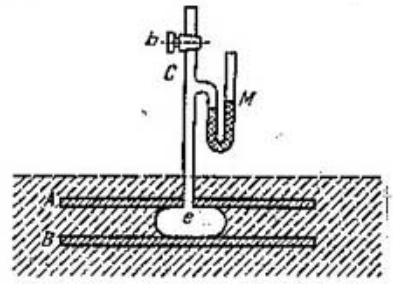


Fig. 58. Presión complementaria.

Esta variación de las fuerzas de acción recíproca entre las placas, que no se consigue explicar con la aparición de las cargas aparentes, es debida a las tensiones mecánicas que surgen en el dieléctrico polarizado.

Si las placas llevan cargas de distintos signos (entre las placas actúan fuerzas de atracción), el dieléctrico líquido o gaseoso es atraído hacia el espacio de entre las placas y crea una fuerza mecánica complementaria que tiende a separar las placas. De resultas de ello, las fuerzas de atracción entre las placas se compensan en parte y, por consiguiente, la atracción es menor que en el vacío. Esta presión complementaria que hay en el seno del dieléctrico entre las placas, se puede comprobar experimentalmente. Dos placas horizontales A y B se introducen en un líquido dieléctrico homogéneo (fig. 58. El dieléctrico ocupa la zona rayada). La placa superior A lleva un tubo vertical C con un manómetro M. Por el extremo superior del tubo C se insufla aire de manera que entre las placas A y B se forme la bolsa e, después se cierra el grifo b. Si se cargan las placas A y B con cargas de diferente signo, el nivel de la derecha del manómetro

www.elsolucionario.org

M se elevará debido al aumento de presión en la bolsa de aire e. Esto último es debido a la atracción del dieléctrico hacia el espacio que hay entre las placas. Si las placas A y B se les comunican cargas del mismo signo, la presión en la bolsa de aire e disminuye, ya que en este caso el líquido dieléctrico será expelido hacia afuera del espacio de entre las placas. Este desplazamiento del líquido dieléctrico es fácil de explicar, si consideramos que consta de moléculas polares. El dipolo, como se ha indicado en el § 135, en un campo variable sufre la acción de una fuerza que le desplaza hacia la zona donde la intensidad del campo es mayor.

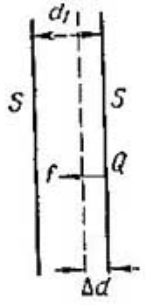


Fig. 59. Fuerzas que actúan sobre las placas de un condensador.

La variación en ε veces de las fuerzas de acción recíproca entre las placas cargadas al introducirlas en un dieléctrico, viene confirmada por el cálculo energético. En el § 140 se ha indicado que la energía de un condensador plano con dieléctrico era:

$$W = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} Sd,$$

donde S es la superficie de las placas del condensador; d, la distancia entre las placas y E, la intensidad del campo entre las placas. (Esta fórmula, hablando rigurosamente, es aproximada y tanto más exacta, cuanto menor sea la distancia d en comparación con las dimensiones de las placas). Como entre la carga Q concentrada en una de las placas y la intensidad del campo E la relación es:

$$Q = \frac{\varepsilon}{4\pi} ES,$$

la fórmula para la energía se puede escribir de la forma siguiente:

$$W = \frac{2\pi Q^2}{\varepsilon S} d.$$

Supongamos que, solicitada por la fuerza de atracción, la placa de la derecha (fig. 59) se desplaza en dirección hacia la de la izquierda recorriendo un pequeño trayecto Δd. Considerando constante la fuerza f que actúa sobre la placa de la derecha, obtenemos que se efectúa un trabajo

$$A = f\Delta d.$$

Este trabajo se realiza debido a la variación de la energía del condensador al disminuir la distancia entre las placas en Δd:

$$\Delta W = \frac{2\pi Q^2}{\varepsilon S} d - \frac{2\pi Q^2}{\varepsilon S} (d - \Delta d) = \frac{2\pi Q^2}{\varepsilon S} \Delta d.$$

Igualando el trabajo a la variación de la energía, nos da:

$$f = \frac{2\pi Q^2}{\varepsilon S}. \qquad (1)$$

En el vacío, la fuerza f_0 que actúa sobre la placa de la derecha, es igual al producto de la intensidad del campo creado solamente por la placa de la izquierda (lo cual es la mitad de la intensidad total del campo entre las placas) por la carga de la placa de la derecha:

$$f_0 = \frac{E_0}{2} Q = \frac{2\pi Q^2}{S}.$$

Comparando esta ecuación con la (1) vemos que al llenar el espacio con un dieléctrico homogéneo, la fuerza de acción recíproca entre las placas disminuye en ε veces, en concordancia con lo obtenido experimentalmente.

El cálculo energético tiene en cuenta automáticamente todas las clases de acción recíproca y por eso el resultado es justo; mientras que al considerar la acción mutua solamente entre las cargas libres y aparentes, no se tenía en cuenta por completo el papel del dieléctrico, ya que no se consideraba el cambio de sus propiedades mecánicas (presión y densidad), que se producen bajo la acción del campo eléctrico.

Este resultado obtenido se puede generalizar. De la fórmula (2) del § 140, para la densidad de la energía del campo (justa para todos los cuerpos isótropos) se deduce (de manera análoga al cálculo hecho para el condensador plano), que *al sumergir cuerpos cargados en un dieléctrico homogéneo que llena por completo todo el espacio donde el campo es diferente de cero, las fuerzas de acción recíproca entre los cuerpos disminuyen en ε veces.*

De esto se deduce que dos cargas puntuales q_1 y q_2 situadas a una distancia r una de otra en el interior de un dieléctrico homogéneo infinito, actúan con una fuerza mutua de:

$$f = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}. \qquad (2)$$

Esta fórmula expresa la *ley de Coulomb* para el caso de cargas sumergidas en un dieléctrico homogéneo: *la fuerza de acción recíproca entre cargas puntuales puestas en un dieléctrico homogéneo infinito, es ε veces menor que las fuerzas de acción recíproca entre las mismas cargas a la misma distancia en el vacío.* Si el dieléctrico no es homogéneo o infinito, la fórmula (2) no será justa. Aproximadamente será justa, si los extremos límites del dieléctrico están bastante alejados de las cargas sumergidas en él.

En el caso general de dieléctricos homogéneos y finitos, su influencia sobre las fuerzas de acción recíproca de las cargas no se expresa

mediante sencillas relaciones, como se ha visto en el ejemplo estudiado en la pág. 90. La heterogeneidad del dieléctrico puede ser debida a que el cuerpo cargado, sobre el cual se determina la acción de la fuerza, se ha introducido en una cavidad del dieléctrico homogéneo e infinito. Al haber una cavidad se excluye la acción de las fuerzas de parte del dieléctrico sometido a tensiones y solamente importan las cargas aparentes. En este caso, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo cargado, dependen de la forma de la cavidad en que se ha introducido el cuerpo (véase el § 145).

Hay que observar que entre la fórmula (2) y la ley de Coulomb para las cargas puntuales en el vacío hay una diferencia de principio. Ambas fórmulas tienen el mismo sentido solamente cuando entendemos por cargas puntuales las concentradas en cuerpos macroscópicos, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia entre los mismos. Pero la ley de Coulomb para las cargas en el vacío se puede interpretar de manera diferente, a saber, en forma diferencial considerando que expresa la fuerza de acción recíproca df entre dos cargas elementales imaginarias dq_i y dq_k en que se pueden mentalmente dividir cargas finitas q_i y q_k, cualesquiera que sean. En este caso, la fuerza de acción recíproca entre las cargas q_i y q_k la expresa la suma de las fuerzas df extendida a toda clase de pares de cargas dq_i y dq_k. En esta forma diferencial, la fórmula (2) no se puede aplicar, ya que con dieléctricos, las fuerzas que actúan sobre el par de cargas dado dq_i y dq_k, como hemos visto, se deben, además, a otras causas.

Resumiendo lo dicho en los últimos párrafos tenemos que en un dieléctrico homogéneo que llena por completo todo el espacio en que el campo es diferente de cero, la intensidad del campo $\mathbf{E}$ es ε veces menor que la intensidad $\mathbf{E}_0$ del mismo campo que originarían las cargas libres dadas sin dieléctrico. Estas fuerzas de acción recíproca entre los cuerpos cargados disminuyen en ε veces al sumergirlos en un dieléctrico homogéneo que llene por completo todo el espacio en que el campo es diferente de cero. Por consiguiente, tanto en este caso como en el vacío, la fuerza $\mathbf{f}$ que actúa sobre una carga q viene determinada por la igualdad $\mathbf{f}=q\mathbf{E}$.

Sin embargo esta ecuación no es justa para cualquier dieléctrico. El caso es que la carga q sumergida en el dieléctrico, generalmente no está concentrada en el dieléctrico, sino en otro cuerpo (por ejemplo, en un conductor) y sobre éste actúa un campo diferente del campo que hay en el interior del dieléctrico junto al cuerpo. Esto lo hemos visto en el ejemplo de acción recíproca de dos placas paralelas cargadas, donde el campo en el lugar en que están las cargas, es distinto al del dieléctrico junto a las superficies de las placas. Además, en el mismo ejemplo hemos visto que si queremos determinar la fuerza en función de la intensidad del campo en el lugar dondo están las cargas, no obtendremos el verdadero valor de la fuerza. Esto es debido a que no tenemos en cuenta las fuerzas mecánicas complementarias que actúan en el cuerpo de parte del dieléctrico. Estas fuerzas surgen debido a las tensiones que se forman en el die-

www.elsolucionario.org

léctrico en los lugares de irregularidades del campo, y donde el propio dieléctrico es heterogéneo (incluida la zona limítrofe entre el cuerpo cargado y el dieléctrico).

Solamente en los casos particulares en que la intensidad del campo en el dieléctrico y la fuerza que actúa sobre la carga, son el mismo número de veces (ε veces) menores que las mismas magnitudes sin dieléctrico (es decir, dieléctrico homogéneo que llene por completo todo el espacio en que el campo es diferente de cero), la fórmula $\mathbf{f}=q\mathbf{E}$ es justa y permite determinar la intensidad del campo $\mathbf{E}$ *en el dieléctrico* en función de la fuerza $\mathbf{f}$.

En general, de lo dicho se deduce que *no se puede determinar la intensidad del campo* $\mathbf{E}$ *en el dieléctrico en función de la fuerza que actúa sobre una carga*, si no está concentrada en un cuerpo cualquiera. Y viceversa: la intensidad del campo $\mathbf{E}$ en el dieléctrico no determina a las fuerzas que actúan sobre los cuerpos cargados.

En el § 145 se hablará con más detalle del sentido físico del vector $\mathbf{E}$.

En una serie de problemas de electrostática, el cálculo de las fuerzas que actúan se puede realizar basándose en los siguientes razonamientos. Supongamos que en un sistema aislado de cuerpos cargados, la energía del campo electrostático es función de una serie de parámetros que caracterizan la dislocación de los cuerpos en el sistema. Estos parámetros pueden ser, por ejemplo, las coordenadas de los puntos del sistema de cuerpos, o la distancia entre los cuerpos, o los ángulos que determinan la disposición de las barras, hilos, etc.

Llamemos coordenadas generalizadas a estos parámetros y designémoslas con las letras $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Así, para la energía W del sistema tenemos que:

$$W = W(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Al variar uno de los parámetros x_i en la magnitud Δx_i, las fuerzas electrostáticas realizarán un trabajo que será proporcional a Δx_i y, por consiguiente, se puede representar de la siguiente manera:

$$\Delta A_i = f_i \Delta x_i.$$

La magnitud f_i que entra en esta expresión la llamaremos fuerza generalizada.

El trabajo se efectúa a costa de una disminución de la energía del campo electrostático, disminución relacionada con la variación del parámetro x_i. Así tenemos que:

$$\Delta A_i = f_i \Delta x_i = -\Delta W,$$

de donde, para la fuerza generalizada, obtenemos la ecuación:

$$f_i = -\frac{\Delta W}{\Delta x_i}.$$

La relación $\frac{\Delta W}{\Delta x_i}$ nos da, al tender Δx_i a cero, la derivada parcial de la energía respecto a la coordenada generalizada x_i (los demás parámetros permanecen constantes), es decir, nos da:

$$f_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}. \tag{3}$$

La energía del sistema no sólo es una función de las coordenadas generalizadas, sino también lo es de las características eléctricas de los cuerpos, por ejemplo, de las cargas que hay en los cuerpos, o de los potenciales de los cuerpos. En un sistema aislado, las cargas de los distintos cuerpos permanecen invariables, mientras que los potenciales de los cuerpos que entran en el sistema, varían. Por consiguiente, en la expresión (3), la energía debe representarse como una *función de las cargas de los cuerpos.*

Si, según la condición del problema, los potenciales de los cuerpos se suponen constantes, las cargas de los mismos no pueden ser constantes y el sistema de cuerpos no puede ser un sistema aislado: el sistema tiene que tener algún contacto con cuerpos exteriores que no entran en el sistema. En este caso se puede demostrar que la fuerza generalizada también se puede representar como una derivada parcial de la energía en función de la coordenada generalizada pero en este caso la energía se debe expresar en función de las coordenadas generalizadas y de los *potenciales de los cuerpos*, lo cual acarrea, como se puede demostrar, el que la derivada que expresa la fuerza generalizada, se debe tomar con el signo más:

$$f_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}.$$

Ilustremos estos razonamientos con ejemplos. Supongamos que se necesita calcular la fuerza que actúa sobre las armaduras de un condensador plano. La energía del sistema en este caso, será:

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon E^2 S d.$$

Esta energía puede expresarse en función de las cargas de las armaduras, o en función de la diferencia de potencial entre las mismas:

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\right)^2 S d, \tag{4}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2 S d. \tag{5}$$

En el caso dado, la coordenada generalizada será la distancia d entre las armaduras del condensador. La fuerza generalizada será

sencillamente la fuerza que actúa sobre las armaduras del condensador, ya que al variar la distancia d en la magnitud Δd, las fuerzas que actúan sobre las armaduras realizan un trabajo $f\Delta d$.

Calculemos la fuerza según las ecuaciones (4) y (5). Según la (4) tenemos que:

$$f = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} S.$$

El signo menos indica que al aumentar la distancia, se efectúa un trabajo negativo, es decir, en las armaduras actúa una fuerza de *atracción* (de una armadura hacia la otra).

Según la (5) tenemos que:

$$f = \frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{1}{8\pi}\varepsilon\left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2 S = -\frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} S,$$

es decir, hemos obtenido una expresión que coincide con lo deducido anteriormente [fórmula (1)].

§ 144. Vector de desplazamiento eléctrico. Cuando tratamos del campo electrostático en el vacío, analizamos las líneas de fuerza. En el vacío, las líneas de fuerza tienen la propiedad de extenderse ininterrumpidamente de unas cargas a otras o se pierden en el infinito. En los dieléctricos ya no es lo mismo, si se tienen en cuenta solamente las cargas libres. Por ejemplo, en las superficies límites del dieléctrico surgen cargas aparentes superficiales, y parte de las líneas de fuerza terminará o empezará en ellas. Así, las líneas de fuerza no atravesarán ininterrumpidas la superficie límite de los dieléctricos. Debido a ello, a los dieléctricos heterogéneos no se puede aplicar el teorema de Ostrogradski-Gauss en la forma dada en el § 126.

No obstante, para caracterizar el campo en el seno del dieléctrico, se puede introducir un nuevo vector **D**, cuyas líneas pasan ininterrumpidas por los dieléctricos (tanto homogéneos, como heterogéneos), y por las superficies divisorias. Este vector se denomina *vector de desplazamiento eléctrico* (*o vector de inducción o de excitación eléctrica* en un dieléctrico), y está relacionado con el vector de intensidad del campo **E** mediante la ecuación:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad (1)$$

donde ε es el valor de la constante dieléctrica en el punto del dieléctrico donde se determina el valor del vector **D**.

El valor del vector **D** se puede expresar de otra forma. Según lo dicho en el § 139, tenemos que $\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$, de donde

$$\mathbf{D} = (1 + 4\pi\varkappa)\,\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\varkappa\mathbf{E},$$

www.elsolucionario.org

pero $\varkappa \mathbf{E} = \mathbf{P}$, donde $\mathbf{P}$ es el vector de polarización (véase el § 141). De esto se deduce que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{1a}$$

es decir, el vector de desplazamiento se expresa como la suma del vector de intensidad del campo $\mathbf{E}$ y del vector de polarización $\mathbf{P}$ multiplicado por 4π.

De la (1) se deduce que el vector de desplazamiento $\mathbf{D}$, en cada punto dado, tiene la misma dirección y sentido que al vector de intensidad $\mathbf{E}$ *), pero de valor numérico ε veces mayor que el de intensidad. En el vacío, los vectores $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ coinciden.

Las líneas de fuerza del vector de desplazamiento las construiremos de la misma manera que construimos en el vacío las líneas de

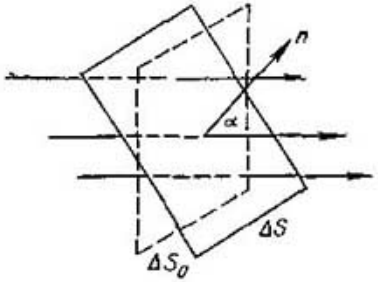


Fig. 60. Superficie elemental inclinada respecto a las líneas del vector de desplazamiento D.

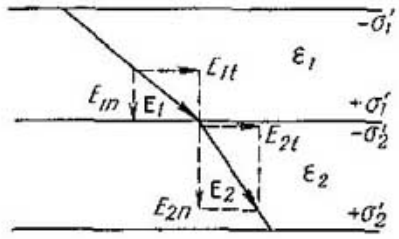


Fig. 61. Determinación de las condiciones límites del vector de intensidad del campo E.

fuerza del vector de intensidad del campo. Denominaremos *línea de fuerza del vector de desplazamiento* la línea cuya tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección y sentido del vector de desplazamiento. Consideraremos que la dirección de la propia línea de fuerza coincide con la del vector de desplazamiento en el mismo punto. La cantidad de líneas de fuerza de desplazamiento que hay que trazar, se deduce de la ecuación que dice: la relación entre el número de líneas de fuerza de desplazamiento ΔN que atraviesan una pequeña superficie ΔS_0 perpendicular a estas líneas y el área de la superficie ΔS_0, es igual numéricamente al valor del vector de desplazamiento en la superficie dada:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = D. \tag{2}$$

Si tomamos una superficie ΔS arbitrariamente orientada (fig. 60),

*) Para los cristales, la dirección del vector D puede ser distinta de la del vector E.

nos da que:

$$\Delta N = D\Delta S_0 = D\Delta S \cos\alpha = D_n \Delta S, \tag{3}$$

donde D_n es la proyección del vector de desplazamiento sobre la normal a la superficie ΔS. La magnitud ΔN se puede denominar *flujo del vector de desplazamiento* a través de la superficie ΔS. Si la superficie es de dimensiones finitas, se debe dividir en pequeños elementos ΔS y calcular el flujo a través de cada uno de los elementos; entonces, el flujo total del vector de desplazamiento será la suma de todos los flujos elementales:

$$N = \sum_S D_n \Delta S. \tag{4}$$

Para demostrar que las líneas de fuerza del vector de desplazamiento son continuas, examinemos dos capas planas homogéneas de dieléctricos de constantes dieléctricas ε_1 y ε_2 (fig. 61). Supongamos que la intensidad del campo $\mathbf{E}_0$ de las cargas libres forma ángulo con la línea divisoria de los dieléctricos. En las superficies límites surgen cargas aparentes superficiales: formando en el primer dieléctrico densidades de carga $+\sigma'_1$ y $-\sigma'_1$, y en el segundo, $+\sigma'_2$ y $-\sigma'_2$. Las cargas $+\sigma'_1$ y $-\sigma'_1$ crean en el primer dieléctrico una intensidad de campo:

$$E'_1 = -4\pi\sigma'_1$$

dirigida perpendicularmente a las superficies límites del dieléctrico en sentido contrario a la componente normal E_{0n}. Fuera de este dieléctrico, las cargas $+\sigma'_1$ y $-\sigma'_1$ no crean ningún campo.

De la misma manera, las cargas $+\sigma'_2$ y $-\sigma'_2$, crean en el segundo dieléctrico una intensidad del campo:

$$E'_2 = -4\pi\sigma'_2,$$

normal a las superficies límites de este dieléctrico. Estas intensidades complementarias $\mathbf{E}'_1$ y $\mathbf{E}'_2$ originadas por las cargas aparentes, varían solamente las componentes normales de la intensidad primitiva $\mathbf{E}_0$ y no varían las componentes tangentes a la línea divisoria. Como la suma de estas dos intensidades $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{E}'$, por definición, nos da la intensidad del campo en los dieléctricos (§ 142), para la componente normal de la intensidad del campo en el primer dieléctrico tenemos:

$$E_{1n} = E_{0n} - 4\pi\sigma'_1, \tag{5}$$

y para la componente tangencial:

$$E_{1t} = E_{0t}. \tag{6}$$

De la misma manera hallamos que las componentes de la intensidad del campo del segundo dieléctrico, son:

$$E_{2n} = E_{0n} - 4\pi\sigma'_2, \tag{5a}$$

$$E_{2t} = E_{0t}. \tag{6a}$$

De las ecuaciones (6) y (6a) obtenemos que:

$$E_{1t} = E_{2t}, \tag{7}$$

es decir, que la componente tangencial de la intensidad del campo es continua al pasar por la línea divisoria de los dieléctricos.

Para las densidades superficiales de cargas aparentes σ'_1 y σ'_2 tenemos que: $\sigma'_1 = \varkappa_1 E_{1n}$ y $\sigma'_2 = \varkappa_2 E_{2n}$, donde $\varkappa_1$ y $\varkappa_2$ son las susceptibilidades eléctricas de los dieléctricos primero y segundo respectivamente. Por lo tanto, las ecuaciones (5) y (5a) adquieren el aspecto:

$$(1 + 4\pi\varkappa_1) E_{1n} = E_{0n}, \quad (1 + 4\pi\varkappa_2) E_{2n} = E_{0n}.$$

Observando que $1 + 4\pi\varkappa_1 = \varepsilon_1$ y $1 + \pi\varkappa_2 = \varepsilon_2$, de estas dos ecuaciones hallamos que:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \tag{8}$$

Así tenemos que la componente normal de la intensidad del campo se interrumpe al pasar la línea divisoria de los dieléctricos. Las ecuaciones (7) y (8) son las *condiciones límites del vector* **E**. De ellas, y basándonos en la relación $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}$, obtenemos *las condiciones límites del vector de desplazamiento* **D**:

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}, \quad D_{1n} = D_{2n}. \tag{9}$$

La componente normal del vector de desplazamiento D_n es continua al pasar la línea divisoria de los dieléctricos, mientras que la componente tangencial se interrumpe.

Supongamos que en el primer dieléctrico el vector de desplazamiento $\mathbf{D}_1$ forma con la normal a la línea divisoria un ángulo α_1, y en el segundo dieléctrico, el vector $\mathbf{D}_2$ forma el ángulo α_2. Descomponiendo $\mathbf{D}_1$ en D_{1t} y D_{1n}, y el $\mathbf{D}_2$ en D_{2t} y D_{2n} (fig. 62), tenemos que:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}, \text{ de donde } \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} \cdot \frac{D_{2n}}{D_{1n}}.$$

De la última igualdad y teniendo en cuenta las condiciones límites (9), hallamos que:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{10}$$

www.elsolucionario.org

Esta relación expresa *la ley de la refracción de las líneas de fuerza de desplazamiento* en las superficies de contacto de dos dieléctricos.

Las condiciones límites (9) del vector de desplazamiento D corresponden precisamente a la continuidad de las líneas de fuerza del desplazamiento eléctrico que atraviesan las líneas divisorias de los dos dieléctricos. Supongamos que las líneas de fuerza del vector de desplazamiento eléctrico atraviesan, refractándose, la línea

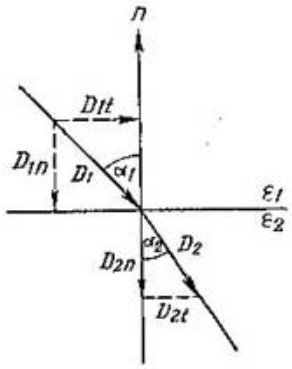


Fig. 62. Refracción de las líneas de fuerza de desplazamiento en las superficies de contacto de dos dieléctricos.

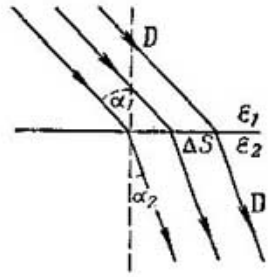


Fig. 63. Continuidad de las líneas de fuerza de desplazamiento al atravesar la línea divisoria de dos dieléctricos.

divisoria de dos dieléctricos (fig. 63). El número de líneas de fuerza del desplazamiento ΔN_1 que penetra por el área ΔS de la superficie divisoria del primer dieléctrico, por definición, es

$$\Delta N_1 = D_{1n}\Delta S.$$

Del segundo dieléctrico, de la misma superficie ΔS, sale un flujo del vector de desplazamiento:

$$\Delta N_2 = D_{2n}\Delta S.$$

Pero, según las condiciones (9), tenemos que $D_{1n}=D_{2n}$, por consiguiente

$$\Delta N_1 = \Delta N_2.$$

Así tenemos que las líneas de fuerza del desplazamiento eléctrico pasan continuamente por la superficie.

En el caso de un dieléctrico heterogéneo, se puede dividir mentalmente en capas tan finas que cada una de ellas se pueda considerar homogénea. Entonces las líneas de fuerza del desplazamiento eléctrico pasarán continuamente de una capa a otra y, por consiguiente, pasarán ininterrumpidamente por el seno del dieléctrico.

Para el dieléctrico homogéneo que llena por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, el vector de desplazamiento eléctrico D coincide con el de la intensidad del campo de las cargas libres $\mathbf{E}_0$. Esto se deduce de que en un dieléctrico de esta clase $\mathbf{E}=\frac{\mathbf{E}_0}{\varepsilon}$ (véase el § 142), de donde $\mathbf{E}_0=\varepsilon\mathbf{E}=\mathbf{D}$.

Para el campo en el seno del dieléctrico, el teorema de Ostrogradski-Gauss adquiere otra forma. Sea un dieléctrico polarizado. Calculemos el flujo eléctrico que pasa a través de una superficie cerrada cualquiera S del interior del dieléctrico. La carga total Q del interior de la superficie consta de dos partes: carga libre Q_0 introducida en el dieléctrico desde fuera, y la carga aparente Q', formada por la polarización del dieléctrico. Así tenemos que

$$\sum E_n \Delta S = 4\pi Q = 4\pi (Q_0 + Q'), \qquad (11)$$

donde n indica la normal exterior en los puntos de la superficie S.

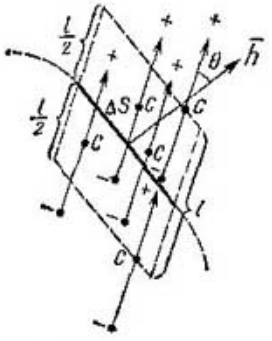


Fig. 64. Representación gráfica para el cálculo de la carga aparente.

Calculemos la carga Q'. Está claro que las moléculas que caen por entero dentro de la superficie S no crearán en el interior de esta superficie carga libre alguna. Las cargas libres las crearán solamente las moléculas que han sido divididas por la superficie S. Las moléculas en que fuera de la superficie S hayan quedado las cargas positivas, crearán una carga negativa dentro de la superficie, y aquellas en que fuera de la superficie hayan quedado las cargas negativas, crearán dentro de la superficie S una carga positiva. Sea el elemento de superficie ΔS. Calculemos cuántas moléculas divide este elemento. Supongamos que en las proximidades del elemento ΔS los momentos polares de las moléculas son de igual magnitud y dirección e iguales a $\mathbf{p}=q\mathbf{l}$, donde l es la distancia entre las cargas positivas y negativas de las moléculas. Supongamos que los ejes de los dipolos (de dirección l) forman un ángulo θ con la normal exterior n al elemento ΔS. Está claro que el elemento ΔS dividirá las moléculas cuyos centros C disten del elemento ΔS en no más de $\frac{l}{2}$ según la dirección de l a ambos lados de la superficie (véase la fig. 64, donde l es la longitud del dipolo). De esta manera, el elemento ΔS divide las moléculas cuyos centros de los dipolos están comprendidos en el volumen de un cilindro oblicuo de base ΔS y de generatriz de longitud igual a l. Suponiendo que el número de centros de dipolos por unidad de volumen es n_0, tenemos que el número de moléculas que divide el ele-

mento ΔS es de

$$n_0 \Delta S l \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l}).$$

Cada molécula dividida forma en el interior de la superficie S una carga negativa q, si la dirección de l forma un ángulo agudo con la de n (el sentido de l es desde la carga positiva a la negativa). Así tenemos que, al dividir el elemento de la superficie ΔS a las moléculas, en el interior de la superficie se crea una carga negativa verdadera igual a

$$-qn_0 l \Delta S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})$$

(si el elemento ΔS tiene una normal exterior que forme ángulo agudo con la dirección de l, la expresión arriba dada tendrá una carga positiva). Al mismo tiempo tenemos que $ql n_0 = \mathbf{P}$, que es el vector de polarización del medio (momento de la unidad de volumen); por consiguiente, la carga excesiva creada por las moléculas divididas por el elemento ΔS, puede representarse de la siguiente manera:

$$-P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{P}) \Delta S = -P_n \Delta S.$$

Aquí P_n es la proyección del vector de polarización sobre la normal exterior n al elemento ΔS.

La carga total en el interior de toda la superficie S la obtenemos sumando las cargas de todos los elementos ΔS:

$$Q' = -\sum P_n \Delta S.$$

Colocando en la (11) este valor de Q', hallamos que

$$\sum E_n \Delta S = 4\pi (Q - \sum P_n \Delta S)$$

o

$$\sum (E_n + 4\pi P_n) \Delta S = 4\pi Q.$$

Pero la suma $\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ es el vector de desplazamiento eléctrico D, de donde, definitivamente tenemos que

$$\sum D_n \Delta S = 4\pi Q.$$

Este resultado es la expresión del teorema de Ostrogradski-Gauss para los dieléctricos: el flujo del vector del desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada cualquiera es igual al producto de 4π por la carga *libre* comprendida en el interior de la superficie.

En el § 130 se ha demostrado que entre la intensidad del campo electrostático E y la densidad de las cargas volumétricas ρ hay la siguiente relación:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \qquad (12)$$

o

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \qquad (12a)$$

www.elsolucionario.org

En el caso del dieléctrico, ρ es la densidad volumétrica tanto de las cargas libres como de las aparentes. Si hay dieléctricos, la densidad volumétrica de las cargas libres ρ_0 determina la divergencia del vector **D**. Efectivamente, según la fórmula (1a),

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

donde P es el vector de polarización. De donde:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{E} + 4\pi \operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{13}$$

Según lo dicho en el § 141, $\operatorname{div} P = -\rho'$, donde ρ' es la densidad volumétrica de las cargas aparentes. Colocando en la (13) este valor de div P y el de div E de la (12a), obtenemos que:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi(\rho - \rho'),$$

pero $\rho' - \rho = \rho_0$, donde ρ_0 es la densidad volumétrica de las cargas libres, de donde hallamos que:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_0. \tag{14}$$

Así tenemos que la divergencia del vector **D** viene determinada solamente por la densidad de las cargas libres.

La ecuación (12a) del vector **E** la hemos obtenido como corolario del teorema de Ostrogradski — Gauss. Se puede demostrar, a la inversa, que si se satisface la ecuación (12a), se cumple el teorema de Ostrogradski — Gauss. De la misma manera, de la ecuación (14) se deduce que en cualquier dieléctrico, el vector **D** cumple el teorema de Ostrogradski —Gauss, pero se han de tener en cuenta solamente las cargas libres.

§ 145. Determinación de los vectores E y D por las fuerzas que actúan sobre la carga. En el vacío hemos determinado la intensidad del campo **E** en función de la fuerza que actúa sobre una carga unidad positiva (§ 124). Si sobre la carga q colocada en el punto dado del campo, actúa la fuerza **f**, la intensidad del campo **E** en este punto la determina la ecuación:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}}{q}. \tag{1}$$

En este caso es muy importante tener en cuenta las dos circunstancias siguientes: 1) la carga de prueba q debe ser puntual, es decir, debe estar concentrada en un cuerpo de dimensiones tan pequeñas, que la intensidad del campo dentro de sus límites sea constante; 2) la introducción de la carga q no debe producir ninguna variación ni en la magnitud ni en la disposición de las cargas que crean el campo. Prácticamente se pueden satisfacer estas dos condiciones tomando una carga q muy pequeña y concentrándola en un cuerpo de dimensiones pequeñas en comparación con la distancia a cualquiera de las cargas que crean el campo.

En el dieléctrico la intensidad del campo **E** la hemos determinado (§ 142) como la suma de intensidades: $\mathbf{E}_0$, producida por las cargas

libres, y $\mathbf{E}'$, originada por las cargas aparentes:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

Como se ha indicado en el § 143, las fuerzas que actúan sobre los cuerpos cargados situados en el interior de un dieléctrico, no vienen determinadas, estrictamente hablando, por la ecuación $\mathbf{f} = q\mathbf{E}$, donde q es la carga concentrada en el cuerpo a examinar. Esto es debido a que en la superficie límite entre el cuerpo

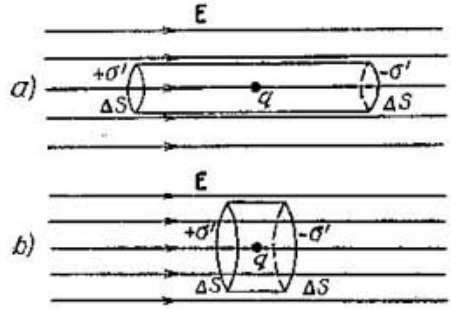


Fig. 65. Cavidad en un dieléctrico: *a*) en forma de cilindro estrecho y largo y *b*) en forma de cilindro corto y ancho.

y el dieléctrico surgen cargas aparentes superficiales y complementarias, cuyo valor depende de la magnitud de la carga q y de las dimensiones y forma del cuerpo en que se halla la carga. Además, en el mismo dieléctrico y en las zonas limítrofes con el cuerpo aparecen tensiones mecánicas, que también crean ciertas fuerzas. Las cargas aparentes complementarias no desaparecen incluso cuando las dimensiones del cuerpo son pequeñas; por eso no se puede determinar la intensidad del campo $\mathbf{E}$ en el dieléctrico basándose en la ecuación (1) y utilizando una carga de prueba q.

Se pueden evitar las fuerzas mecánicas originadas por las tensiones en el dieléctrico, si *hacemos una cavidad en el dieléctrico* y colocamos en su interior la carga de prueba de modo que no toque las paredes. No obstante, en este caso, la fuerza que actúa sobre la carga de prueba q *depende de la forma y dimensiones* de la cavidad y, por consiguiente, rigurosamente hablando, no la determina sólo la intensidad del campo $\mathbf{E}$ en el interior del dieléctrico.

Sea un dieléctrico homogéneo infinito. Hagamos una cavidad en su interior en forma de cilindro estrecho y largo de generatrices paralelas a las líneas de fuerza de la intensidad $\mathbf{E}$ (fig. 65,*a*). Introduzcamos en la parte media de esta cavidad una carga de prueba q tan pequeña y concentrada en un cuerpo de dimensiones tan pequeñas,

que se puedan despreciar las cargas aparentes que pueda originar esta carga q en las superficies de la cavidad, y se pueda considerar que sobre esta carga actúa solamente el campo $\mathbf{E}$ y las cargas aparentes $\pm\sigma'$ que este campo crea en las superficies límites de la cavidad. En estas condiciones, la fuerza que actúa sobre la carga de prueba q, es igual a

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + \mathbf{f}', \qquad (2)$$

donde $\mathbf{f}'$ es la fuerza originada por las cargas aparentes $\pm\sigma'$. Como las generatrices del cilindro son paralelas al vector $\mathbf{E}$, las cargas aparentes surgirán solamente en las bases ΔS del cilindro, y la magnitud de estas cargas será igual a $Q_i = \pm\sigma'\Delta S$. Si el cilindro es estrecho y largo, las cargas Q_i son pequeñas (las superficies ΔS son pequeñas), y estarán lejos de la carga de prueba q. Por eso, la fuerza $\mathbf{f}'$ será pequeña en comparación con $q\mathbf{E}$ y se puede despreciar; entonces la ecuación (2) nos da:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}$$

Por consiguiente, *la fuerza que actúa sobre una pequeña carga de prueba situada en la parte media de una cavidad en forma de cilindro largo y estrecho, cuyas generatrices son paralelas a las líneas de fuerza de la intensidad, viene determinada en función de la intensidad del campo* $\mathbf{E}$ *en el dieléctrico.*

Veamos ahora una cavidad de otra forma: en la de un corto y ancho cilindro de base ΔS perpendicular a las líneas de fuerza de la intensidad $\mathbf{E}$ (fig. 65,*b*). Ahora no se puede despreciar la acción de las cargas aparentes $Q_i = \pm\sigma'\Delta S$.

Considerando las bases del cilindro como dos planos paralelos infinitamente grandes, tenemos que las cargas aparentes Q_i crean un campo entre ellas, cuyo valor de la intensidad es

$$E' = 4\pi\sigma' = 4\pi\varkappa E.$$

Esta intensidad origina una fuerza de valor

$$\mathbf{f}' = q \cdot 4\pi\varkappa\mathbf{E},$$

después de lo cual, la ecuación (2) nos da

$$\mathbf{f} = q\,(\mathbf{E} + 4\pi\varkappa\mathbf{E}) \text{ ó } \mathbf{f} = q\,(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}),$$

donde $\mathbf{P}$ es el vector de polarización. Pero, según la ecuación (1a) del § 144

$$\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \mathbf{D},$$

donde $\mathbf{D}$ es el vector del desplazamiento eléctrico. Por lo tanto,

$$\mathbf{f} = q\mathbf{D}, \qquad (3)$$

www.elsolucionario.org

es decir, *la fuerza que actúa sobre una pequeña carga de prueba situada en la parte media de una cavidad en forma de cilindro corto y ancho de bases perpendiculares a las líneas de fuerza, viene determinada en función del vector del desplazamiento eléctrico* **D** en el dieléctrico.

De lo dicho, vemos de nuevo que la fuerza que actúa sobre una carga de prueba introducida en una cavidad depende de las dimensiones y forma de la cavidad. En particular, a la cavidad se le puede dar tal forma, que la fuerza que actúa sobre la carga de prueba introducida en ella, venga determinada en función de la intensidad del campo **E** en el dieléctrico, o en función del desplazamiento eléctrico **D**.

Al mismo tiempo se puede aclarar el sentido físico del vector **E** de otra manera. Para ello, como carga de prueba no elegimos una carga concentrada en un cuerpo macroscópico (aunque sea muy pequeño), sino una partícula elemental cargada cualquiera, por ejemplo, el electrón. Un electrón individual siempre se halla en el vacío, incluso si está entre moléculas de un cuerpo sólido. El valor de la fuerza **f** que actúa sobre este electrón, dividido por la magnitud de su carga e, determinará la intensidad del campo en el punto donde se halla el electrón. Este valor de la intensidad lo designaremos por $\mathbf{E}_{micro}$, donde el subíndice "micro" denota que la intensidad del campo viene determinada con ayuda de una partícula microscópica. El valor de la intensidad del campo $\mathbf{E}_{micro}$ será diferente, según el electrón esté cerca de una u otra carga que entre en la composición de las moléculas. Pero si colocamos consecutivamente al electrón en puntos de pequeño volumen físico elegidos arbitrariamente y hallamos el valor medio de $\overline{\mathbf{E}}_{micro}$, este valor vendrá determinado solamente con el conjunto de todas las cargas, libres y aparentes, es decir, nos dará precisamente la intensidad del campo **E** en los límites del volumen dado del dieléctrico.

Es importante señalar que al determinar $\mathbf{E}_{micro}$, hemos situado al electrón en puntos arbitrariamente elegidos respecto a las moléculas del dieléctrico. Si se eligen *determinadas moléculas* en el interior del dieléctrico, la intensidad media del campo $\mathbf{E}_1$ que actúa en los límites del volumen donde hay una *molécula*, será distinta de la $\overline{\mathbf{E}}_{micro}$ y, por consiguiente, de la intensidad del campo **E**. Esto es debido a que, en este caso, se trata del valor medio de *la intensidad del campo, determinado para los puntos donde están los centros de las moléculas*, suponiendo que cada vez la propia molécula ha sido retirada. Así tenemos que los puntos para los cuales se ha tomado el valor medio, *no han sido elegidos arbitrariamente* y, con respecto a ellos, las demás moléculas del dieléctrico polarizado no están situadas caóticamente ni crean su campo complementario.

Los cálculos correspondientes demuestran que la intensidad media del campo $\mathbf{E}_1$ que actúa sobre la molécula que se halla en el

interior de un dieléctrico isótropo, es igual a

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}, \tag{4}$$

donde P es el vector de polarización.

§ 146. Dieléctricos dipolares. Determinación de los momentos dipolares de las moléculas. Hasta ahora hemos considerado que el resultado de polarización del dieléctrico es el mismo independientemente de que las moléculas tuvieran primeramente momento polar o de que este momento dipolar haya surgido bajo la influencia de un campo exterior. Sin embargo, hay fenómenos que permiten establecer la diferencia entre los dieléctricos de moléculas polares y de las apolares y calcular los momentos dipolares de las moléculas propiamente polares.

Hasta ahora hemos considerado que el valor del vector de polarización P lo determina la ecuación

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E},$$

donde E es la intensidad del campo en el dieléctrico y $\varkappa$ la susceptibilidad eléctrica. Supongamos ahora que P pueda ser expresado de la manera siguiente:

$$\mathbf{P} = \alpha n_0 E_1, \tag{1}$$

donde n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen, E_1 el valor medio de la intensidad del campo que actúa sobre las moléculas, y α la susceptibilidad de las moléculas.

Colocando en la (1) el valor de $\mathbf{E}_1$ según la fórmula (4) del § 145, hallamos que:

$$\mathbf{P} = \alpha n_0 \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right),$$

de donde

$$\mathbf{P}\left(1 - \frac{4\pi}{3}\alpha n_0\right) = \alpha n_0 \mathbf{E}. \tag{2}$$

No obstante, utilizando la relación $\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E}$ y observando que $1 + 4\pi\varkappa = \varepsilon$, donde ε es la constante dieléctrica, podemos escribir, por otro lado:

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}.$$

Colocando este valor de P en la fórmula (2), tenemos:

$$\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}\left(1 - \frac{4\pi}{3}\alpha n_0\right) = \alpha n_0 \mathbf{E},$$

de donde, después, de simples transformaciones algebraicas hallamos que:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{1}{n_0} = \frac{4\pi}{3}\alpha.$$

El número de moléculas por unidad de volumen n_0 es igual a $N\frac{\delta}{\mu}$, donde μ es el peso molecular de la sustancia del dieléctrico, δ su densidad y N el número de Avogadro; de donde obtenemos que:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\mu}{\delta}=\frac{4\pi}{3}\alpha N. \tag{3}$$

Como la susceptibilidad eléctrica de las moléclas α es una magnitud constante para cada clase de moléculas, la magnitud $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\mu}{\delta}$ para cada dieléctrico dado será también una magnitud constante, independiente de la variación de su densidad originada por cualquier causa exterior, por ejemplo, por la presión, variación de temperatura, etc. La magnitud $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\mu}{\delta}$ se denomina *polarización molecular*. La independencia de la polarización molecular respecto a la densidad δ se puede comprobar experimentalmente en los gases, cuya densidad varía fácilmente bajo la acción de una presión exterior.

La ecuación (3) de la polarización molecular es justa para los dieléctricos no polares (apolares). En los dieléctricos dipolares, las moléculas, como ya se ha indicado, tienen un momento polar (eléctrico) propio $\mathbf{p}_0$. Bajo la influencia de un campo eléctrico exterior, los dipolos tienden a orientarse a lo largo del campo. Pero a este movimiento de orientación se opone el movimiento térmico caótico. Cuanto mayor sea la temperatura T, mayor será la energía media del movimiento térmico de las moléculas y, por consiguiente, más débil será la acción orientadora del campo eléctrico exterior. Esto acarrea el que el vector de polarización dieléctrica $\mathbf{P}$ dependa de la temperatura. Los correspondientes cálculos nos dan que

$$P=n_0\frac{p_0^2E_1}{3kT},$$

donde k es la constante de Boltzmann.

Si además, los dipolos aumentan bajo la influencia del campo E (es decir, la susceptibilidad eléctrica α de las moléculas no es igual a cero), el valor numérico del vector de polarización del dieléctrico $\mathbf{P}$ será igual a

$$P=\alpha n_0E_1+n_0\frac{p_0^2E_1}{3kT},$$

de donde en lugar de la ecuación (3), nos da para la polarización molecular:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\cdot\frac{\mu}{\delta}=\left(\frac{4\pi}{3}\alpha+\frac{4\pi}{9}\frac{p_0^2}{kT}\right)N. \tag{4}$$

www.elsolucionario.org

Así tenemos que para los dieléctricos polares, la polarización molecular tiene un término que depende de la temperatura absoluta del dieléctrico T. Esta dependencia se ve bien en los gases. Al determinar experimentalmente el proceso de la polarización molecular en función de la temperatura T, se puede hallar el momento eléctrico p_0 para las diferentes moléculas polares. Resulta que los momentos eléctricos de las moléculas polares son magnitudes del orden desde $1 \cdot 10^{-18}$ hasta $6 \cdot 10^{-18}$ unidades *CGSE*. Estos momentos corresponden al momento eléctrico (polar) de dos cargas puntuales iguales a las cargas del electrón alejadas a una distancia de unos 10^{-8} cm.

Los átomos de los gases inertes y de algunas moléculas biatómicas (por ejemplo del H_2 y del N_2) tienen los momentos polares iguales a cero. La determinación de los momentos eléctricos de las moléculas desempeña una gran función en el estudio de su estructura (sobre todo en la química orgánica). Ciertas clases de sustancias tienen unos valores de $\varkappa$ muy próximos, característicos para el compuesto químico dado. Los valores de los momentos polares de algunas sustancias se dan en la tabla II.

En los dieléctricos líquidos y sólidos hay que tener en cuenta la acción mutua de las moléculas. Esto acarrea el que en el giro de una molécula bajo la influencia de un campo eléctrico exterior, se necesita cierto tiempo que, aunque pequeño, es perceptible. Si el dieléctrico se introduce en un campo eléctrico alterno de rápida variación en magnitud y dirección, las moléculas no tienen tiempo de girar en el campo y la función del segundo término de la fórmula (4) disminuye en importancia.

Tabla II

Momentos eléctricos polares

Sustancia	$p_0 \cdot 10^{18}$ unid. *CGSE*
Cloruro de hidrógeno HCl	1,03
Agua H_2O	1,85
Amoníaco NH_3	1,5
Alcoholes	1,7
Eteres	1,2
Acidos orgánicos	1,4

Señalemos por último la siguiente circunstancia: en todos los casos examinados, la existencia de una constante dieléctrica ε independiente de la intensidad del campo es debida a la proporcionalidad entre el vector de polarización **P** y la intensidad del campo **E**.

Sin embargo, hay cuerpos para los cuales la "constante dieléctrica" ε no es una magnitud constante, sino que depende de la intensidad del campo **E**. Esta clase de dieléctricos tienen una serie de propiedades sui generis parecidas a las propiedades magnéticas de los cuerpos ferromagnéticos, a los cuales se aproximan.

Estas propiedades fueron descubiertas en la sal de Seignette (sal de Rochelle o tartrato sódico-potásico) por los físicos soviéticos B. Kurchátov y P. Kobeko y que, por el nombre de la sal, se llaman propiedades *seignetoeléctricas*. El comportamiento de la sal de Seignette varía mucho según su temperatura sea mayor o menor que determinada temperatura θ, igual a 25° C (análoga a los "puntos de Curie" de los cuerpos ferromagnéticos; véase el § 203). Si $T>\theta$, se observa proporcionalidad entre la intensidad del campo y el vector de polarización; $\mathbf{P}=\varkappa\mathbf{E}$; en este caso, el coeficiente $\varkappa$ depende de la temperatura T según la ecuación $\varkappa\ (T-\theta)=\text{const}$. Si $T<\theta$, se altera la proporcionalidad entre el vector **P** y la intensidad del campo **E**. Al variar **E**, el vector **P** "se retrasa", es decir, adquiere valores que corresponden a los de **E** anteriormente adquiridos. Este fenómeno se llama *histérisis* (análogamente a la histérisis de los cuerpos ferromagnéticos; véase el § 203) Si la intensidad del campo E varía periódicamente en magnitud y dirección, la curva de P en función de E, a $T<\theta$, adquiere la forma indicada en la fig. 66. B. Vul descubrió estas mismas propiedades en ciertas sales de titanio en donde ε alcanza valores de varios millares.

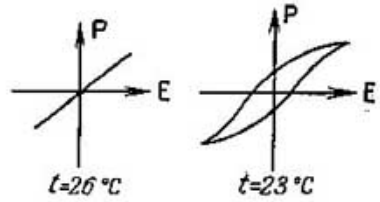


Fig. 66. Dependencia de la polarización de la sal de Seignette respecto a la intensidad del campo que varía con el tiempo.

§ 147. Propiedades dieléctricas de los cristales. Piezoelectricidad. Hasta ahora hemos examinado los dieléctricos que constan de moléculas independientes en las cuales las cargas pueden desplazarse u orientarse bajo la acción de un campo eléctrico exterior. Este concepto que nos hemos formado es justo para los cuerpos gaseosos, líquidos o amorfos. La polarización de los *cristales* iónicos tiene otro carácter. Como se ha dicho en el t. I, los cristales iónicos son redes espaciales con una alternancia regular de iones de diferente signo. Por ejemplo, el cristal de la sal gema es una red espacial de iones positivos de sodio y iones negativos de cloro. En un cristal de esta clase no se puede considerar una molécula por separado. En correspondencia con ello, la polarización del cristal se reduce al desplaza-

miento de todos los iones positivos según el sentido del campo, y de los negativos en sentido contrario.

El grado de polarización de los cristales puede ser distinto según sea la dirección del vector de intensidad electrostática **E** respecto a la dirección de los ejes cristalográficos. En este caso, la dirección del vector de polarización **P** no coincide con la del vector **E** y, por consiguiente, la relación entre los vectores **P** y **E** no se puede expresar por la simple ecuación (2) del § 141. En lugar de la magnitud $\varkappa$ hay que introducir en el caso general nueve magnitudes $\varkappa_{ik}$ con las cuales se expresa la relación lineal entre los componentes de los vectores **P** y **E** según los ejes de coordenadas:

$$P_x = \varkappa_{xx}E_x + \varkappa_{xy}E_y + \varkappa_{xz}E_z,$$
$$P_y = \varkappa_{yx}E_x + \varkappa_{yy}E_y + \varkappa_{yz}E_z,$$
$$P_z = \varkappa_{zx}E_x + \varkappa_{zy}E_y + \varkappa_{zz}E_z.$$

En correspondencia con ello, el vector de desplazamiento eléctrico **D** no es paralelo al vector **E**, y en lugar de la constante dieléctrica ε, en el caso general, también hay que introducir nueve magnitudes ε_{ik}.

La disposición regular de las partículas en el espacio de la red cristalina acarrea la aparición de un efecto especial denominado *efecto piezoeléctrico*. Este efecto reside en que en las caras de ciertos cristales, al sufrir deformaciones mecánicas (por ejemplo, de compresión o de tracción) surgen cargas eléctricas.

El efecto piezoeléctrico se observa en el cuarzo, turmalina, sal de Seignette, azúcar, blenda de zinc y una serie de cristales más. El más estudiado es el efecto piezoeléctrico del cuarzo. Al comprimirlo con una fuerza de 1 kg, en las caras opuestas del cristal de cuarzo surge una diferencia de potencial aproximadamente de unas centécimas de voltio. En los cristales de la sal de Seignette, el efecto es más intenso.

Además del efecto piezoeléctrico directo que hemos descrito, tenemos también el efecto piezoeléctrico inverso, que consiste en la variación de las dimensiones del cristal, es decir, su alargamiento o contracción, al someterlo a la acción de un campo eléctrico (*electrostricción*). La variación de las dimensiones de un cristal en la electrostricción es pequeña: es una magnitud del orden de 10^{-7} cm al aplicarle una diferencia de potencial de centenares de voltios.

Los efectos piezoeléctricos, directo e inverso, en la actualidad tienen gran aplicación en la técnica. En el t. I ya se ha hablado de la aplicación del cuarzo piezoeléctrico para obtener y estudiar el ultrasonido. En radiotecnia, el cuarzo piezoeléctrico se utiliza para estabilizar las oscilaciones eléctricas. El cuarzo piezoeléctrico se utiliza también en diferentes instrumentos de medida y para construir relojes de (cristal de) cuarzo.

www.elsolucionario.org

Para obtener un efecto piezoeléctrico, de un cristal de cuarzo se corta un paralelepípedo rectangular (fig. 67) en que unas aristas sean paralelas al llamado eje óptico L^3, y las otras sean paralelas a uno de los ejes binarios L^2 (ejes eléctricos). Al actuar la fuerza f de compresión paralela al eje L^2 sobre el cuarzo así cortado, en las caras perpendiculares al eje L^2 surgen cargas $+q$ y $-q$ iguales y de signo contrario. La cantidad de electricidad q es proporcional a la fuerza de compresión f y no depende de las dimensiones de la placa de cuarzo:

$$q_{II} = kf;$$

este efecto se denomina *efecto piezoeléctrico longitudinal*. La magnitud k se llama *constante piezoeléctrica* del cuarzo, que aproximadamente es igual a $6{,}5 \cdot 10^{-8}$, si q se expresa en unidades *CGSE* de carga, y f, en dinas.

Si la fuerza f es paralela al eje óptico L^3, no surgen cargas.

Si la fuerza f actúa en la dirección de n, perpendicular al plano que contiene los ejes L^2 y L^3, aparece el llamado *efecto piezoeléctrico transversal*. Surgen también cargas en las caras perpendiculares a L^2, pero el signo de estas cargas es contrario al que se observa en el efecto longitudinal. En este caso, la cantidad de electricidad $q_{\perp}$ que surge en cada cara, es:

$$q_{\perp} = k \frac{a}{b} f,$$

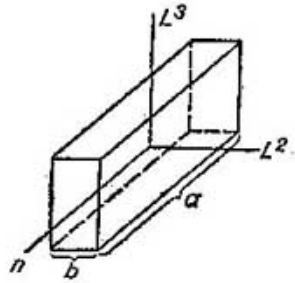


Fig. 67. Paralelepípedo de cuarzo.

donde k tiene el mismo valor de antes, a es el espesor de la lámina en la dirección en que actúa la fuerza f, y b es el espesor de la misma en dirección del eje L^2.

Al cambiar el signo de la fuerza f, varía el de las cargas q: en la cara en que en la compresión surge una carga positiva, en la tracción aparece una carga negativa, y viceversa.

Para observar el efecto piezoeléctrico inverso, se pegan a las caras del cuarzo piezoeléctrico unas armaduras metálicas a las cuales se les comunica cargas eléctricas, y en este caso, según la dirección del campo, la lámina de cristal se contrae o se dilata.

§ 148. Condensadores. En el § 136 hemos estudiado el condensador plano en el vacío y dedujimos que su capacidad C era

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S}{4\pi d}, \qquad (1)$$

donde S es la superficie de una placa del condensador, y d, la distancia entre las placas. Si entre las placas del condensador hay un dieléctrico de constante dieléctrica ε, su capacidad C, según lo dicho en el § 139, aumenta en ε veces y, por consiguiente, será

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \qquad (2)$$

Así tenemos que la capacidad del condensador plano es directamente proporcional a la superficie de la placa S y a la constante dieléctrica ε, e inversamente proporcional a la distancia d entre las placas.

Veamos ahora la asociación de condensadores. Los condensadores pueden asociarse en serie o en paralelo.

En la fig. 68 se representa el caso de conexión en serie de dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 respectivamente. Al cargar la placa *1* con una carga $+Q$, en las placas *2* y *3*, que son un mismo conductor, aparecen por inducción las cargas $-Q$ y $+Q$ respectivamente, y en la placa *4* la carga será $-Q$.

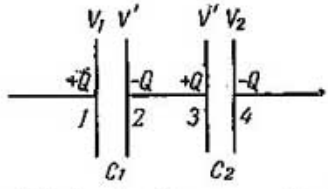


Fig. 68. Asociación en serie de condensadores.

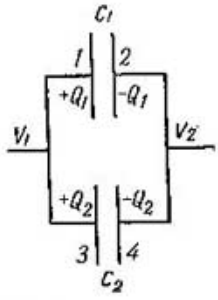


Fig. 69. Asociación en paralelo de condensadores.

Designemos el potencial de la placa *1* por V_1, y el de la *4* por V_2; el potencial común de las placas *2* y *3* lo designaremos V'. Para cada par de placas se pueden escribir las relaciones:

$$V_1 - V' = \frac{1}{C_1} Q, \quad V' - V_2 = \frac{1}{C_2} Q,$$

donde C_1 y C_2 son las capacidades de los condensadores conectados. Sumando estas ecuaciones tenemos que:

$$V_1 - V_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q;$$

por otro lado, podemos escribir:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{C} Q,$$

donde C es la capacidad resultante del conjunto (como condensador único). Comparando las últimas dos ecuaciones tenemos que:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{3}$$

o

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{3a}$$

Así tenemos que en la agrupación en serie de condensadores resulta un condensador (equivalente) cuya inversa de la capacidad es igual a la suma de las inversas de las capacidades agrupadas.

En la *asociación en paralelo de condensadores* de capacidades C_1 y C_2 (fig. 69), los potenciales de las placas unidas serán iguales. Las cargas en las armaduras de diferentes condensadores serán distintas. Designémoslas por Q_1 y Q_2. Apliquemos a cada condensador la fórmula que relaciona la carga de las armaduras con la diferencia de potencial y la capacidad:

$$Q_1 = C_1 (V_1 - V_2), \quad Q_2 = C_2 (V_1 - V_2).$$

Sumando estas ecuaciones tenemos que:

$$Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)(V_1 - V_2).$$

Por otro lado, se puede escribir:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C (V_1 - V_2),$$

donde C es la capacidad del conjunto de los dos condensadores. Comparando las dos últimas ecuaciones, tenemos que:

$$C = C_1 + C_2, \qquad (4)$$

es decir, la capacidad de dos condensadores conectados en paralelo es igual a la suma de sus capacidades.

Está claro que los resultados obtenidos se pueden generalizar para cualquier número de condensadores asociados.

Esta agrupación de condensadores formando un conjunto tiene gran aplicación. Frecuentemente se emplean condensadores planos de panes metálicos entre los cuales se colocan hojas de papel parafinado o de mica. Los panes metálicos se unen entre sí (fig. 70) de manera que todos los panes impares formen una armadura del condensador, y los pares, la otra armadura. Estos condensadores tienen capacidades de centenares de microfaradios y más, y resisten una diferencia de potencial de varios centenares de voltios, siendo de dimensiones pequeñas.

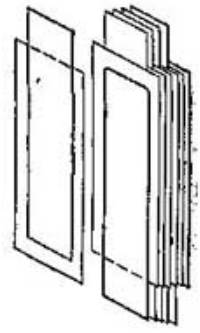


Fig. 70. Condensador plano de panes metálicos con hojas de papel parafinado entre ellos.

Sea un ejemplo numérico. Hay que construir un condensador plano de capacidad de $1 \mu F$, utilizando como dieléctrico papel parafinado de 0,05 mm de espesor y de constante dieléctrica $\varepsilon = 1{,}8$. Determinar sus dimensiones.

De la fórmula (2) tenemos que la capacidad de un condensador plano es

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

de donde la superficie de la placa S deberá ser:

$$S = \frac{4\pi d C}{\varepsilon}$$

www.elsolucionario.org

colocando en esta ecuación los valores de $C=1\cdot10^{-6}$ $F=9\cdot10^5$ cm, $d=0{,}005$ cm, y $\varepsilon=1{,}8$, tenemos que $S\cong31\,000$ cm². Como cada pan metálico (excepto los extremos) se carga por ambos lados, la superficie total de los mismos deberá ser aproximadamente de 31 000 cm². Si los panes los hacemos de 10×10 cm², su número total será de 310. Siendo 0,001 cm el espesor de los panes, el volumen del condensador será aproximadamente de $2\times10\times10$ cm³, es decir, todo el condensador cabe en una pequeña caja plana.

§ 149. Diferentes tipos de condensadores. 1. *Condensador plano con láminas de diferentes dieléctricos.* Supongamos que el espacio entre las armaduras de un condensador plano está lleno de dos capas de dieléctrico de constantes ε_1 y ε_2. Sean d_1 y d_2 los espesores respectivos de estas capas (fig. 71).

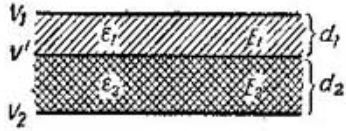


Fig. 71. Condensador plano con placas de diferentes dieléctricos.

En este caso, como en el anterior, la capacidad C se determina por la relación

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2}. \tag{1}$$

Sin embargo, como tenemos una zona limítrofe entre dos dieléctricos, la intensidad del campo variará al pasar de un dieléctrico a otro. Sea E_0 la intensidad del campo que se crearía entre las armaduras cargadas en el vacío; entonces:

$$E_0=4\pi\sigma.$$

En los dieléctricos, las intensidades E_1 y E_2 serán respectivamente (véase la llamada de la pág. 89):

$$E_1=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_1}=\frac{E_0}{\varepsilon_1},\qquad E_2=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_2}=\frac{E_0}{\varepsilon_2}.$$

La carga de una de las armaduras será:

$$Q=\sigma S=\frac{E_0}{4\pi}S. \tag{2}$$

La diferencia de potencial de las armaduras se puede calcular en función de la intensidad del campo. Sea V' el potencial de la zona limítrofe de los dieléctricos, entonces:

$$\frac{V_1-V'}{d_1}=E_1,\qquad \frac{V'-V_2}{d_2}=E_2,$$

de donde

$$V_1-V_2=E_1d_1+E_2d_2=E_0\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right). \tag{3}$$

Colocando los valores hallados en (2) y (3) en la (1), nos da la capacidad del condensador:

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2}=\frac{E_0S}{4\pi E_0\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)},$$

de donde

$$C = \frac{S}{4\pi\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}. \qquad (4)$$

Es fácil de ver que la capacidad no depende del orden de disposición de las capas. Esta fórmula se transforma en fórmula de la capacidad para un condensador con un dieléctrico, si ponemos en ella $d_2=0$.

Veamos otros tipos de condensadores.

2. *Condensador esférico.* El condensador esférico consta de dos armaduras esféricas concéntricas, cuyos radios los llamaremos R_1 y R_2. El espacio entre las armaduras está lleno de un dieléctrido de constante ε; las cargas de las armaduras están uniformemente distribuidas por las superficies y las llamaremos $+Q$ y $-Q$, y los potenciales de las armaduras, V_1 y V_2 respectivamente.

Como se ha demostrado (véase el § 127), la intensidad del campo creado por una superficie esférica uniformemente cargada en su interior es igual a cero, y en el exterior, coincide con la intensidad de una carga puntual colocada en el centro de la esfera e igual en la magnitud, a la carga de la propia superficie. De aquí que la intensidad del campo *entre las armaduras* del condensador la crean solamente las cargas de la armadura interior y es igual a

$$E = \frac{Q}{\varepsilon r^2},$$

donde r es la distancia desde el centro de la armadura esférica.

La dirección de r coincide con la de la normal n a las superficies equipotenciales; de aquí que, según la fórmula (2a) del § 131, tengamos que:

$$E = -\frac{dV}{dr}, \quad \text{de donde} \quad dV = -\frac{Q}{\varepsilon r^2}\,dr.$$

La variación total del potencial al pasar de una armadura a otra la obtenemos integrando esta expresión entre los límites desde R_1 hasta R_2:

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\varepsilon r^2}\,dr = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{Q}{R_2} - \frac{Q}{R_1}\right).$$

De aquí que la capacidad buscada del condensador esférico sea:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q\varepsilon}{\frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2}},$$

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (5)$$

Utilizando esta fórmula es fácil calcular que, por ejemplo, el condensador esférico formado por dos esferas concéntricas de $R_1=2$ m y $R_2 - R_1=1$ mm, y con un dieléctrico entre las esferas de constante $\varepsilon=2{,}5$, tendrá una capacidad aproximadamente de 1 μF. Este resultado es interesante compararlo con los datos del § 136, según los cuales una esfera individual de radio igual a 9 km tiene esta misma capacidad de 1 μF.

3. *Condensador cilíndrico.* El condensador cilíndrico está formado de dos cilindros coaxiales huecos de radios R_1 y R_2 y de longitud total l (fig. 72). El espacio entre los cilindros está lleno de un dieléctrico de constante ε. Sean $+Q$ y $-Q$ las cargas de las armaduras, y V_1 y V_2 los potenciales de las mismas.

La intensidad del campo entre las armaduras la creará solamente la carga del cilindro interno, y en el punto que se halla a la distancia r del eje del mismo, será:

$$E=\frac{2\eta}{\varepsilon r},$$

donde η es la carga por unidad de longitud del cilindro. La variación del

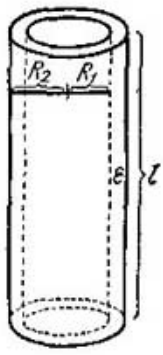


Fig. 72. Condensador cilíndrico.

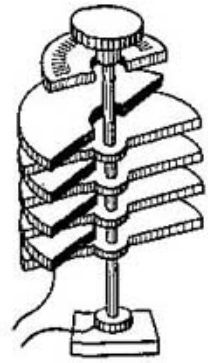


Fig. 73. Condensador de capacidad variable.

potencial en el espacio dr está relacionada con la intensidad del campo según:

$$-\frac{dV}{dr}=E, \text{ de donde } dV=-Edr=-\frac{2\eta}{\varepsilon r}dr.$$

La diferencia de potencial entre las armaduras V_2-V_1, la obtenemos integrando esta expresión en los límites desde R_1 hasta R_2:

$$V_2-V_1=-\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\eta}{\varepsilon r}dr=-\frac{2\eta}{\varepsilon}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Por consiguiente, la capacidad del condensador cilíndrico será:

$$C=\frac{Q}{V_1-V_2}=\frac{\varepsilon l}{2\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (6)$$

Así tenemos que la capacidad de un condensador cilíndrico es proporcional a la longitud del condensador y, como siempre, a la constante dieléctrica de la sustancia con que se llena el condensador; además depende solamente de la *relación* de los radios de los cilindros, aumentando con la disminución de esta relación.

4. *Condensador de capacidad variable.* En radiotecnia frecuentemente se utilizan condensadores de capacidad variable, cuya construcción viene representada en la fig. 73. Las placas en forma de semicírculo (fig. 74,*a*) se unen entre sí alternativamente. La mitad de las placas están fijas, la otra mitad puede girar, mediante una manilla, alrededor del eje vertical. Al girar, las placas móviles se introducen en mayor o menor grado entre los espacios de las placas in-

www.elsolucionario.org

móviles formando de esta manera una serie de condensadores agrupados en paralelo.

Los condensadores formados por las placas se pueden considerar aproximadamente planos, por eso la capacidad C' de uno de ellos se puede considerar igual

$$C' = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

donde ε es la constante dieléctrica del medio en que se hallan las placas; d, la distancia entre las placas, y S, la superficie de la parte de la placa móvil que se halla entre las fijas. Si las placas han girado un ángulo α unas respecto a las

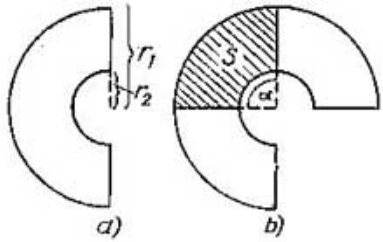


Fig. 74. Placas del condensador variable.

otras, S será la superficie rayada de la fig. 74,*b*. Designando por r_1 el radio exterior de la placa y por r_2 el interior, tenemos que:

$$S = \pi (r_1^2 - r_2^2) \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{(r_1^2 - r_2^2)\alpha}{2},$$

donde el ángulo α se expresa en radianes.

De aquí que la capacidad de un condensador sea:

$$C' = \frac{\varepsilon (r_1^2 - r_2^2)\alpha}{8\pi d}.$$

Si en el condensador hay en total n espacios entre las placas, será una agrupación en paralelo de n condensadores de capacidad C' cada uno.

Por consiguiente, la capacidad C de todo el condensador será:

$$C = nC' = \frac{\varepsilon n (r_1^2 - r_2^2)\alpha}{8\pi d}, \qquad (7)$$

donde α está expresado en radianes. Esta fórmula no sirve para ángulos pequeños.

Si expresamos el ángulo α en grados, basándonos en la relación de que

$$\alpha \text{ (radianes)} = \frac{2\pi}{360} \alpha \text{ (grados)},$$

la ecuación (7) se puede escribir de la siguiente manera:

$$C = \frac{\varepsilon n (r_1^2 - r_2^2)\alpha}{1440 \cdot d}. \qquad (8)$$

Generalmente entre las placas de un condensador de estos, hay aire, y prácticamente ε es igual a la unidad.

Resolvamos un ejemplo numérico. Determinar la capacidad máxima de un condensador de la construcción indicada y de los datos siguientes: radio

interior de las placas $r_2=1$ cm, radio exterior $r_1=3$ cm, distancia entre las placas $d=1$ mm, número de placas $n=40$. Entre las placas hay aire.

S o l u c i ó n. La capacidad máxima será cuando $\alpha=180°$; por lo tanto, según la fórmula (8), tenemos que:

$$C=\frac{1\cdot 40\cdot(3^2-1^2)\cdot 180}{1\,440\cdot 0{,}1}\ \text{cm}=400\ \text{cm}\cong 4{,}5\cdot 10^{-4}\ \mu F.$$

§ 150. Medición de la diferencia de potencial. En el § 121, al describir la construcción del electroscopio, indicamos que el grado de separación de sus placas era una expresión métrica de la carga que había en las placas. Sin embargo, el electroscopio mide al mismo

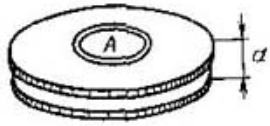


Fig. 75. Condensador con anillo de protección.

tiempo la diferencia de potencial entre las placas y la caja del electroscopio. Al cargar las placas, en la caja surgen cargas inducidas; si en este caso la caja está unida a tierra, en ella quedarán las cargas de signo contrario al de las cargas de las placas. Las placas del electroscopio y la caja son dos armaduras de un condensador, y la diferencia de potencial entre estas armaduras será tanto mayor, cuanto mayor sea la carga Q de las placas. Así tenemos que el grado de separación de las placas del electroscopio medirá la diferencia de potencial entre las placas y la caja. Si el electroscopio lleva una escala graduada en voltios, se llama *voltímetro electrostático.*

El voltímetro electrostático se puede graduar con el *electrómetro absoluto.* En principio, la medición con el electrómetro absoluto se reduce a la medición de las fuerzas de atracción entre dos placas de un condensador plano, que puede ser expresada por la diferencia de potenciales. Para poder utilizar las fórmulas deducidas para el condensador plano de placas infinitas, se utiliza el condensador *con anillo de protección.* Representémonos un condensador de dos discos horizontales paralelos y en el disco superior una pequeña parte A aislada del resto por una rendija denominada anillo de protección (fig. 75). El campo debajo de esta parte A es uniforme, ya que el campo se va diferenciando del uniforme solamente en los extremos de las placas. Por eso, la capacidad de la parte media se expresará con la misma fórmula que la del condensador plano:

$$C=\frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

donde S es la superficie de la placa A, y d la distancia entre las placas. La fuerza que actúa sobre la placa A es igual al producto de la intensidad del campo de la placa inferior, por la carga Q de la placa A.

La placa inferior crea en el interior del condensador una intensidad del campo dos veces menor que la intensidad total del campo E del interior del condensador; por lo tanto, la fuerza que actúa sobre la placa A, será:

$$f = \frac{E}{2} \cdot Q \qquad (1)$$

Observando que $E = \frac{V_1 - V_2}{d}$ y $Q = C(V_1 - V_2)$, donde $V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial entre las placas, obtenemos que:

$$f = \frac{C\,(V_1 - V_2)^2}{2d};$$

colocando en esta ecuación el valor de C según la (1), hallamos que:

$$f = \frac{\varepsilon S}{8\pi d^2}\,(V_1 - V_2)^2, \qquad (2)$$

es decir, la fuerza de acción recíproca se expresa en función de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$.

Si entre las placas hay aire, consideramos que $\varepsilon = 1$, y de la (2) tenemos que:

$$V_1 - V_2 = d\sqrt{\frac{8\pi f}{S}}.$$

Conociendo la distancia d entre las placas, la superficie S de las mismas y midiendo la fuerza f, determinamos de manera absoluta la diferencia de potencial $V_1 - V_2$.

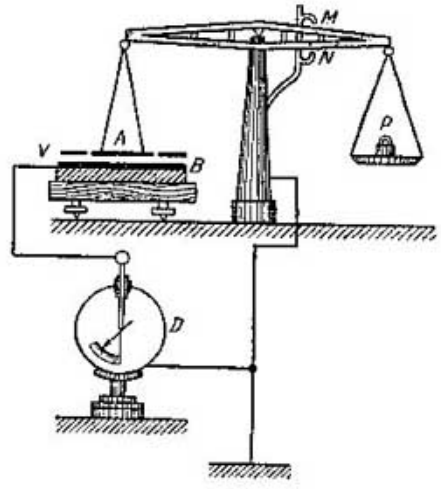


Fig. 76. Esquema de graduación del voltímetro electrostático mediante un electrómetro absoluto.

La fuerza f se puede determinar "pesándola", si uno de los platillos de la balanza los sustituimos por la placa atraída por la cargada. Este principio de determinación de las magnitudes eléctricas "pesándolas" lo elaboró Thomson, físico inglés. En la fig. 76 se representa, basado en el mismo principio, el esquema de graduación del voltímetro electrostático D. En una balanza corriente se ha sustituido uno de los platillos por la parte media A del condensador. Si la placa superior de este condensador junto con el anillo de protección y todo el cuerpo de la balanza lo conectamos a tierra, y la

www.elsolucionario.org

lámina inferior B del condensador, aislada de la tierra, la cargamos hasta alcanzar determinado potencial V, la parte media de la placa superior será atraída hacia la inferior. Para conservar el equilibrio de la balanza hay que colocarle en el otro platillo un peso P que medirá la fuerza f. De aquí, según la fórmula deducida, determinamos el potencial V (el potencial de la Tierra $V_2=0$). Las láminas del voltímetro que se gradúa D se unen a la placa B, y la caja se une a tierra. Así el potencial V medirá el de las láminas del voltímetro que se gradúa.

Ciertas dificultades representa la circunstancia de que la balanza, equilibrada por un lado con pesas y por otro con fuerzas eléctricas de atracción de las placas, no se halla en equilibrio estable. Un insignificante exceso en las pesas acarrea un aumento de la distancia d entre las placas, como resultado de lo cual disminuye la fuerza de atracción y se acentúa el desequilibrio. Y viceversa, si la pesa es insuficiente, las placas del condensador se acercan y la fuerza de atracción entre ellas aumenta. Para evitar estos inconvenientes se colocan en un brazo de palanca dos topes M y N. La fuerza de atracción se determina por la carga que tiende a separar el brazo de palanca de uno de los topes.

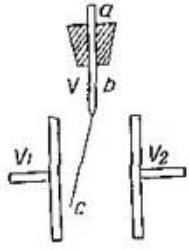


Fig. 77. Electroscopio con láminas cargadas.

Estos electrómetros de placas son poco sensibles, y funcionan de la siguiente manera. Se comunica a ambas placas una carga Q de igual magnitud y signo. La fuerza de repulsión es proporcional al producto de las cargas de las placas, es decir, es proporcional al cuadrado de la carga (Q^2). Si la carga Q es pequeña, la magnitud Q^2 y, por consiguiente, la fuerza de repulsión, será muy pequeña. Pero si la misma carga Q la colocamos en un campo eléctrico E, la fuerza que actúa sobre la carga, será proporcional a QE y, por lo tanto, puede hacerse lo suficientemente grande, si se toma un campo E bastante grande, aunque Q sea pequeña.

En la forma más sencilla, este principio se ha utilizado en el electroscopio representado en la fig. 77. Una ligera hoja metálica bc cuelga entre dos láminas a las cuales se les comunica una diferencia de potenciales V_1-V_2. Al cargar la hoja bc, ésta se desvía. Además de tener una mayor sensibilidad en comparación con el electroscopio corriente, este instrumento tiene la ventaja de que permite determinar el signo de la carga comunicada a la hoja bc, según se incline a uno u otro lado.

Este mismo principio se utiliza en el electrómetro de los laboratorios modernos denominado *electrómetro de cuerda o electrómetro de filamento.*

Un hilo muy fino de platino (de 2 ó 3μ de diámetro) se mantiene tenso y verticalmente entre dos prismas (cuchillas) (fig. 78). Los prismas están aislados y pueden cargarse hasta determinada diferencia de potencial $V_1 - V_2$. El hilo de platino se une a la fuente de electricidad que se quiere medir. Al cargarlo, el hilo se comba a una u otra parte, según el signo de la carga. Esta flexión se puede medir observándola con un microscopio o fotografiándola. Los electrómetros de filamento alcanzan exactitudes de 0,01 V y tienen una propiedad muy importante que consiste en que al hilo, gracias a su pequeña masa, recobra rápidamente el estado de equilibrio. Esto permite registrar y medir cargas que varían rápidamente con el tiempo.

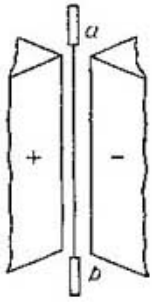


Fig. 78. Electrómetro de filamento.

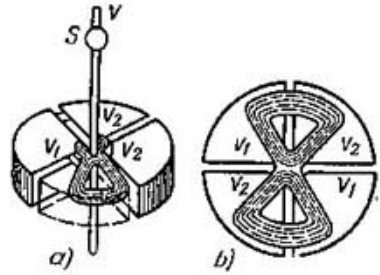


Fig. 79. Electrómetro de cuadrantes.

Por último, señalemos otro electrómetro construido para medir pequeñas diferencias de potencial, denominado *electrómetro* de cuadrantes (o de Kelvin). Una caja metálica (véase la fig. 79, donde se representa en una proyección sobre el plano horizontal la parte interior de esta caja y en otra, la caja con un corte) de forma cilíndrica está cortada según los radios formando cuatro cuadrantes aislados. En el interior de esta caja, de un delgado hilo se cuelga una aguja en forma de 8. Si orientamos el eje de la aguja según una de las ranuras que separan los cuadrantes y la cargamos hasta cierto potencial V_0, después de conectar a tierra los cuadrantes, la aguja permanecerá en equilibrio, debido a la simetría. Como es difícil conseguir una simetría exacta en los cuadrantes, uno de ellos se hace móvil y, después de cargar la aguja, se desplaza hasta que se consigue el equilibrio. Luego se comunica a dos cuadrantes opuestos el potencial V_1 y a los otros dos, el V_2, y la aguja gira. Como se ha demostrado teóricamente, el giro de la aguja es proporcional a la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, dentro de unos límites bastante amplios. Así tenemos que según el giro de la aguja se mide la diferencia de potencial. El giro de la aguja se mide ópticamente con ayuda de un espejo S fijo en el hilo de que cuelga la aguja.

El electrómetro de cuadrantes posee una elevada sensibilidad: se pueden medir potenciales de 1 V con una exactitud de 0,001 V. Un inconveniente del electrómetro de cuadrantes es el gran período de oscilación de la aguja.

§ 151. Medición de cargas muy pequeñas. Carga del electrón. Hay un método muy sencillo de medir cargas extremadamente pequeñas concentradas en gotas microscópicas. La idea de este método está en lo siguiente: supongamos que una gota microscópica con una

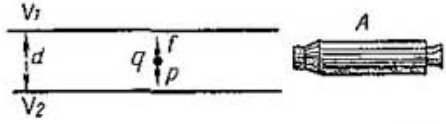


Fig. 80. Determinación de la carga por el método de las gotas suspendidas entre las placas de un condensador.

carga positiva $+q$ se halla entre las placas horizontales de un condensador plano (fig. 80).

Si la placa superior se carga negativamente y la inferior positivamente, sobre la gota actúa una fuerza eléctrica *dirigida hacia arriba*

$$f = Eq,$$

donde E es la intensidad del campo entre las placas del condensador. Esta fuerza actúa en sentido contrario a la de gravedad p de la gota.

Cuando estas fuerzas sean iguales en valor absoluto, tendremos que

$$Eq = p. \qquad (1)$$

En este caso, la gota quedará suspendida e inmóvil entre las placas del condensador.

Expresando la intensidad E en función de la diferencia de potenciales de las placas $V_1 - V_2$ y de la distancia d entre las mismas, tenemos que:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}.$$

De aquí que, según la (1), la carga q de la gota que se pesa sea:

$$q = p\,\frac{d}{V_1 - V_2}. \qquad (2)$$

Conociendo el peso de la gota p, la distancia entre las placas d y la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que hay que aplicar para que la gota quede suspendida, mediante la fórmula (2) hallamos el valor de la carga q.

www.elsolucionario.org

El peso p de la gota en el aire se puede hallar sabiendo la densidad ρ de la sustancia de que consta y su radio r:

$$p = \frac{4}{3}\pi(\rho - \rho')r^3 g, \qquad (3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y ρ' la densidad del medio en que se halla la gota (el aire).

El radio de la gota r se determina en función de la velocidad de caída debido a la fuerza de la gravedad cuando no hay campo eléctrico. La velocidad v de esta caída, como se ha explicado en el § 42 del t. I, se expresa por la fórmula de Stokes:

$$v = \frac{2}{9}\frac{\rho - \rho'}{\eta} \cdot g r^2, \qquad (4)$$

donde ρ' es la densidad y η la viscosidad del medio en que se efectúa la caída (en nuestro caso, el aire). Sabiendo ρ, ρ' y η y midiendo la velocidad de caída de la gota v, hallamos, según la (4), su radio r.

Este método permite medir gotas extremadamente pequeñas. Efectivamente, sea $r = 10^{-4}$ cm el radio de la gota microscópica y $\rho = 1$ gr/cm^3 su densidad (la densidad ρ' del aire la despreciamos); entonces su masa será $m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \cong 4 \cdot 10^{-12}$ gr. Sea $d = 2{,}5$ cm la distancia entre las placas y $V_1 - V_2 = 3\,000$ V la diferencia de potencial, que equivalen a 10 unidades *CGSE* de potencial. Entonces, según la (2):

$q = 4 \cdot 10^{-12} \cdot 981 \cdot \frac{2{,}5}{10}$ unid. *CGSE*, de donde $q \cong 10^{-9}$ unid. *CGSE*.

De esta manera se puede medir una carga del orden de 10^{-9} unid. *CGSE*.

Millikan utilizó este método para medir exactamente la carga del electrón. En el espacio entre las placas de un condensador se introducían pulverizadas gotas microscópicas de aceite, que al rozar con el aire se cargaban. Las gotas se alumbraban de un lado con un foco luminoso y se observaban al microscopio A (fig. 80). Eligiendo la debida diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre las placas, se puede conseguir que algunas gotas queden suspendidas e inmóviles.

Después, el aire entre las placas del condensador se somete a la acción de los rayos X. Los rayos X ionizan el aire, es decir, crean moléculas cargadas y electrones libres en el aire. Entonces, la gota, apoderándose de un ion o electrón, varía de carga bruscamente; el cambio de carga se refleja en la alteración del equilibrio. De esta manera se puede medir no sólo la carga que la gota ya tenía, sino variar la carga de la gota durante el experimento.

Las mediciones de Millikan demostraron que las cargas q de las gotas eran, en todos los casos, múltiplos de una carga mínima e:

$$q = ne,$$

donde n era un número entero. Estas mediciones demostraron directamente la discontinuidad de la carga eléctrica y permitieron medir la magnitud de la carga elemental e. Esta carga elemental es la carga de la partícula eléctrica elemental denominada *electrón.*

Según las últimas mediciones efectuadas por el método de Millikan, y también por otros métodos, la carga del electrón es

$$e = 4{,}802 \cdot 10^{-10} \text{ unid. } CGSE = 1{,}601 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Los experimentos sobre los electrones libres han demostrado que su carga es negativa y poseen una masa en reposo de

$$m_0 = 9{,}107 \cdot 10^{-28} \text{ gr.}$$

En los experimentos corrientes sobre la electrización de los cuerpos electrizados parece que las cargas de los cuerpos pueden variar ininterrumpidamente, ya que la carga de un electrón es muy pequeña. Las partículas que observamos en estos experimentos son tan pequeñas que las cargas que poseen son iguales a las de varios electrones solamente; en este caso, la variación discontinua, a saltos, de las cargas ya se hace perceptible.

Es interesante señalar que las fuerzas eléctricas son relativamente grandes: basta que en la gota haya unos cuantos electrones de más, para que la fuerza eléctrica pueda equilibrar la de la gravedad, aunque la gota microscópica conste de gran cantidad de átomos.

Para representarnos más concretamente la carga y masa del electrón, hagamos el siguiente cálculo: una esfera maciza de cobre de radio $r = 1$ cm se carga negativamente hasta el potencial de 3 000 V; determinemos el número de electrones que hay que comunicarle.

La carga de la esfera

$$Q = C \cdot V = 1 \cdot \frac{3\,000}{300} = 10 \text{ unid. } CGSE.$$

Como la carga de un electrón $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ unid. *CGSE*, el número de electrones buscado n será:

$$n = \frac{10}{4{,}8 \cdot 10^{-10}} \cong 2{,}1 \cdot 10^{10};$$

así tenemos que la esfera debe tener $2{,}1 \cdot 10^{10}$ electrones de más. Este número que de por sí es muy elevado, sigue siendo muy pequeño en comparación con el número de átomos que contiene la esfera. Efectivamente, la masa de la esfera

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}9 \cdot 1^3 \text{ gr} \cong 37 \text{ gr,}$$

es decir, es aproximadamente 1/2 de un mol de cobre; por consiguiente, el número de átomos de cobre en la esfera será igual a $\frac{6{,}02 \cdot 10^{23}}{2} \cong$

$\cong 3 \cdot 10^{23}$. De esto se ve que el número de electrones añadidos es aproximadamente de $\frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{13}}$ parte del número de átomos que contiene.

Por último, es interesante señalar que la masa de todos los electrones que se han añadido a la esfera, es muy pequeña. Esta masa $m_1 = nm_0 = 2{,}1 \cdot 10^{10} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr $\cong 1{,}9 \cdot 10^{-17}$ gr es decir, es centenas de millares de veces menor que la masa de una partícula microscópica de polvo. De aquí se ve que, prácticamente, la electrización que se logra en los cuerpos, no acarrea ninguna variación sensible de sus masas, aunque los electrones tienen masa.

Los electrones poseen una carga negativa. En la actualidad, como hemos indicado, se han descubierto electrones positivos, llamados *positrones*. Su carga, al parecer, es igual, en valores absolutos, a la del electrón, pero de signo positivo; su masa, al parecer, también es igual a la del electrón. No obstante los positrones aparecen solamente en los procesos relacionados con las transformaciones de los núcleos atómicos o de los fotones, y libres existen durante intervalos muy pequeños de tiempo (véase el t. III). Por eso, en todas las especulaciones sobre las propiedades eléctricas de los cuerpos, producción de corriente eléctrica, etc, hay que hablar de electrones.

Al realizar experimentos con una gota suspendida entre dos placas de un condensador, es difícil conseguir un equilibrio completo de la fuerza eléctrica qE y de la fuerza de gravedad de la gota p. Pero esto tampoco hace falta.

Supongamos que, cuando no actúa la fuerza eléctrica, bajo la acción solamente de la fuerza de la gravedad, la gota cae uniformemente a la velocidad de v_0; pero según la ley de Stokes esta velocidad es proporcional a la fuerza de la gravedad p. Consideremos positiva la dirección hacia abajo. Si hay un campo eléctrico que tire de la gota hacia arriba, sobre la gota actuará una fuerza igual a la diferencia entre la fuerza de la gravedad y la fuerza eléctrica: $p - qE$. Solicitada por esta fuerza, la gota se desplazará uniformemente a la velocidad de v_1. Como esta velocidad es proporcional a la fuerza $p - qE$, tenemos que:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p}{p - qE},$$

de donde la carga de la gota será:

$$q = \frac{p}{Ev_0}(v_0 - v_1). \qquad (5)$$

Colocando en esta ecuación el valor del peso de la gota p según la (3), tenemos que:

$$q = \frac{4}{3}\pi \frac{(\rho - \rho')\, r^3 g}{Ev_0}(v_0 - v_1).$$

El radio de la gota lo hallamos aplicando la fórmula de Stokes (4):

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2(\rho - \rho')\, g}}.$$

www.elsolucionario.org

Colocando esta expresión de r en la de q, obtenemos que:

$$q=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{9}{2}\eta\right)^{3/2}\cdot\left[\frac{1}{g(\rho-\rho')}\right]^{1/2}\cdot\frac{(v_0-v_1)\,v_0^{1/2}}{E}. \qquad (6)$$

Las velocidades de caída de la gota v_1 y v_0 se miden con ayuda del microscopio con una escala y un cronómetro. Las demás magnitudes de la fórmula (6) también se pueden medir directamente. De esta manera se determina q.

Tabla III

Cargas de las gotas observadas $\times 10^{10}$	Magnitudes múltiples de 4,917
19,66	$4{,}917\times 4=19{,}66$
24,60	$4{,}917\times 5=24{,}59$
29,62	$4{,}917\times 6=29{,}50$
34,47	$4{,}917\times 7=34{,}42$
39,38	$4{,}917\times 8=39{,}34$
44,42	$4{,}917\times 9=44{,}25$

Como se ha indicado, las mediciones han demostrado que la carga de la gota es proporcional a una carga elemental e. Los datos de la tabla III están tomados del trabajo de Millikan. En la primera columna se dan los valores observados de las cargas de las gotas, y en la segunda, las magnitudes múltiples de una carga igual a 4,917 unid. *CGSE* de carga.

La tabla demuestra indudablemente que la gota lleva una carga que solamente es múltiple de cierta carga elemental. Según los datos de esta tabla, la magnitud de esta carga elemental debe ser igual a $4{,}917\cdot 10^{-10}$ unid. *CGSE*. No obstante, Millikan señaló después que, para las gotas tan pequeñas que había utilizado, había que hacer ciertas correcciones a la ley de Stokes. Como resultado de numerosas mediciones, en 1916 obtuvo el valor de la carga del electrón igual a $e=4{,}774\times 10^{-10}$ unid. *CGSE*.

Después se introdujeron las correcciones del valor de la viscosidad del aire η en los experimentos de Millikan, y se obtuvo el siguiente valor de la carga del electrón $e=4{,}803\cdot 10^{-10}$ unid. *CGSE*, valor que hemos dado en el texto.

§ 152. Naturaleza del campo electrostático. Lo dicho en los párrafos anteriores nos confirma que en el espacio que rodea al cuerpo cargado, se producen ciertos cambios que se reflejan, ante todo, en que en otro cuerpo cargado cualquiera colocado en este espacio actúan determinadas fuerzas. Hemos caracterizado esta propiedad que se revela en la acción de determinadas fuerzas sobre las cargas, mediante el vector de intensidad **E**, y este espacio en que actúan las cargas, lo hemos llamado *campo electrostático*. Todo punto del campo se caracteriza por un valor determinado del vector **E**. Para mayor comodidad en la representación gráfica del conjunto de los valores de **E** introdujimos el concepto de líneas de fuerza. Por último, para caracterizar el trabajo efectuado al trasladar cargas

por el campo electrostático, introdujimos el concepto de potencial V, que para cada punto del campo también tiene un valor determinado y, en general, varía de un punto a otro.

Como se ha indicado en el § 123, al principio, la descripción de las propiedades del campo electrostático tenía un carácter formal y se basaba en la analogía con la teoría matemática del campo de gravedad; teniendo en cuenta que en este caso se suponía que las fuerzas eléctricas y las de atracción universal se transmitían momentáneamente, que eran cierta "acción a distancia" sin ninguna función del espacio intermedio.

Este punto de vista tenía carácter idealista y ya en el s. XVIII fue debatido por varios científicos, entre ellos M. Lomonósov, que suponía que las fuerzas eléctricas eran debidas a la rotación de partículas del éter, sustancia que llenaba todo el espacio.

En la primera mitad del s. XIX, la idea sobre la función del campo la utilizó ampliamente M. Faraday (1791—1867). El desarrollo ulterior de la ciencia sobre los fenómenos eléctricos ha confirmado la idea de la existencia del campo eléctrico y obligó a renunciar a la hipótesis de la "acción a distancia". Entre las cargas de acción recíproca hay un campo eléctrico, cuyas propiedades objetivas las determinan las magnitudes como la intensidad del campo $\mathbf{E}$ y el potencial V.

No obstante, es necesario señalar que los físicos que han desarrollado la teoría del campo, se basaban en los conceptos mecanicistas que reinaban entonces: intentaban explicar los fenómenos electrostáticos construyendo un modelo mecánico. A las líneas de fuerza se les atribuía propiedades mecánicas, considerándolas tensiones (mecánicas) en un medio elástico. Las líneas de fuerza se representaban como hilos elásticos y tensos que iban de unas cargas a otras. La tensión de los hilos explicaba la atracción mutua de los cuerpos cargados de distinto signo; la presión normal a los hilos producía la repulsión mutua de los hilos y podía explicar la repulsión de los cuerpos con cargas de igual signo. Esta teoría exigía el reconocimiento de la existencia de un fluido elástico universal que se hallaba en todos los cuerpos conocidos y llenaba todo el espacio vacío, el éter universal. La difusión del proceso ondulatorio en el mismo éter debía explicar los fenómenos luminosos.

Esta hipótesis del éter mecánico resultó, sin embargo, insolvente ante los nuevos descubrimientos de finales del siglo pasado. Numerosos hechos han revelado la naturaleza peculiar de los procesos eléctricos, que no se pueden reducir a fenómenos puramente mecánicos. Esta renuncia a dar una explicación mecánica a los procesos eléctricos no es, ni mucho menos, una renuncia de la explicación materialista. V. Lenin, criticando los físicos idealistas de principios de este siglo que veían, en la sustitución de las teorías mecánicas por las

electromagnéticas, una renuncia del materialismo, escribía: "...que parezca la limitación de las leyes mecánicas del movimiento a un solo plano de los fenómenos de la naturaleza y su subordinación a las más profundas leyes de los fenómenos electromagnéticos, etc., todo ello no hace más que confirmar una vez más el materialismo dialéctico". *) Y más: "Desde luego, es completamente absurdo decir que el materialismo tenga por "menos" la realidad de la conciencia o afirme como obligatorio el cuadro mecánico y no el electromagnético, ni cualquier otro cuadro infinitamente más complejo del mundo, como *materia en movimiento*". **)

Entre los hechos que confirman la realidad del campo electrostático, están los siguientes. Como hemos visto (§ 138), el campo electrostático se caracteriza por tener determinado valor de energía distribuida con cierta densidad volumétrica. Posteriormente se descubrió que el campo se extiende a velocidad finita. Los experimentos de Faraday sobre la inducción electromagnética (§ 221) han señalado la estrecha relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. En los años 60 del siglo pasado, Maxwell desarrolló la teoría general de los fenómenos electromagnéticos y demostró que el campo electrostático es un caso particular de otro más general, por su naturaleza, del *campo electromagnético*. Esta teoría abarcó una región extremadamente amplia de fenómenos eléctricos y magnéticos; y condujo al descubrimiento de las ondas electromagnéticas y aclaró la naturaleza electromagnética de la luz. De esta manera surgió la teoría única de los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos, basándose en el concepto del campo electromagnético.

La teoría de Maxwell, al parecer, confirmaba la teoría del éter universal. Según la teoría de Maxwell, desarrollada después por Lorentz, los átomos de que constan los cuerpos sólidos, líquidos y gaseosos, están sumergidos en el éter. Cada átomo es un sistema eléctrico complicado: consta de un núcleo positivo y de electrones. De esta manera se consideraba que existían solamente el éter y las cargas eléctricas: positivas (núcleos de los átomos) y negativas (electrones). El espacio "vacío" estaba lleno solamente de éter. En la parte del espacio donde había algún cuerpo, en el éter estaban incrustadas las cargas que formaban parte de los átomos de este cuerpo. Estas cargas originaban en el éter las variaciones que nosotros percibimos como campo electromagnético.

En la teoría de Lorentz, el éter se consideraba como un medio material inmóvil, con propiedades distintas de las propiedades mecánicas de los cuerpos elásticos conocidos. Las propiedades del éter

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Ediciones Pueblos Unidos, Uruguay, 1948, pág. 291.

**) Idem, pág. 313.

www.elsolucionario.org

se expresaban mediante ecuaciones, formuladas por Maxwell, que se deducían de la generalización de numerosos hechos experimentales referentes a los fenómenos electromagnéticos. La teoría de Maxwell-Lorentz tenía algo nuevo respecto a la mecánica: daba una explicación no mecánica a la naturaleza del campo electromagnético. El éter mecánico de las viejas teorías de la luz cedió su lugar al éter electromagnético.

No obstante, el éter se seguía considerando *como un medio continuo que, como cualquier otro medio continuo mecánico, podía servir de sistema de referencia* (compárese lo expuesto en el § 4 del t. I). *Se podía hablar de movimiento de los cuerpos*, por ejemplo, *del movimiento de la esfera terrestre respecto al éter*. Los experimentos de Michelson (véase el t. III) y los de Trouton y Noble y una serie más de experimentos (véase el § 216), con los cuales se intentaba determinar el movimiento de la Tierra respecto al éter, resultaron negativos. La teoría de la relatividad generalizó estos resultados experimentales demostrando que no hay movimiento absoluto respecto al éter. Esto deshizo la última analogía entre el éter y los medios mecánicos continuos. En relación con ello y como quiera que con el concepto de éter se había arraigado históricamente el concepto *de medio con respecto al cual se podía determinar el movimiento*, la física teórica contemporánea ha dejado de utilizar el concepto de "medio etéreo". Ahora hablamos *del campo electromagnético como un aspecto particular de la materia*. El campo electromagnético no sólo posee propiedades diferentes de las propiedades de los medios mecánicos que conocemos, sino que se caracteriza por la peculiaridad de que no puede servir de sistema de referencia

QUINTA PARTE

CORRIENTE CONTINUA

CAPITULO XVI

Leyes fundamentales de la corriente continua

§ 153. Corriente continua. Ley de Ohm. El desplazamiento de partículas cargadas origina la corriente eléctrica. Los portadores de estas cargas pueden ser distintos. En unos casos son átomos o moléculas cargadas (iones), como, por ejemplo, en la conducción electrolítica o en los rayos positivos que surgen en los gases enrarecidos. En otros casos la corriente es debida al movimiento de electrones (en los metales o en los rayos catódicos). No obstante, en todos los casos, la corriente va acompañada de ciertos fenómenos comunes, por ejemplo, de la creación del campo magnético.

No se debe creer que el fenómeno de la corriente eléctrica se reduce a un simple movimiento mecánico de partículas cargadas. En primer lugar; los campos eléctrico y magnético, relacionados con las partículas cargadas en movimiento, poseen, como se ha indicado en el § 152, una naturaleza especial no mecánica. En segundo lugar, incluso el mismo movimiento de las partículas elementales se subordina a otras leyes, que las del movimiento mecánico de los cuerpos macroscópicos (§ 163). Sin embargo, en una serie de cuestiones relacionadas con la corriente, se puede utilizar el concepto del desplazamiento mecánico de las cargas y los cálculos obtenidos basándose en este concepto, en varios casos, dan unos resultados que concuerdan perfectamente con los resultados experimentales. En otros casos, estos conceptos (clásicos) resultan inservibles y hay que ana-

lizar los fenómenos basándonos en conceptos más complejos (de mecánica cuántica).

La corriente eléctrica se caracteriza por una magnitud que se llama *intensidad de la corriente. La intensidad de la corriente I que pasa por una superficie dada, es una magnitud física medida por la cantidad de electricidad que pasa por esta superficie en una unidad de tiempo.* Si en el tiempo Δt se desplaza, a través de una superficie, una cantidad ΔQ de electricidad, la intensidad de la corriente I será:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Cuando I no varía con el tiempo, para la superficie dada, decimos que *la corriente es continua.*

Por unidad de intensidad de corriente en el sistema CGSE se toma la intensidad que en 1 seg desplaza por la superficie dada una unidad *CGSE* de cantidad de electricidad. Debido a lo pequeña que es esta unidad, *en el sistema internacional, por unidad de intensidad de corriente se toma la que por la superficie dada traslada un culombio en un segundo*; *esta unidad de intensidad* se denomina *amperio.*

La definición de amperio como una de las cuatro unidades fundamentales del sistema internacional, se dará en el § 196.

La relación entre el amperio y la unidad electrostática de intensidad de corriente, la determina la ecuación:

$$1 \text{ amperio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ seg}} \cong \frac{3 \cdot 10^9 \text{ unid. } CGSE \text{ de cant. de electr.}}{1 \text{ seg}} \cong$$

$$\cong 3 \cdot 10^9 \text{ unid. } CGSE \text{ de intensidad de corriente.}$$

Las dimensiones de la intensidad de la corriente I las obtenemos de la ecuación (1):

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}. \qquad (2)$$

Examinemos primeramente el fenómeno de la corriente eléctrica en los conductores de primera clase: en los metales. La corriente surge en los conductores solamente cuando en éstos hay regiones de diferentes potenciales. La corriente que se produce en este caso seguirá circulando hasta que los potenciales de estas partes no se igualen. Si mantenemos constante una diferencia de potencial en los extremos de un conductor, en éste circulará una corriente continua.

La intensidad I de la corriente que circula por un conductor homogéneo, satisface, como lo demuestra la experiencia, la *ley de Ohm*:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}. \qquad (3)$$

Aquí, $V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial en los extremos del conductor, y R una magnitud que caracteriza al conductor y que se

www.elsolucionario.org

denomina *resistencia*. Así tenemos que la ley de Ohm indica que la intensidad de la corriente es directamente proporcional a la diferencia de potencial que hay en los extremos del conductor, e inversamente proporcional a la resistencia del conductor.

La ley de Ohm se estableció en 1826 basándose en las mediciones del físico Ohm. Como observaba Ohm que la intensidad de la corriente que suministraba una pila variaba con el tiempo (véase el fenómeno de polarización de los electrodos en el § 179), empezó a utilizar un termopar como manantial de fuerza electromotriz (véase el § 172). Rodeando una de las soldaduras del termopar con hielo y manteniendo la otra en agua hirviendo, pudo obtener una diferencia de potencial bastante estable. Ohm medía la intensidad de la corriente basándose en la acción de la corriente sobre una aguja magnética. Un año después, Ohm publicó un artículo en el cual dedujo teóricamente su ley, comparando la corriente eléctrica con la de un líquido que fluye por un tubo. No obstante hay que observar que esta comparación es justa solamente para el caso de la corriente laminar de los líquidos (véase el t. I) y lo deja de ser para el movimiento turbulento.

Ulteriormente, esta ley la verificaron muchos autores y se estableció que se cumple con mucha exactitud. Una divergencia con la ley de Ohm de un 1% se observó solamente a grandes densidades de intensidad de la corriente, del orden de varios millones de amperios por cm^2.

Tanto en los experimentos del mismo Ohm como en otros, la intensidad de la corriente se medía basándose en la acción magnética de la corriente. Rigurosamente hablando, hace falta demostrar previamente que la acción magnética es proporcional a la intensidad de la corriente determinada según la ecuación (1) en función de la cantidad de electricidad ΔQ que pasa en la unidad de tiempo. En correspondencia con la definición (1), la intensidad de la corriente se puede medir de manera absoluta, descargando un condensador de determinada capacidad después de haberlo cargado hasta una diferencia de potencial determinada. La diferencia de potencial se puede medir, y la capacidad del condensador de simple forma geométrica, se puede calcular. No obstante, en la práctica son difíciles de realizar estas mediciones, ya que al descargar el condensador no se puede obtener una corriente continua.

Por esto, en la actualidad, la intensidad de la corriente se determina, como en los trabajos de Ohm, basándose en la acción magnética de la corriente, a saber, en la fuerza de acción mutua entre dos conductores paralelos infinitos, por los cuales circula una corriente de intensidad determinada (véase el § 196).

§ 154. Resistencia de los conductores. La resistencia de un conductor depende del material del mismo y de sus dimensiones y forma.

Para un trozo de conductor de sección S constante y de longitud l la resistencia es

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (1)$$

donde ρ es una magnitud que depende solamente del material del conductor y se llama *resistividad* o *resistencia específica* del material. Por lo tanto, la resistencia de un trozo de conductor es directamente proporcional a la longitud l e inversamente proporcional al área de su sección S.

De la fórmula (1) tenemos que:

$$\rho = R\frac{S}{l}, \tag{1a}$$

de donde se ve que la resistividad ρ numéricamente es igual a la resistencia del conductor de unidad de longitud y unidad de superficie en la sección transversal.

En el sistema *CGSE, por unidad de resistencia* se toma la de un conductor en que la diferencia de potencial de sus extremos es de una unidad *CGSE* y circula por él una unidad *CGSE* de intensidad de corriente. Como esta unidad es muy grande para su aplicación, *como unidad práctica de resistencia se ha elegido la de un conductor por el que circula una corriente de un amperio siendo la diferencia de potencial de un voltio. Esta unidad* se llama *ohmio.*

La relación entre el ohmio y la unidad *CGSE* de resistencia se obtiene de la ecuación de la ley de Ohm:

$$1 \text{ ohmio} = \frac{1 \text{ voltio}}{1 \text{ amperio}} \cong \frac{\frac{1}{300} \text{ unid. } CGSE \text{ de potencial}}{3\cdot 10^9 \text{ unid. } CGSE \text{ de intensid.}} \cong$$

$$\cong \frac{1}{9\cdot 10^{11}} \text{ unid. } CGSE \text{ de resistencia.}$$

Un millón de ohmios se llama *megohmio.*

Las dimensiones de la resistencia las obtenemos de la ecuación:

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = TL^{-1}.$$

En el sistema práctico, la resistividad ρ se ha establecido medirla en las unidades deducidas de la fórmula (1 a); teniendo en cuenta que la resistencia R se expresa en ohmios, el área de la sección S en centímetros cuadrados, y la longitud l en centímetros. La unidad de resistividad obtenida se denomina *ohmio-centímetro* (abreviadamente *ohm. cm* u Ω. *cm*)

De esta manera, por unidad de resistividad se toma la de un material en forma de cubo de 1 cm de arista que tenga una resistencia de 1 ohmio cuando la corriente va de una cara a la opuesta de este cubo.

En los cálculos de la resistencia de los conductores utilizando la fórmula (1a), frecuentemente se mide el área de la sección S en

milímetros cuadrados, y la longitud l en metros. En correspondencia con ello, por la unidad de resistividad se toma la de un material en forma de conductor de 1 m de longitud y 1 mm² de sección transversal que tenga 1 ohmio de resistencia.

Entre esta unidad técnica de resistividad y el ohm·cm hay la siguiente relación:

$$1 \text{ unid. técn. de resistividad} = 1 \text{ ohm} \frac{0{,}01 \text{ cm}^2}{100 \text{ cm}} = 10^{-4} \text{ ohm} \cdot \text{cm}.$$

Además de la resistividad ρ, frecuentemente se utiliza la magnitud inversa:

$$\sigma = \frac{1}{\rho},$$

denominada *conductibilidad* (véase la tabla IV).

La resistividad ρ depende de la temperatura del conductor. A las temperaturas habituales, para casi todos los metales la resistividad varía con la temperatura en función lineal:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \tag{2}$$

donde t es la temperatura en la escala de Celsio, ρ_0 la resistividad a 0° C, y α un coeficiente constante.

Tabla IV

Resistividad y conductibilidad de algunos conductores a 0°C

Conductor	$\rho \cdot 10^6$, ohm·cm	$\sigma \cdot 10^{-4}$ ohm^{-1}·cm^{-1}
Aluminio	2,53	39,5
Grafito	39,2	2,55
Hierro puro	8,69	11,48
Cobre puro	1,55	64,5
Mercurio	94,3	1,06

Para muchos metales el valor numérico de α es aproximadamente de 0,00367, es decir, de $\frac{1}{273}$, por lo tanto la ecuación (2) se puede escribir:

$$\rho = \alpha \rho_0 T, \tag{2a}$$

donde T es la temperatura absoluta. No obstante, esta ecuación tiene carácter aproximado y no es justa ni a temperaturas elevadas, ni a temperaturas muy bajas. A temperaturas elevadas el coeficiente α aumenta.

www.elsolucionario.org

Además, la resistencia aumenta al fundirse los metales. A bajas temperaturas α disminuye. En la fig. 81 se representa la variación de ρ en función de T para el Cu, Fe, Pt y Pb.

A temperaturas muy bajas del orden de 1—7° K, la resistencia de algunos metales y aleaciones disminuye bruscamente, llegando a ser infinitamente pequeña (véase la fig. 82). Este fenómeno descubierto por el físico holandés Kamerlingh Onnes en 1911, se denomina *superconductibilidad*. En la superconductibilidad la resistencia prácticamente es igual a cero. En la actualidad, la superconductibilidad se ha logrado para un gran número de elementos (Al, Ti, Zn,

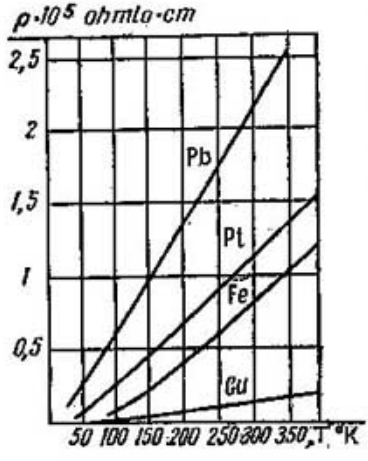


Fig. 81. Dependencia entre la resistividad de los metales y la temperatura absoluta de los mismos.

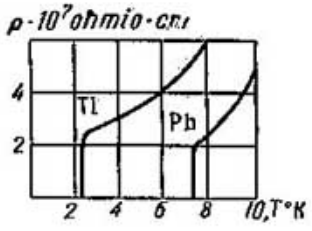


Fig. 82. Disminución hasta cero de la resistividad al pasar al estado de superconductibilidad.

Tc, Cd, Sn, Hg, Tl, Pb, Bi, U y otros), aleaciones y para una serie de compuestos químicos. En las aleaciones, la superconductibilidad se puede observar incluso si uno de los componentes en su forma pura no acusa esta propiedad. Entre los compuestos químicos, la superconductibilidad es posible hasta cuando ninguno de los componentes por separado posea superconductibilidad. La temperatura crítica T_K a que la sustancia pasa al estado de superconductibilidad (temperatura de salto o punto de salto), en la mayoría de los casos, como se ha indicado, está en el intervalo de 1—7° K. Sin embargo, se presentan valores de T_K más bajos y más elevados. De los elementos puros investigados hasta ahora, el de valor más bajo, de KT_K=0,35° K, es el hafnio (Hf), y el de valor más alto de T_K=11,7°, el tecnecio (Tc). El compuesto Nb_3Sn tiene T_K=18° K. Para diferentes isótopos de un mismo elemento, la temperatura de salto o punto de salto T_K es distinta. Al aumentar la presión, la temperatura de salto T_K varía, pero de modo insignificante (aproximadamente en 10^{-5} grados/atm.), teniendo en cuenta que en unas sustancias

se observa un aumento de T_K con el aumento de la presión, y en otras, un descenso de T_K.

Al pasar una sustancia al estado de superconductibilidad, varían al mismo tiempo una serie de otras propiedades: la capacidad calorífica varía a saltos y (si hay un campo magnético) hay desprendimiento o absorción de calor. Son muy peculiares sobre todo las propiedades magnéticas de los superconducto es. Una sustancia en estado de superconductibilidad es un diamagnético "ideal", en el interior del cual, la inducción magnética $B=0$. La susceptibilidad magnética (§ 202) de un superconductor $\varkappa=-\frac{1}{4\pi}$. La igualdad a cero de la inducción magnética en un superconductor se puede explicar por crearse, en su capa superficial, corrientes cuyo campo magnético compensa el campo magnético exterior. En una capa superficial muy delgada de un cuerpo superconductor (de unos 10^{-5} cm), $B\neq 0$. Un intenso campo magnético exterior destruye el estado de superconductibilidad. Esta destrucción del estado de superconductibilidad se produce a costa del campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por el cuerpo superconductor.

El fenómeno de transición del estado superconductor al habitual y viceversa, ha sido estudiado con detalle, tanto teórica como experimentalmente, por varios físicos soviéticos (L. Landáu, A. Shállnikov y otros). A. Shállnikov descubrió que en la sustancia, al pasar del estado superconductor al corriente, se forman capas superconductoras independientes que se alternan con las capas corrientes de conductibilidad finita.

A pesar de las numerosas investigaciones y especulaciones teóricas, hasta los últimos tiempos no se ha podido crear una teoría completa de la superconductibilidad. Solamente en 1956, el físico norteamericano Cooper demostró que el papel decisivo en el paso al estado de superconductibilidad lo desempeña el proceso de formación de pares de electrones con momentos de spin situados paralelamente (véase el § 202). Después de esto se ha conseguido, en lo fundamental, explicar la superconductibilidad y los fenómenos que la acompañan. En la superconductibilidad, los electrones del interior de la sustancia se comportan como si estuviesen dotados de superfluidez. En la forma más completa, la teoría de la superconductibilidad ha sido desarrollada, basándose en lo indicado, por el científico soviético N. Bogoliúbov y sus asistentes.

Además de los metales, que son muy buenos conductores (σ es de unos 10^4—10^5 ohm$^{-1}\cdot$cm^{-1}), hay cuerpos de conductibilidad mucho menor (σ de unos 10—10^{-10} ohm$^{-1}\cdot$cm^{-1}), por ejemplo, el selenio, el óxido cuproso (Cu_2O), muchos minerales, los elementos no metálicos de los grupos cuarto, quinto y sexto de la tabla de Mendeléiev, los compuestos no orgánicos con oxígeno y azufre, al-

gunas aleaciones de metales, varios colorantes orgánicos, y otros. Estas sustancias se llaman *semiconductores* (véase el § 171).

En los lugares de contacto de algunos semiconductores con los metales se observan unos fenómenos especiales: se forma una *barrera* (*capa barrera* o *capa de detención*) que permite pasar la corriente sólo en una dirección. Así, en el caso del óxido cuproso, a una misma diferencia de potencial, la corriente que pasa del metal al óxido cuproso es varios millares de veces mayor que la que pasa en la dirección contraria (véase el § 237).

§ 155. Vector de densidad de corriente. La intensidad de la corriente $I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ es una magnitud *escalar*: viene determinada solamente por la magnitud de la carga trasladada a través de la superficie dada en la unidad de tiempo, independientemente de la dirección del movimiento de las partículas portadoras de la carga, ni del ángulo que forme la dirección de este movimiento con la superficie que atraviesan las partículas. Está claro que esta característica de la corriente eléctrica no es completa; en muchos casos se necesita saber la *dirección* y el sentido en que se desplazan las partículas cargadas. Para tener en cuenta la dirección y el sentido del traslado de las cargas se introduce el concepto de *vector de densidad de corriente*.

La corriente puede ser creada por el movimiento de partículas cargadas positiva o negativamente. La experiencia demuestra que los movimientos en sentidos contrarios de las partículas de distinto signo, crean corrientes equivalentes en toda la acepción de la palabra. Por eso nos limitaremos a examinar el movimiento de partículas de un signo cualquiera, por ejemplo, positivas; entonces, el movimiento de las partículas negativas se puede considerar convencionalmente como el movimiento de partículas positivas en sentido contrario.

Examinemos primeramente flujo homogéneo de partículas positivas, es decir, un flujo en que todas las partículas se desplazan en el mismo sentido y a la misma velocidad, estando estas partículas distribuidas en el espacio con densidad constante. Consideremos, en el interior del conductor por donde se desplazan las cargas, una superficie ΔS_0 perpendicular a la dirección del movimiento de las cargas. Entenderemos *por vector de densidad de corriente* i el vector que coincida, por el sentido, con el del movimiento de las partículas positivas y numéricamente es igual a

$$i=\frac{\Delta Q}{\Delta t\cdot\Delta S_0}, \qquad (1)$$

donde ΔQ es la carga trasladada a través de la superficie ΔS_0 en el tiempo Δt. Así tenemos que *el valor numérico del vector de densidad*

www.elsolucionario.org

corriente es igual al de la carga trasladada por unidad de tiempo través de la unidad de superficie perpendicular a la dirección l movimiento de las cargas. El sentido del vector de densidad de rriente es el del movimiento de las cargas positivas.

Si la superficie ΔS está orientada arbitrariamente, se toma su royección en el plano perpendicular a la dirección del movimiento e las cargas, y entonces:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S \cos \alpha}, \tag{2}$$

onde α es el ángulo entre la dirección del movimiento de las cargas ositivas y la normal a la superficie ΔS.

En el caso de flujo heterogéneo de partículas cargadas, se toma na superficie tan pequeña ΔS y un intervalo de tiempo tan pequeño t, que en ellos el flujo se pueda considerar homogéneo. Entonces, l valor numérico del vector de densidad de corriente en el lugar dado el conductor y en el instante dado de tiempo, se determinará de la cuación:

$$i = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S \cos \alpha}. \tag{2a}$$

Designando ΔI la intensidad de corriente que pasa por la superfi- ie ΔS, tenemos que:

$$\Delta I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

espués de lo cual, de la ecuación (2a) obtenemos que

$$i \cos \alpha = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}.$$

a magnitud $i \cos \alpha$ es la proyección del vector de densidad de co- riente i sobre la normal a la superficie ΔS (fig. 83), de donde:

$$i_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \tag{3}$$

s decir, *la componente normal del vector de densidad de corriente es gual numéricamente a la intensidad de la corriente que pase por a unidad de superficie.*

El concepto de densidad de corriente nos permite formular de tra manera, a la de la página 133, la ley de Ohm. Como se ha indi- ado, hemos convenido en que la corriente la crea el movimiento e cargas positivas (en realidad, la corriente en el conductor la crea l movimiento de electrones). Las cargas libres se trasladan por el onductor en la dirección de las fuerzas del campo eléctrico. Por onsiguiente, el vector de densidad de corriente i estará dirigido

en el sentido de la caída del potencial, es decir, hacia donde se dirige el vector de intensidad del campo **E**.

Sea un conductor cilíndrico por el que fluye una corriente de intensidad ΔI. Supongamos que las cargas se desplazan perpendicularmente a la sección normal ΔS del conductor (fig. 84). Sean dos secciones de este conductor a una distancia Δl una de otra. Sea

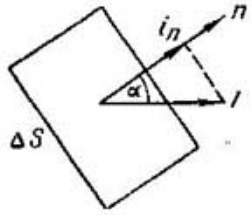


Fig. 83. Determinación de la componente normal de la densidad de corriente i_n.

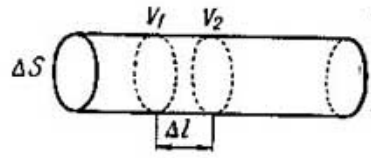


Fig. 84. Esquema para deducir la densidad de corriente.

$V_1 - V_2 = -\Delta V$ la diferencia de potencial entre las secciones. La resistencia de este trozo de conductor será $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta S}$, donde σ es la conductibilidad del material del conductor. Aplicando a este conductor la ley de Ohm, tenemos que:

$$\Delta I = \frac{V_1 - V_2}{R} = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta l} \Delta S,$$

de donde

$$\frac{\Delta I}{\Delta S} = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta l}, \qquad (4)$$

pero $\Delta I/\Delta S$ es la densidad de la corriente i, y la magnitud $-\Delta V/\Delta l$, que expresa la caída del potencial por unidad de longitud, es igual a la intensidad del campo E en el interior del conductor. Con lo cual, la ecuación (4) adquiere la forma:

$$i = \sigma E.$$

Ya se ha indicado que el vector de densidad de corriente **i** tiene el mismo sentido que el vector de intensidad del campo **E**, por eso, la última ecuación se puede escribir en forma vectorial:

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}. \qquad (5)$$

Esta ecuación es *la ley de Ohm para la densidad de corriente*. Nos dice que la densidad de corriente **i** es proporcional a la intensidad del campo eléctrico **E** y tiene el mismo sentido que esta intensidad. En el conductor por el cual fluye la corriente, la intensidad del

campo no es igual a cero. Y viceversa, si en el interior del conductor $E=0$, en el conductor no hay corriente: si $E=0$, tenemos un fenómeno electrostático.

§ 156. Conservación de las cargas. Circuito cerrado de las corrientes estacionarias. En el párrafo anterior hemos obtenido la ecuación que relaciona la intensidad de la corriente ΔI que pasa a través de una pequeña superficie ΔS [fórmula (3) del § 155], con la densidad de corriente:

$$i_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}.$$

De aquí deducimos que la intensidad de la corriente ΔI que pasa por una pequeña superficie ΔS se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Delta I = i_n \Delta S. \qquad (1)$$

Si la corriente pasa por una superficie finita S, dividiremos ésta en superficies elementales ΔS. Entonces la intensidad de la corriente que pasa por toda la superficie S será la suma de las intensidades ΔI:

$$I = \sum i_n \Delta S. \qquad (2)$$

De esta manera tenemos que la intensidad de la corriente es el flujo del vector de densidad de corriente.

Determinemos la intensidad de la corriente I que pasa por una superficie cerrada que comprende cierto volumen en el interior de un conductor. Consideraremos positivas las normales a esta superficie y exteriores al volumen (fig. 85). En este caso, los valores de los ángulos α pueden ser menores o mayores que $\pi/2$, y las intensidades elementales de la corriente ΔI, según la (1), pueden tener valor positivo o negativo. El valor positivo de la intensidad elemental de la corriente ΔI expresa que por la superficie dada ΔS *salen* cargas positivas desde el interior del volumen limitado por la superficie S. El valor negativo de la intensidad elemental de la corriente ΔI expresa que por esta superficie ΔS *se introducen* cargas positivas en el mismo volumen. La cantidad de cargas introducidas será igual a la de las cargas sacadas, si la suma de todas las intensidades elementales de la corriente que pasa por esta superficie S, que limita el volumen dado, es igual a cero. Si la intensidad total de la corriente I a través de la superficie cerrada S es diferente de cero, la cantidad de cargas introducidas y sacadas no es la misma, es decir, la cantidad total de cargas del interior del volumen S varía. El valor positivo de la intensidad de la corriente indica que las

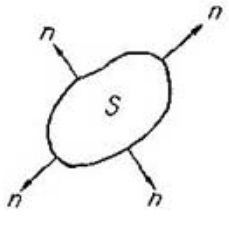


Fig. 85. Normales exteriores a una superficie cerrada S.

www.elsolucionario.org

cargas disminuyen, y el valor negativo, que aumentan las cargas en el interior del volumen. Si designamos por $-\Delta Q$ la disminución de las cargas durante el tiempo Δt en el interior del volumen limitado por la superficie S, tenemos que:

$$I\Delta t = \sum i_n \Delta S \Delta t = -\Delta Q. \qquad (3)$$

Esta ecuación expresa que la variación de la carga total ΔQ en el interior de un volumen cerrado es debida a la introducción o extracción de cargas. Por consiguiente, la ecuación (3) representa la *ley de conservación de las cargas.*

De la ecuación (3) de la intensidad de la corriente I que fluye por una superficie cerrada, tenemos que:

$$I = \sum i_n \Delta S = -\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \qquad (3a)$$

Introduzcamos el concepto de *líneas de flujo eléctrico.* Por línea de flujo eléctrico se entiende la línea cuya tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección del vector de densidad de corriente en el punto dado.

La expresión $\Sigma i_n \Delta S$ es el flujo eléctrico a través de la superficie cerrada S. La ecuación (3a) indica que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada puede ser distinto de cero, solamente si varía la carga en el interior del volumen limitado por la superficie dada. Si la carga total en el interior de esta superficie no varía, las líneas de flujo eléctrico solamente atraviesan la superficie. Estas líneas pueden terminar solamente donde haya acumulación o disminución de cargas. *Si las cargas son constantes en una región dada, las líneas de flujo eléctrico en esta región son continuas: o son cerradas, o se pierden en el infinito.* El espacio limitado por las líneas de flujo eléctrico lo llamaremos *tubo del flujo eléctrico.* De la definición del tubo de flujo eléctrico está claro que la *intensidad de la corriente a través de una sección cualquiera del tubo, es la misma.*

El concepto de líneas de flujo eléctrico, como se deduce de lo dicho, nos permite considerar la ecuación (3a) como análoga al teorema de Ostrogradski-Gauss en la electrostática (véase el § 126). En la electrostática, según el teorema de Ostrogradski-Gauss, el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la suma de cargas (multiplicado por 4π) que se hallan en el interior de la superficie. Según la ecuación (3a), el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la velocidad de disminución de cargas en el interior de la superficie.

Un ejemplo de líneas de flujo eléctrico no cerradas son las líneas de flujo eléctrico que surgen al descargar un condensador. Las armaduras del condensador, que se descargan, son los extremos de las líneas de flujo eléctrico, ya que sus cargas varían durante la descarga

del condensador. El proceso de descarga de un condensador no es estacionario: la intensidad de la corriente varía con el tiempo, disminuyendo al fin y al cabo hasta el valor cero. Como cualquier carga se agota con el tiempo, la corriente con líneas de flujo eléctrico no cerradas, no puede mantenerse por un tiempo indefinido. *Las líneas de flujo eléctrico de una corriente estacionaria*, es decir, *continua permanente, son líneas cerradas.* Por ejemplo, en el caso de una corriente continua mantenida por una pila, las líneas de flujo eléctrico se cierran por la parte interna del circuito, formando curvas cerradas.

Utilizando las notaciones del cálculo diferencial, escribiremos la ecuación (1) así:

$$dI = i_n dS. \tag{1a}$$

Sustituyendo en la (2) la suma por la integral extendida a toda la superficie S tenemos que

$$I = \int_S i_n dS. \tag{2a}$$

Por último, sustituyendo en la (3a) el intervalo de tiempo Δt por otro infinitamente pequeño dt, tenemos que

$$I = -\frac{dQ}{dt}. \tag{3b}$$

Colocando en esta ecuación el valor de I según la (2a), escribimos la ley de la conservación de las cargas eléctricas de la forma siguiente:

$$\int_S i_n dS = -\frac{dQ}{dt}. \tag{4}$$

La ley de la conservación de las cargas la podemos escribir también de otra manera. Para ello dividimos la parte de la derecha y de la izquierda de la ecuación (4) por el volumen V que comprende la superficie cerrada S:

$$\frac{1}{V}\int_S i_n dS = -\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{V}\right). \tag{5}$$

Disminuyendo hasta cero el volumen V, nos da que Q/V es la densidad ρ de las cargas en el lugar dado. Así, a la derecha de la ecuación (5) tendremos $-d\rho/dt$, y a la izquierda:

$$\lim_{V\to 0} \frac{\int_S i_n dS.}{V}.$$

Como se sabe del cálculo vectorial, este límite es igual a la divergencia del vector **i**:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = \lim_{V\to 0} \frac{\int_S i_n dS}{V}.$$

Por consiguiente, la ecuación (5) adquiere la forma:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{d\rho}{dt}, \tag{6}$$

que expresa la ley de la conservación de las cargas eléctricas en forma diferencial. Si ρ es constante en el tiempo, $\frac{d\rho}{dt}=0$, y la (6) tiene la forma:

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = 0. \tag{6a}$$

§ 157. Ley de Joule—Lenz. Los experimentos demuestran que el paso de una corriente eléctrica por un conductor viene acompañado de un desprendimiento de calor del conductor. Este desprendimiento de calor está relacionado con el transporte de las cargas y, por consiguiente, con el trabajo de las fuerzas eléctricas, trabajo que se invierte en este transporte.

Sea una sección del conductor por la cual pasa la carga Q en el tiempo t, de donde $Q=It$. Esta carga, al desplazarse por el conductor, recorre cierta diferencia de potencial V_1-V_2 en el tiempo t, y las fuerzas eléctricas realizan un trabajo:

$$A = It(V_1 - V_2). \tag{1}$$

El trabajo de las fuerzas del campo no causa un aumento de corriente y, por lo tanto, se invierte en calentar el conductor. Utilizando la ley de Ohm, la expresión del trabajo la escribiremos de la manera siguiente:

$$A = I^2Rt, \tag{1a}$$

donde R es la resistencia del trozo del conductor de diferencia de potencial V_1-V_2.

Calculemos el valor numérico del calor desprendido del conductor. Supongamos que la intensidad de la corriente I viene expresada en amperios, el tiempo t en segundos, y la diferencia de potencial V_1-V_2 en voltios. Es fácil ver que la fórmula (1) nos da el trabajo en julios. Efectivamente, al pasar una corriente de 1 A durante 1 seg, se transporta una cantidad de electricidad igual a un culombio; pero sabemos, según la definición de las págs. 46—47 que en el transporte de una carga de 1 culombio entre dos puntos cuya diferencia de potencial es de 1 voltio, se efectúa un trabajo de 1 julio. Recordando que el julio equivale a 0,24 cal, para la cantidad de calor en calorías desprendido en t segundos de un conductor cuya diferencia de potencial en los extremos sea V_1-V_2 voltios y por el cual pase una corriente de I amperios, tendremos la ecuación:

$$Q = 0{,}24\, It(V_1 - V_2). \tag{2}$$

Esta ecuación, teniendo en cuenta la ley de Ohm, se puede escribir

www.elsolucionario.org

de las maneras siguientes:

$$Q = 0{,}24 I^2 R t, \tag{2a}$$

$$Q = 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t. \tag{2b}$$

En este caso, la resistencia R debe ir expresada en ohmios.

La ecuación (2a) fue simultáneamente establecida por el profesor de la Universidad de Petersburgo E. Lenz y por Joule, y se denomina *ley de Joule-Lenz*. Según esta ley, *la cantidad de calor Q que se desprende de un conductor al pasar una corriente, es proporcional al tiempo t en que pasa la corriente, a la resistencia del conductor R y al cuadrado de la intensidad de la corriente I^2.*

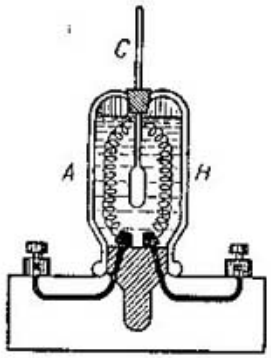


Fig. 86. Aparato de Lenz para medir la cantidad de calor desprendido al pasar corriente por un conductor.

En la fig. 86 se representa el aparato que utilizó Lenz. El recipiente de vidrio A, lleno de alcohol, era un calorímetro. La corriente pasaba por la espiral H de resistencia conocida. El calentamiento del alcohol durante determinado tiempo t se medía con el termómetro C.

Observemos que el coeficiente 0,24 de la ley de Joule—Lenz, se introduce para unidades determinadas: cuando la cantidad de calor se mide en calorías, la intensidad de la corriente en amperios, y la resistencia en ohmios. Si nosotros expresamos la cantidad de calor desprendido en julios, la intensidad de la corriente en amperios, el tiempo en segundos y la resistencia en ohmios, el coeficiente numérico 0,24 se sustituye en las fórmulas (2), (2a) y (2b) por la unidad, y para la ley de Joule—Lenz tenemos que:

$$Q = I^2 R t. \tag{3}$$

Transformemos la ley de Joule-Lenz utilizando el concepto de densidad de corriente i y la densidad de la potencia calorífica w. Se entiende por densidad de potencia calorífica w la magnitud que mide la cantidad de calor desprendido por unidad de tiempo de una unidad de volumen del conductor. Sea un conductor cilíndrico de longitud Δl y de sección transversal S; entonces:

$$w = \frac{Q}{S \cdot \Delta l \cdot t};$$

colocando en esta ecuación en lugar de Q su valor según la (3), te-

nemos que:

$$w = \frac{I^2 R}{S \cdot \Delta l},$$

o, como $R = \rho \frac{\Delta l}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{S}$ y $\frac{I}{S} = i$, tenemos que:

$$w = \frac{1}{\sigma} i^2.$$

Si en lugar de la densidad de corriente i escribimos su valor en función de la conductibilidad y de la intensidad del campo eléctrico según la fórmula (5) del § 155, por la cual $i = \sigma E$, tenemos que:

$$w = \sigma E^2. \qquad (4)$$

es decir, la densidad de la potencia calorífica es proporcional al cuadrado de la intensidad del campo eléctrico y de la conductibilidad del conductor.

Cuanto menor sea la resistividad del conductor, menor será la cantidad de calor que se desprende del mismo (siendo la intensidad de la corriente la misma). En el estado de *superconductibilidad*, cuando la resistividad es infinitamente pequeña, del conductor, al pasar la corriente, no se desprende cantidad alguna perceptible de calor. Como, en este caso, la energía de la corriente no se invierte en nada, una vez creada la corriente en un superconductor cerrado, se mantendrá por tiempo indefinido sin necesidad de suministrarle energía desde fuera.

El desprendimiento de calor en los conductores desempeña un gran papel en la técnica. El funcionamiento de los hornos eléctricos de las fábricas y el de toda clase de aparatos termoeléctricos, se basa en el fenómeno de Joule—Lenz. El calentamiento de los conductores al paso de la corriente se utiliza también para la incandescencia de los filamentos de las lámparas eléctricas. Los primeros intentos de obtener luz calentando los conductores con corriente eléctrica, pertenecen al mismo Lenz. No obstante, sólo en 1874 el ingeniero ruso A. Lodiguin fue el primero en construir lámparas, bastante perfectas desde el punto de vista técnico, que se pudiesen utilizar para alumbrar. En 1875, con lámparas de A. Lodiguin se alumbraron los lugares de trabajo en la construcción del puente Liteini a través del río Nevá en Petersburgo; esto fue la primera utilización práctica de las lámparas de incandescencia.

En una serie de casos, el desprendimiento de calor de los conductores es perjudicial. Entre estas pérdidas perjudiciales de energía al desprenderse calor, está la pérdida en los conductores de energía eléctrica desde el lugar de obtención de la energía hasta el consumidor.

Examinemos unos cuantos ejemplos de cálculo de las resistencias y de la cantidad de calor desprendido de los conductores.

E j e m p l o 1. Determinemos la resistencia total de dos conductores conectados en serie (fig. 87), de resistencias R_1 y R_2 respectivamente, y calculemos la relación de las cantidades de calor Q_1/Q_2 que se desprenden en este caso de cada uno de los conductores.

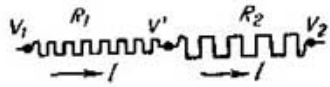


Fig. 87. Conexión en serie de conductores.

S o l u c i ó n. La intensidad de la corriente I al conectar en serie los dos conductores, será la misma en cada uno de ellos. Apliquemos la ley de Ohm a cada uno de los conductores independientemente:

$$IR_1 = V_1 - V', \quad IR_2 = V' - V_2.$$

Sumando estas ecuaciones obtenemos que:

$$I(R_1 + R_2) = V_1 - V_2,$$

de donde

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R}, \text{ donde } R = R_1 + R_2 \tag{5}$$

es la resistencia total de los dos conductores. De esta manera tenemos que la resistencia total de conductores conectados en serie es igual a la suma de las resistencias de cada uno de ellos.

Las cantidades de calor Q_1 y Q_2 que se desprenden de cada uno de los conductores serán:

$$Q_1 = 0{,}24I^2R_1t, \quad Q_2 = 0{,}24I^2R_2t, \text{ de donde } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

es decir, las cantidades de calor desprendido de los conductores en serie, están en razón directa con las resistencias de los conductores. En el conductor de mayor resistencia, estando en serie, se desprende mayor cantidad de calor.

E j e m p l o 2. Determinemos la resistencia de dos conductores en paralelo R_1 y R_2 y calculemos la relación de las cantidades de calor Q_1/Q_2 desprendido de cada uno de los conductores (fig. 88).

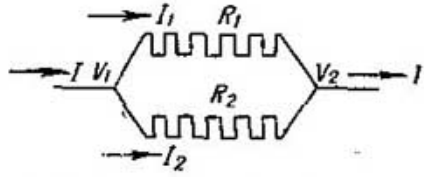


Fig. 88. Conductores conectados en paralelo.

La diferencia de potencial en los extremos de dos conductores en paralelo es la misma. Aplicando la ley de Ohm a cada uno de los conductores y designando con I_1 e I_2 las intensidades respectivas de las corrientes, tenemos que:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}, \text{ de donde } \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

www.elsolucionario.org

es decir, las intensidades de las corrientes de los conductores en paralelo, son inversamente proporcionales a las resistencias de los conductores. La intensidad total de la corriente que pasa por los dos conductores, será:

$$I = I_1 + I_2 = (V_1 - V_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V_1 - V_2}{R},$$

donde R es la resistencia resultante de los dos conductores. De aquí que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad (6)$$

es decir, en los conductores en paralelo, la inversa de la resistencia resultante es igual a la suma de las inversas de las resistencias de los conductores.

Para calcular la cantidad de calor que se desprende, se debe utilizar la fórmula (2b) de la ley de Joule—Lenz, ya que la diferencia de potencial en los extremos de ambos conductores es la misma:

$$Q_1 = 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_1}\,t, \quad Q_2 = 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_2}\,t,$$

de donde

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

es decir, las cantidades de calor que se desprende de los conductores en paralelo son inversamente proporcionales a las resistencias de los conductores: en el conductor de menor resistencia se desprende más calor.

Demostremos que la cantidad total de calor, que es la suma de las cantidades de calor desprendidas de ambos conductores, se puede calcular por la fórmula (2b), si en ella utilizamos el valor de la resistencia resultante determinada según la fórmula (6); efectivamente:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_1}\,t + 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_2}\,t = 0{,}24\,(V_1 - V_2)^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)t,$$

de donde, según la (6):

$$Q = 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\,t.$$

§ 158. Medición de la intensidad de la corriente y de la diferencia de potencial. La intensidad de la corriente I puede determinarse en función de la cantidad de carga ΔQ transportada y del tiempo Δt invertido en el transporte de esta carga por el conductor dado, ya que, según la fórmula (1) del § 153 tenemos que:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

No obstante, en la práctica es difícil de realizar esta medición. Por eso la intensidad de la corriente se mide con instrumentos especiales basados en otros principios. Más adelante (véase el § 213) describiremos un tipo muy difundido de instrumentos electromagnéticos; ahora veremos un instrumento basado en la acción térmica de la corriente.

El esquema de un instrumento "térmico" de medición viene representado en la fig. 89.

La corriente a medir se conecta a los bornes A y B del instrumento haciéndola pasar por un conductor fino ab. Al desprenderse calor, según la ley de Joule—Lenz, el hilo conductor se calienta y se dilata. Desde la parte media del hilo conductor ab sale el hilo cd unido al segundo hilo fe arrollado a la polea Q y mantenido tenso por el resorte T. En el eje de la polea Q se fija una aguja (manecilla) S. Al dilatarse el conductor ab, la aguja S gira (fig. 89 b). Cuanto mayor sea la intensidad de la corriente que pasa por el conductor ab, más se dilatará éste y mayor será la desviación de la aguja S. De esta manera y teniendo calibrada la escala, se puede medir la intensidad de la corriente I que pasa por el instrumento.

No obstante, este instrumento no se puede conectar directamente al circuito para medir la corriente que pasa por él, ya que el hilo conductor ab tiene que ser muy fino, con lo cual su resistencia es

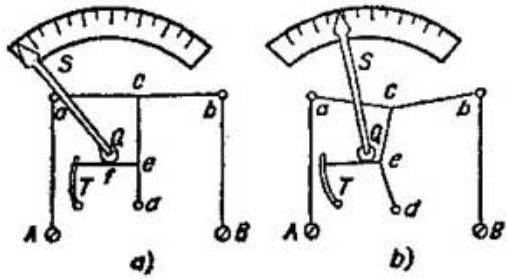


Fig. 89. Esquema de un instrumento térmico de medición.

considerable. Por eso, la conexión de un instrumento de esta clase en el circuito, como regla general, acarrea una notable variación de la resistencia general del circuito y, por consiguiente, una variación de la intensidad de la corriente. La intensidad de la corriente medida no será igual a la de la corriente que circulaba por el circuito antes de conectarle el instrumento de medida. Además, este instrumento no sirve para medir considerables intensidades de corriente, porque en este caso el hilo conductor ab se fundiría. Por eso, paralelamente al instrumento se conecta un conductor cuya resistencia se elige de manera que la corriente que pase por el instrumento sea una fracción determinada de la corriente no bifurcada del circuito.

Supongamos que tenemos que medir la intensidad de la corriente I que pasa por el conductor CC'. El instrumento de medición G se conecta *en serie* al conductor CC'. Paralelamente a los bornes AB del instrumento de medición se conecta una resistencia conocida S, denominada *derivación* (*shunt*) (fig. 90). Sea R_g la resistencia

del instrumento, y R_s la de la derivación (shunt). Designemos con I_g la intensidad de la corriente que pasa por el instrumento, e I_s la que pasa por la derivación. Entonces tendremos primeramente que la suma de las intensidades de las corrientes I_g e I_s deberá ser igual a la intensidad de la corriente I que pasa por el conductor CC'; en segundo lugar, las intensidades de las corrientes I_g e I_s deben ser inversamente proporcionales a las resistencias R_g y R_s (véase la pág. 149), es decir:

$$I_g + I_s = I, \quad \frac{I_g}{I_s} = \frac{R_s}{R_g}.$$

De estas dos ecuaciones tenemos que:

$$I_g = I \frac{R_s}{R_s + R_g}. \tag{1}$$

De la fórmula (1) deducimos que cuanto menor sea la resistencia en derivación R_s tanto menor será la fracción de la intensidad total

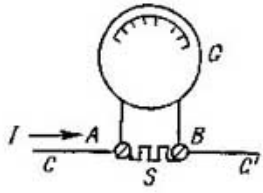


Fig. 90. Conexión de la resistencia en derivación S.

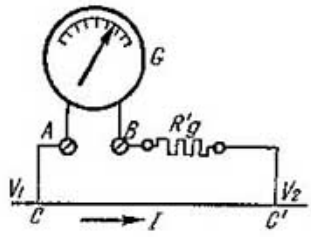


Fig. 91. Conexión en serie de la resistencia R'_g con el instrumento G de medición para medir la diferencia de potencial.

I de la corriente que pase por el instrumento de medición. Para que la intensidad de la corriente I_g del instrumento G sea $1/n$ parte de la intensidad de la corriente I, se tiene que cumplir, como se deduce de la ecuación (1), la igualdad:

$$R_s = \frac{R_g}{n-1}. \tag{2}$$

Por ejemplo, si se pone una resistencia en derivación de valor igual a 1/9 de la resistencia del propio instrumento, tenemos que por el instrumento pasará 1/10 parte de la corriente del circuito. Abasteciendo al instrumento térmico de una resistencia en derivación y graduándolo en amperios, se obtiene el llamado *amperímetro*, es decir, un instrumento para medir la intensidad de la corriente en amperios. Debido al poco valor de la resistencia en derivación, la

www.elsolucionario.org

resistencia total del amperímetro es muy pequeña, por consiguiente, al conectar en el circuito el amperímetro, la intensidad de la corriente apenas varía. La escala del amperímetro generalmente se gradúa de manera que indique la intensidad de la corriente total I que pasa por el amperímetro (es decir, la suma de corrientes que pasan por la resistencia en derivación y por el propio instrumento). La mayoría de las veces, la resistencia en derivación se construye y se coloca en el interior de la caja del instrumento. A veces, los amperímetros van abastecidos de un juego de resistencias en derivación, con las cuales se puede variar la sensibilidad del instrumento.

Este mismo instrumento térmico puede utilizarse para medir la diferencia de potencial. Supongamos que necesitamos medir la diferencia de potencial de los extremos del conductor CC', por el cual pasa la corriente de intensidad I. Para ello conectamos el instrumento de medición G *paralelamente* al conductor CC' (fig. 91). La corriente I_g que pase por el instrumento G, será igual a

$$I_g = \frac{V_1 - V_2}{R_g},$$

donde $V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial de los extremos del conductor CC', y R_g es la resistencia del instrumento de medir G.

De aquí que

$$V_1 - V_2 = I_g R_g.$$

Como la resistencia R_g del instrumento es una magnitud dada, la intensidad I_g determina directamente la diferencia de potencial $V_1 - V_2$. No obstante, para que la conexión del instrumento no altere perceptiblemente la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, su propia resistencia debe ser muy grande en comparación con la del conductor CC'. Como la resistencia del propio hilo ab no es suficiente para ello, se le conecta en serie una resistencia R'_g muy grande (fig. 91). Generalmente esta resistencia se instala en el interior de la caja del instrumento y la escala del instrumento se gradúa en voltios. Construido de esta manera, el instrumento se denomina *voltímetro*.

Resumiendo podemos decir: un mismo instrumento térmico puede utilizarse como amperímetro y como voltímetro; en el primer caso, la resistencia en derivación se conecta paralelamente al hilo que se calienta, en el segundo, al hilo que se calienta se conecta en serie una gran resistencia. El amperímetro se conecta en serie con la parte del circuito en que se quiere medir la intensidad de la corriente; el voltímetro se conecta en paralelo a la parte del circuito, en cuyos extremos se quiere medir la diferencia de potencial.

Ejemplo 1. La resistencia del hilo ab que se calienta de un instrumento térmico es $R_g = 1\,\Omega$. La escala del instrumento tiene 50 divisiones y una división corresponde a 0,01 A. Se necesita elegir una resistencia en derivación de manera

que el instrumento se pueda utilizar como amperímetro para medir intensidades de corrientes hasta de 15 A.

Solución. De los datos se ve que toda la escala del instrumento de medición corresponde a 0,5 A. Por consiguiente, la resistencia en derivación debe disminuir la intensidad de la corriente que pase por el hilo *ab*, n veces, donde:

$$n=\frac{I}{I_g}=\frac{15}{0,5}=30.$$

De esto y según la fórmula (2), hallamos la buscada resistencia en derivación:

$$R_s=\frac{R_g}{n-1}=\frac{1}{29}\,\Omega=0,0345\Omega.$$

La resistencia total del amperímetro R_A la determinamos de la ecuación (véase la pág. 149):

$$\frac{1}{R_A}=\frac{1}{R_s}+\frac{1}{R_g},$$

de donde

$$R_A=\frac{R_gR_s}{R_g+R_s}=\frac{1\cdot 0,0345}{1+0,0345}\,\Omega\cong 0,0334\,\Omega.$$

Supongamos que con este amprímetro se mide la corriente que circula por un conductor de 40 Ω de resistencia con una diferencia de potencial de 110 V. Fácilmente se ve que en este caso, la conexión del amperímetro en el circuito no varía perceptiblemente la intensidad de la corriente del circuito. Efectivamente, según la ley de Ohm, la intensidad de la corriente en el circuito es:

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}=\frac{110}{40}\,A=2,750A.$$

Al conectar el amperímetro en el circuito, la resistencia total aumenta en 0,0334Ω, es decir, será igual a $R_1=40,0334$ Ω y, por consiguiente, la intensidad de la corriente será:

$$I=\frac{V_1-V_2}{R_1}=\frac{110}{40,0334}\,A\cong 2,748A.$$

Esta intensidad de la corriente es la que señalará el amperímetro. Como se ve, prácticamente es muy pequeña la diferencia de la intensidad de 2,75 A de la corriente del circuito.

Ejemplo 2. Un instrumento térmico de medición con las características del ejemplo 1, se desea utilizar como voltímetro, cuya escala corresponda al valor de 500 V. ¿Qué resistencia complementaria R_g' hay que conectarle en serie al hilo *ab* que se calienta?

Solución. Según los datos, toda la escala del instrumento corresponde al valor de 0,5 A. Para que la diferencia de potencial de los bornes del instrumento sea igual a 500 V, la resistencia total del instrumento R_g+R_g' debe ser:

$$R_g+R_g'=\frac{V_1-V_2}{I}=\frac{500}{0,5}\,\Omega=1\,000\,\Omega.$$

Como $R_g=1$ Ω, la resistencia buscada complementaria $R_g'=999$ Ω.

Supongamos que con este instrumento se quiere medir la diferencia de potencial de los extremos del conductor CC' (véase la fig. 91), de resistencia $R=4$ Ω y por el cual circula una corriente de intensidad $I=50$ A. Es fácil de convencerse

de que la conexión del voltímetro apenas varía la diferencia de potencial de los extremos de conductor CC'. Efectivamente, según la ley de Ohm, la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ de los extremos del conductor CC' es:

$$V_1 - V_2 = IR = 4 \cdot 50 = 200\,\text{V}.$$

Al conectar el voltímetro con una resistencia de 1 000 Ω, paralelamente al conductor CC', la resistencia total del circuito bifurcado entre los extremos del conductor CC' será:

$$R_1 = \frac{4 \cdot 1\,000}{4 + 1\,000}\,\Omega \cong 3{,}984\Omega.$$

Esta disminución de la resistencia debe traer consigo cierto aumento de la intensidad de la corriente; sin embargo, para apreciar el error máximo posible debido a la conexión del voltímetro, podemos considerar que la intensidad de la corriente ha permanecido invariable, igual a 50 A. Entonces la diferencia de potencial de los extremos del conductor CC' será:

$$V_1' - V_2' = I \cdot R_1 = 50 \cdot 3{,}984\,V = 199{,}2\,V.$$

Esta diferencia de potencial es la que indicará el voltímetro. Como se ve, se diferencia muy poco de la verdadera del conductor.

§ 159. Resistencias y sus mediciones. Para variar la resistencia de un circuito se emplean instrumentos denominados *reóstatos*.

En la práctica de laboratorio, para pequeñas intensidades de corriente, se utilizan reóstatos de cursor (fig. 92). Este reóstato

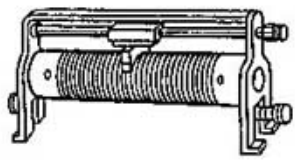


Fig. 92. Reóstato de cursor.

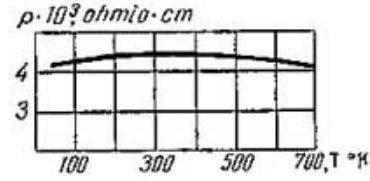


Fig. 93. Dependencia de la resistividad ρ de la manganina respecto a la temperatura absoluta.

consta de un hilo conductor arrollado en un cilindro de porcelana. Desplazando el cursor se puede variar el número de vueltas del hilo introducidas en el circuito, con lo cual se varía la magnitud de la resistencia. Como material para el hilo se eligen aleaciones (constantán, manganina, nicromio y otras) de resistividad bastante elevada y de pequeño coeficiente de temperatura, es decir, resistencia que depende poco de la temperatura. En la fig. 93 se representa la variación de ρ en función de T para la manganina. Esta dependencia entre la resistencia y la temperatura debe ser pequeña para que, a medida que se calienta el reóstato debido al paso de la corriente, su resistencia apenas varíe. Los reóstatos de esta clase son muy cómo-

www.elsolucionario.org

dos, pero su construcción no asegura escape de calor bastante bueno, lo cual acarrea un elevado calentamiento y la imposibilidad de utilizarlo con corrientes de elevadas intensidades.

Para corrientes de intensidades elevadas se utilizan reóstatos de hilos de gran sección arrollados en espiral (fig. 94), o de cintas tendidas en un cuadro. El cursor permite conectar en el circuito el número necesario de eslabones del reóstato.

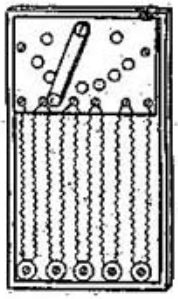


Fig. 94. Reóstato de cursor.

La resistencia del conductor dado se puede medir fácilmente con el amperímetro y el voltímetro. Se conecta en serie con el conductor a medir MN (fig. 95), el amperímetro A, y en paralelo, el voltímetro V. Designemos por R_x la resistencia buscada del conductor MN, y por R_g la resistencia propia del voltímetro. Supongamos que el amperímetro indica una intensidad I, y el voltímetro, una diferencia de potencial V_1-V_2. La corriente medida por el amperímetro se bifurca en el punto M: una parte, I_x, pasa por el conductor MN, y otra, I_g, por el voltímetro V. Si despreciamos la resistencia de los conductores con que se conecta el voltímetro, tenemos que:

$$I_g = \frac{V_1 - V_2}{R_g},$$

de donde la corriente I_x que pasa por el conductor MN, será:

$$I_x = I - I_g = I - \frac{V_1 - V_2}{R_g}.$$

Si la resistencia del voltímetro R_g es mucho mayor que la resistencia a medir R_x, la corriente I_g que pasa por el voltímetro, será muy pequeña en comparación con la corriente I, de donde, aproximadamente tenemos que:

$$I_x = I,$$

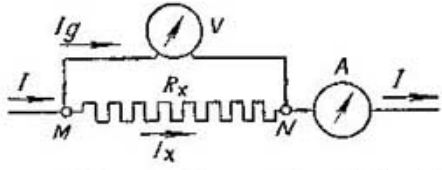


Fig. 95. Conexión del amperímetro A y del voltímetro V para medir la resistencia R_x.

de donde, según la ley de Ohm:

$$R_x = \frac{V_1 - V_2}{I},$$

es decir, R_x se mide directamente con el voltímetro y el amperímetro. Este método, como se ve, exige el empleo de un voltímetro cuya resistencia R_g sea grande en comparación con la resistencia a medir R_x. Para mediciones más exactas se utilizan otros métodos, que consisten en comparar la resistencia que se mide, con resistencias patrones. Uno de estos métodos se describe más abajo (véase el § 167).

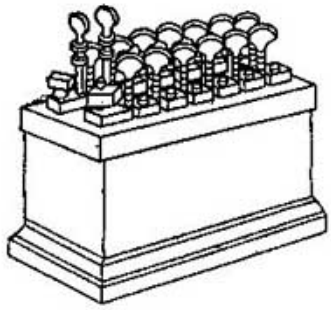


Fig. 96. Caja de resistencias.

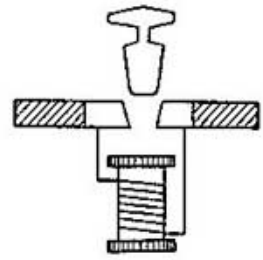


Fig. 97. Pieza de una caja de resistencias.

Las resistencias patrón generalmente se construyen en forma de cajones denominados *cajas de resistencias*. Una caja de resistencias viene representada en la fig. 96. La caja de resistencia consta de una serie de arrollamientos (carretes de resistencia). En cada carrete se arrolla un trozo de conductor de resistencia exactamente conocida; los extremos del conductor se sueldan a unas placas gruesas de cobre (fig. 97) situadas en la tapa de la caja. Entre las placas se deja un espacio que se puede cerrar con una clavija cónica de cobre. Cuando no se introduce la clavija, la corriente pasa por el carrete, en el caso contrario, la resistencia de esta parte de la caja prácticamente se hace igual a cero. El juego de carretes de diferentes resistencias se compone de manera que, como el juego de pesas, combinándolas se puedan medir distintas resistencias en el intervalo dado, con una diferencia, por ejemplo, de 0,1 ohmio, o de 1 ohmio.

§ 160. Electrones libres en los conductores. Concepto clásico. Como se ha indicado, el paso de la corriente por los metales no va acompañado de variación química alguna del conductor. De esto se deduce que la conductibilidad eléctrica del metal no está relaciona-

da con el desplazamiento de los átomos del metal, sino que la determina el movimiento de electrones. Para aclarar el carácter electrónico de la conductibilidad de los metales, hay que suponer que los átomos del metal, por lo menos en parte, están disociados en electrones y en iones positivos, con lo cual en el metal hay una gran cantidad de electrones libres. Estos electrones pueden trasladarse libremente por la red cristalina formada con los iones del metal (véase el t. I, § 87). Los electrones libres del metal tienen un movimiento térmico desordenado. Si hay un campo eléctrico exterior, este campo arrastra a los electrones en una dirección determinada y su desplazamiento crea la corriente eléctrica en el metal.

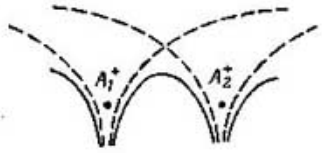


Fig. 98. Curvas de potencial en las proximidades de las cargas positivas.

Fig. 99. Curvas de potencial en un cristal.

La hipótesis de la posibilidad de una traslación libre de los electrones por el metal, la confirma el estudio de la energía de unión entre los electrones y los iones positivos situados en los nudos de la red cristalina del metal. Veamos primeramente dos iones positivos A_1^+ y A_2^+ situados a una distancia invariable uno de otro. Cada uno de los iones lo consideraremos una carga puntual. La energía potencial E_p que corresponde a la acción recíproca de cada ion con el electrón, es (compárese lo indicado en el t. I, § 61):

$$E_p = -\frac{C}{r},$$

donde C es una constante, y r la distancia del electrón al ion. El valor de la energía potencial E_p correspondiente a cada uno de los iones viene representado con líneas de puntos en la fig. 98. La variación de la energía potencial total originada por la presencia de ambos iones A_1^+ y A_2^+, viene representada por la curva de trazo continuo en la región entre los dos iones.

Si los iones A_i^+ están dispuestos regularmente en la red del cristal, la energía potencial total originada por la presencia de todos los iones tiene la forma representada en la fig. 99. En el espacio entre los iones, la curva de la energía potencial es plana y solamente cerca de los iones forma unos estrechos profundos pozos de potencial. De esta manera, la región de estos pozos es pequeña en comparación con

www.elsolucionario.org

la zona donde la curva de la energía potencial es plana; por eso se puede considerar que la energía potencial en el interior del metal tiene un valor constante E_{pa}. La energía potencial fuera del metal tiene un valor E_{po}, mayor que E_{pa}. Por consiguiente, la energía potencial en el interior del metal es menor que en el exterior, es decir, el electrón en el interior del metal se halla en un pozo de potencial. Si suponemos que $E_{po}=0$, E_{pa} será <0. Supongamos que el electrón tiene un valor de energía total E que satisface la desigualdad $E_{po}>E>E_{pa}$. Un electrón de estos se puede trasladar libremente por el interior del metal, pero no puede salirse del mismo, ya que para alejarse del metal hay que realizar un trabajo $A=E_{po}-E>0$.

El que la corriente eléctrica en los metales sea debida al desplazamiento de los electrones libres, se puede comprobar experimentalmente.

La idea en que se basan estos experimentos es la siguiente. Supongámonos un conductor que se mueve a cierta velocidad. Los electrones que componen el conductor, en su movimiento desordenado chocan continuamente con la armazón de la red del metal, con lo cual adquieren una velocidad complementaria en la dirección de la velocidad del conductor y, por consiguiente se desplazan junto con él. Si se frena de pronto el conductor, los electrones, moviéndose por el interior de la red cristalina del metal, durante cierto tiempo conservan, por inercia, la velocidad y dirección del movimiento primitivo. Como resultado de ello se produce desplazamiento de electrones en el interior del conductor, y en éste surge una corriente I y cierta cantidad de electricidad Q resulta trasladada a lo largo del conductor. Esta cantidad de electricidad Q se puede calcular de la siguiente manera. Sea v_0 la velocidad inicial del conductor. Después se frena, es decir, se le comunica una aceleración $-w$. En este caso, los electrones libres del conductor, al principio conservan la velocidad v_0, es decir, adquieren *respecto al conductor* una aceleración $+w$. Este movimiento de electrones respecto al conductor será de la misma clase que si existiese una intensidad de campo E, de resultas de lo cual, sobre cada electrón actúa una fuerza $f=eE$ que le comunica una aceleración w.

Así tenemos que la magnitud de esta fuerza debe ser igual a $f=mw$, donde m es la masa del electrón y, por consiguiente, la magnitud de la intensidad del campo E debe ser:

$$E=\frac{f}{e}=\frac{m}{e}w. \qquad (1)$$

Si la intensidad del campo es E, siendo l la longitud del conductor, es lo mismo que si en los extremos del conductor hubiese una diferencia de potencial $V_1-V_2=El$. Colocando en esta ecuación

el valor de E según la (1), tenemos que:

$$V_1 - V_2 = \frac{m}{e} wl.$$

La corriente I debida al desplazamiento de los electrones respecto a la armazón de la red cristalina del conductor, es análoga a la corriente creada en este conductor bajo la acción de una diferencia de potencial de sus extremos de $V_1 - V_2$. Si R es la resistencia del conductor, la intensidad I de esta corriente será:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{m}{e} \cdot \frac{w}{R} l. \qquad (2)$$

Sea t el tiempo empleado para la detención del conductor, entonces la aceleración media $w = \frac{v_0}{t}$, y la ecuación (2) toma la forma:

$$I = \frac{m}{e} \frac{v_0}{Rt} l,$$

de donde la cantidad total de electricidad Q que pasa por el conductor en el frenado, será:

$$Q = It = \frac{m}{e} \cdot \frac{v_0 l}{R}. \qquad (3)$$

Después de frenar el conductor que se mueve rápidamente, según el signo de la diferencia de potencial se puede determinar el signo de las cargas que crean la corriente, y después de medir la cantidad de electricidad total que pasa por el conductor, se puede determinar por la fórmula (3) la relación entre la magnitud de la carga del electrón e y su masa m, para la cual obtenemos que:

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0 l}{QR}. \qquad (4)$$

Los físicos rusos L. Mandelshtam y N. Papaleksi fueron los primeros en observar en 1913—1914 la aparición de corriente eléctrica en un conductor acelerado. Sometían a rápidas oscilaciones de torsión alrededor del eje de simetría un carrete con un largo hilo conductor arrollado. En los extremos del conductor se conectaba un teléfono en el cual se oía un sonido originado por las corrientes que se creaban en el carrete.

De la fórmula (3) se ve que la cantidad de electricidad que pasa, es proporcional a la longitud del conductor y a la velocidad inicial v_0. Para obtener cantidades de electricidad Q que se puedan medir, hay que tener velocidades grandes y lo más largo posible el conductor. Stuart y Tolman, en 1916 realizaron experimentos cuantitativos frenando rápidamente un carrete con un largo hilo conductor arrollado. El carrete se cerraba en circuito con un galvanómetro

balístico (véase el § 230) que medía la carga Q. Estos experimentos demostraron que la corriente en los conductores la crean las cargas negativas; para la relación e/m se obtuvo el valor de $4{,}8 \cdot 10^{17} \frac{\text{unid. } CGSE \text{ de carga}}{\text{gr}}$. Este valor de e/m se aproxima al valor obtenido para los electrones con otros procedimientos (véase el § 218).

En la actualidad, esta relación entre la carga del electrón y su masa se toma de valor:

$$\frac{e}{m} = 5{,}273 \cdot 10^{17} \frac{\text{unid. } CGSE \text{ de carga}}{\text{gr}}.$$

Conociendo e/m y el valor de la carga del electrón [de los experimentos de Millikan (§ 151) $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ unid. $CGSE$], hallamos la masa del electrón:

$$m = 9{,}109 \cdot 10^{-28} \text{ gr},$$

lo cual es $\frac{1}{1\,883}$ de la masa del átomo de hidrógeno.

Como se ha indicado en el § 31 del t. I, la masa del electrón, como una masa cualquiera, depende de la velocidad, aumentando hasta el infinito cuando la velocidad v de esta masa se acerca a la velocidad de la luz c. Los valores dados aquí de la masa del electrón m y de la relación e/m se refieren a la masa "en reposo", es decir, al valor de la masa que tiene velocidades v incomparablemente pequeñas respecto a la de la luz c.

§ 161. Leyes de Ohm y de Joule—Lenz desde el punto de vista de la clásica teoría electrónica. Lorentz fue el primero en desarrollar la idea de los electrones libres en los metales, que fue la base de la clásica teoría de la conductibilidad eléctrica de los metales. Lorentz consideró que los electrones libres del metal se hallaban en continuo y desordenado movimiento y, en este sentido, el conjunto de electrones del metal era una especie de "gas electrónico". Los electrones chocan con la armazón de la red cristalina y, por consiguiente, se caracterizan por tener un recorrido libre medio, que designaremos por $\overline{\lambda}$. El número de electrones libres n_0 por unidad de volumen del metal se puede considerar del orden del número de átomos por unidad de volumen, que es igual a $\frac{N}{\mu}\delta$, donde N es el número de Avogadro; μ, el peso molecular, y δ, su densidad. De aquí que:

$$n_0 \cong \frac{\delta}{\mu} N. \qquad (1)$$

Apoyándose en los principios de la estadística, Lorentz consideraba que la energía cinética media del movimiento de los electrones era igual a la energía cinética media del movimiento de traslación

www.elsolucionario.org

de los átomos, que, como se sabe, es igual a $\frac{3}{2}kT$, donde k es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura absoluta. Designando por $\overline{u}$ la velocidad cuadrática media del movimiento desordenado del electrón, y por m, su masa, obtenemos que:

$$\frac{m\overline{u}^2}{2} = \frac{3}{2}kT \qquad (2)$$

o

$$\overline{u} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (2a)$$

Como se ha indicado en el párrafo anterior, la masa del electrón es aproximadamente 1 840 veces menor que la masa del átomo de hidrógeno, por eso, la velocidad media del movimiento térmico desordenado de los electrones es mucho mayor que la velocidad media del movimiento térmico de los átomos. La masa del átomo se puede representar de la manera siguiente: $M = AM_H$, donde A es el peso atómico de este átomo, y M_H, la masa del átomo de hidrógeno*), de donde la velocidad del movimiento térmico de este átomo (la velocidad cuadrática media) será:

$$\overline{u}_A = \sqrt{\frac{3kT}{AM_H}},$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\overline{u}}{\overline{u}_A} = \sqrt{\frac{A \cdot M_H}{m}} = \sqrt{1\,838A} \cong 43\sqrt{A}.$$

La velocidad cuadrática media de las moléculas (átomos) de los gases a la temperatura ordinaria, es una magnitud del orden de varios centenares de metros por segundo, es decir, del orden de 10^5 cm/seg; por consiguiente, la velocidad del movimiento térmico de los electrones a la temperatura ordinaria es del orden de 10^7 cm/seg.

El movimiento térmico desordenado de los electrones no origina el transporte de cargas eléctricas en dirección alguna y, por consiguiente, no crea corriente eléctrica. Si en el interior del metal, con ayuda de un manantial de energía exterior, se crea un campo eléctrico de dirección determinada, bajo la influencia de este campo los electrones adquieren una velocidad v complementaria de movimiento orientado. Este movimiento orientado de los electrones acarrea un transporte de cargas y, por consiguiente, la creación de una corriente eléctrica. Es fácil demostrar que una velocidad bastante pequeña de transporte de cargas es suficiente para explicar la creación de corriente de densidades bastante grandes.

*) En correspondencia con la definición química de los pesos atómicos, en lugar de M_H se debe tomar 1/16 de la masa del átomo de hidrógeno; sin embargo esta sustitución no influye prácticamente en el cálculo que se expone.

Designemos la velocidad media del movimiento orientado de los electrones por $\bar{v}$. Entonces, el número de electrones que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie unidad perpendicular a la dirección de este movimiento, será igual a $n_0\bar{v}$. Como cada electrón lleva una carga e, la densidad de la corriente i será igual a la carga transportada por unidad de tiempo a través de la unidad de superficie:

$$i = en_0\bar{v}. \tag{3}$$

Para determinar el orden de la magnitud de la velocidad $\bar{v}$ del movimiento orientado, basémonos en los siguientes datos concretos: supongamos que por el conductor pasa una corriente de densidad $i=100\ \frac{a}{cm^2} = 3\cdot 10^{11}\ \frac{\text{unid. } CGSE \text{ de intens. de corr.}}{cm^2}$. La velocidad $\bar{v}$ del movimiento orientado de los electrones está relacionada con la densidad de la corriente, según la (3), por la ecuación:

$$\bar{v} = \frac{i}{n_0 e}.$$

La carga del electrón es $e=4{,}8\cdot 10^{-10}$ unid. *CGSE*, y el número de electrones libres n_0 en la unidad de volumen del metal, según la (1), es igual a $\frac{N}{\mu}\delta$. Para los conductores metálicos corrientes, el peso molecular es una magnitud del orden de varias decenas, por ejemplo, para el cobre $\mu=64$ gr/mol; la densidad δ de la mayoría de los metales no es mayor de 10. De aquí que para $\bar{v}$ obtenemos una magnitud del orden de

$$\bar{v} = \frac{i\mu}{N\delta e} \cong \frac{3\cdot 10^{11}\cdot 60}{6\cdot 10^{23}\cdot 10\cdot 4{,}8\cdot 10^{-10}}\ \frac{cm}{seg} \cong 6{,}10^{-3}\ \frac{cm}{seg}.$$

Así vemos que la velocidad de transporte de electrones $\bar{v}$ en el metal por el que pasa una corriente eléctrica, es relativamente pequeña y a la temperatura ordinaria es mucho menor que la velocidad del movimiento térmico desordenado $\bar{u}$.

Relacionemos ahora la densidad de la corriente i con la intensidad del campo eléctrico E que crea el movimiento de transporte de electrones.

Si hay un campo eléctrico de intensidad E, sobre cada electrón actúa una fuerza $f=eE$ dirigida en sentido contrario al de E, ya que la carga del electrón es negativa. Bajo la influencia de esta fuerza, durante su recorrido libre cada electrón adquiere una aceleración:

$$w = \frac{f}{m} = \frac{eE}{m}. \tag{4}$$

Si la intensidad del campo es constante, la aceleración del electrón también será constante y el electrón se desplazará con movimiento

uniformemente acelerado. Sin embargo, la ecuación del movimiento (4) se cumple *solamente entre dos choques* del electrón. En el momento del choque, sobre el electrón actúa la fuerza del choque, generalmente mucho mayor que la fuerza $f=eE$, debido a lo cual se altera la dirección de su movimiento. De esta manera, inmediatamente *después* del choque, como término medio para gran cantidad de electrones, la velocidad del movimiento orientado es igual a cero. Al final del recorrido libre, el electrón adquiere una velocidad v_1 de movimiento orientado igual al producto de aceleración w por el tiempo τ transcurrido entre dos choques consecutivos:

$$v_1 = w\tau = \frac{eE}{m}\tau. \tag{5}$$

El tiempo medio $\overline{\tau}$ del recorrido de un electrón lo obtenemos dividiendo el recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ por la velocidad media de los electrones. Como a las densidades habituales de la corriente y a la temperatura ordinaria, la velocidad del movimiento de transporte es muy pequeña en comparación con la velocidad del movimiento térmico desordenado de los electrones $\overline{u}$, podemos despreciar aquélla y suponer que

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{\lambda}}{\overline{u}}.$$

Colocando este valor de $\overline{\tau}$ en la expresión (5) obtenemos que, como término medio, *al final* del recorrido libre, los electrones tendrán una velocidad de movimiento orientado:

$$v_1 = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\overline{\lambda}}{\overline{u}}. \tag{6}$$

El valor medio de la velocidad v del movimiento orientado *durante el recorrido libre*, será igual a la mitad de la velocidad al final del recorrido v_1 (ya que el movimiento entre choque y choque lo consideramos uniformemente acelerado):

$$\overline{v} = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \cdot \frac{\overline{\lambda}}{\overline{u}}.$$

Así tenemos que bajo la acción del campo eléctrico, al movimiento desordenado de los electrones se le suma un movimiento orientado, cuya velocidad media es proporcional a la intensidad del campo eléctrico E.

Esta velocidad media del movimiento de transporte de cargas origina la corriente eléctrica en los metales.

www.elsolucionario.org

La densidad de esta corriente la obtenemos colocando el valor hallado de $\bar{v}$ en la fórmula (3):

$$i = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n_0 \bar{\lambda}}{m \cdot \bar{u}} \cdot E. \qquad (7)$$

Está claro que para un conductor a la temperatura dada, el término $\frac{e^2 n_0 \bar{\lambda}}{m \cdot \bar{u}}$ es constante, por eso la última expresión no es más que la ley de Ohm para una densidad de corriente $i = \sigma E$ (véase el § 155), en que la densidad de la corriente es proporcional a la intensidad del campo eléctrico.

De esta manera, la ley de Ohm se deduce directamente de la citada teoría electrónica de la conductibilidad de los metales.

Comparando la fórmula (7) con la ecuación de la ley de Ohm $i = \sigma E$, vemos que la magnitud

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n_0 \bar{\lambda}}{m \cdot \bar{u}} = \sigma \qquad (8)$$

es la conductibilidad del metal. De aquí que la conductibilidad del metal sea mayor cuanto mayor sean el número de electrones libres por unidad de volumen del metal y el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$.

Examinemos la ley de Joule—Lenz desde el punto de vista de la teoría electrónica de los metales. Los electrones, al desplazarse bajo la acción de un campo eléctrico exterior, adquieren en el recorrido libre $\bar{\lambda}$ una energía cinética, relacionada con la velocidad orientada v, que transmiten a la armazón de la red cristalina del metal al chocar con ella. Bajo la acción del campo aplicado, esta energía cinética de los electrones surge de nuevo después de cada choque y se transmite otra vez al metal. Así se calienta el metal a costa del trabajo de las fuerzas del campo eléctrico.

Calculemos la cantidad de calor que se desprende por unidad de tiempo de la unidad de volumen del conductor.

Al final del recorrido libre, como se ha indicado [fórmula (6)], el electrón adquiere una velocidad igual a:

$$v_1 = \frac{eE}{m} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}}.$$

Por consiguiente, la energía cinética que el electrón transmite en el choque, será:

$$E_c = \frac{m v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 E^2 \bar{\lambda}^2}{m \bar{u}^2}.$$

En la unidad de tiempo, como término medio cada electrón choca $\bar{z}$ veces. El número de choques $\bar{z}$, como se ha indicado en el § 53, t. 1,

está relacionado con la longitud del recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ y con la velocidad del movimiento térmico $\bar{u}$ mediante la ecuación:

$$\bar{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{\lambda}}.$$

La cantidad total de energía transmitida a una unidad de volumen del conductor en la unidad de tiempo se obtiene multiplicando la energía E_c por el número de choques $\bar{z}$ que realiza un electrón por unidad de tiempo, y por el número de electrones por unidad de volumen n_0:

$$w = E_c \bar{z} \cdot n_0 = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{m\bar{u}} E^2.$$

El multiplicando $\frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \bar{\lambda}}{m\bar{u}}$, según la fórmula (8), es igual a la conductibilidad del metal σ, de donde

$$w = \sigma E^2,$$

lo cual coincide con la ley de Joule—Lenz tal como se ha dado en el § 157 [fórmula (4)].

Así tenemos que la teoría de los electrones libres de los metales, explica las leyes de Ohm y de Joule—Lenz. No obstante, el desarrollo ulterior de esta teoría, como veremos en los siguientes párrafos, tropieza con notables dificultades que solamente se pueden vencer con ayuda de la mecánica cuántica.

§ 162. Relación entre la conductibilidad eléctrica y la conductibilidad térmica de los metales. Una consecuencia importante de los resultados obtenidos en el párrafo anterior es la llamada ley de Wiedemann — Franz. Esta ley relaciona los fenómenos de conductibilidad eléctrica con los de conductibilidad térmica. Los metales son buenos conductores del calor, los dieléctricos, malos conductores; por eso es natural suponer que la conductibilidad térmica de los metales se debe a los electrones libres. Hecha esta suposición, para el coeficiente de conductibilidad térmica de los metales se puede tomar la expresión obtenida para la conductibilidad térmica de los gases, ya que el transporte de calor por los electrones y por las moléculas es el mismo. Por eso, para el coeficiente de conductibilidad térmica $\varkappa$ del metal se utiliza la fórmula (6) deducida en el § 56 del t. I, suponiendo el número de grados de libertad $i=3$:

$$\varkappa = \frac{1}{2} n_0 k \bar{u} \bar{\lambda}.$$

Aquí k es la constante de Boltzmann; n_0, el número de electrones por

unidad de volumen; $\overline{\lambda}$, su recorrido libre medio en la red cristalina del metal, y $\overline{u}$, la velocidad media del movimiento térmico.

Tomando la relación entre el coeficiente $\varkappa$ de conductibilidad térmica y el coeficiente de conductibilidad eléctrica σ expresado en la fórmula (8) del § 161, tenemos que:

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{m\overline{u}^2}{e^2} k.$$

La magnitud $m\overline{u}^2/2$ es la energía cinética media del movimiento térmico de los electrones. Si esta energía la consideramos igual a la energía cinética media de las moléculas (átomos) a la misma temperatura, es decir, igual a la magnitud $\frac{3}{2} kT$, la relación $\varkappa/\sigma$ adquiere la forma:

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{3k^2}{e^2} T,$$

aquí k y e son magnitudes constantes (la constante de Boltzmann y la carga del electrón), de donde tenemos que la relación entre el coeficiente de conductibilidad térmica $\varkappa$ y el de conductibilidad eléctrica σ es proporcional a la temperatura absoluta del metal T y no depende de la clase del metal.

Esta ley fue establecida experimentalmente por Wiedemann y Franz. Si el coeficiente de conductibilidad térmica $\varkappa$ lo medimos en cal/grados·cm·seg, y el coeficiente de conductibilidad eléctrica σ en $\Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$, el multiplicador de T, según los datos experimentales para diferentes metales, es igual a $4{,}6—5{,}6 \cdot 10^{-9}$. El valor teórico deducido aquí para el factor $3k^2/e^2$, en las mismas unidades, es igual a $5{,}3 \cdot 10^{-9}$. No obstante, si se precisan las fórmulas para $\varkappa$ y σ utilizando la ley de distribución de velocidades de Maxwell, la concordancia de los valores numéricos con los obtenidos experimentalmente no es tan exacta, lo cual indica el carácter casual de la coincidencia arriba indicada y la necesidad de un desarrollo ulterior de la teoría. Como ya se ha señalado, la idea de los electrones libres del metal, aunque de manera general, explica el fenómeno de la conductibilidad eléctrica y una serie de otros fenómenos relacionados con ella, en muchos casos, no obstante, hay divergencias notables entre la teoría y la experiencia. La expresión del coeficiente de conductibilidad eléctrica $\sigma = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2 \overline{\lambda}}{m\overline{u}}$ contiene dos constantes: n_0, que es el número de electrones libres por unidad de volumen del metal, y $\overline{\lambda}$, que es el recorrido libre medio del electrón, las cuales no se pueden medir directa y experimentalmente. La teoría de Lorenz supone que n_0, por el orden que tiene, coincide con el número de átomos en la unidad de volumen, y $\overline{\lambda}$ es igual a la distancia entre los iones

www.elsolucionario.org

de la red cristalina del conductor. Estas suposiciones son naturales y no contradicen los valores experimentales del coeficiente de conductibilidad eléctrica. La expresión del valor de σ, sin embargo, no nos da una justa dependencia de la temperatura, ya que el único término de la expresión de σ que indudablemente depende de la temperatura, es la velocidad $\overline{u}$ del movimiento térmico de los electrones. Esta velocidad, según la teoría cinética, es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T. Sin embargo, la experiencia (véase el § 154) demuestra que la resistividad ρ es directamente proporcional a la temperatura absoluta y, por consiguiente, la conductibilidad eléctrica σ es inversamente proporcional a la temperatura; de aquí que para que concuerde con la experiencia, hay que suponer que el producto $n_0 \overline{\lambda}$ varía en razón inversa a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Esta suposición es difícil de fundamentar.

Hay otra discordancia mayor aún entre las especulaciones teóricas y los datos experimentales. La suposición de una gran cantidad de electrones libres desplazándose por el conductor poseyendo energía, lleva a la conclusión de que la capacidad calorífica del conductor debe ser notablemente mayor que la de los sólidos no conductores. Supuesto que el número de electrones es del orden del número de átomos, obtenemos por molécula gramo de sustancia una energía interna complementaria, a saber, la energía de los electrones que se mueven desordenadamente, que es igual a $\frac{3}{2} kNT = \frac{3}{2} RT$, donde R es la constante de los gases.

Esto conduce a que el calor específico molar (calor volumétrico) aumenta en la magnitud $\frac{3}{2} R \cong 3$ cal/grad·mol. Sin embargo, la experiencia enseña que los conductores satisfacen la ley de Dulong y Petit (véase el § 93 del t. I) no peor que los sólidos no conductores, es decir, que su calor específico molar es igual aproximadamente a 6 cal/grado·mol, y no igual a 9 cal/grado·mol, como se desprende de nuestro razonamiento.

Por consiguiente, los electrones que participan en el proceso de la conductibilidad eléctrica y térmica, por ciertas causas no influyen sobre la capacidad calorífica del conductor. Esto es inexplicable desde el punto de vista de la teoría de Lorenz y solamente se puede fundamentar con ayuda de la mecánica cuántica.

§ 163. Teoría cuántica de la conductibilidad eléctrica de los metales. Como se ha indicado en el párrafo anterior, la teoría de la conductibilidad eléctrica se puede desarrollar acertadamente sólo con ayuda de la mecánica cuántica. La diferencia fundamental de mecánica cuántica respecto a la clásica está en lo siguiente: desde el punto de vista de la mecánica cuántica, hablando en general, un

sistema de partículas puede hallarse solamente en una serie de determinados estados energéticos o estacionarios (discontinuos, "discretos") diferentes; mientras que desde el punto de vista de la teoría clásica, el sistema se puede hallar en estados de valores cualesquiera de energía en los límites de cierto intervalo de energía. Desde el punto de vista de la teoría de los cuantos, el paso del sistema de un estado posible a otro se efectúa a saltos, variando la energía en una magnitud finita ΔE. Esta deducción la confirman numerosos hechos que se refieren a la física atómica y molecular (véase el t. III).

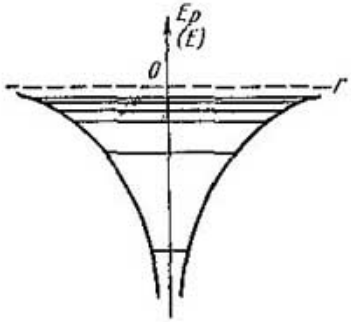


Fig. 100. Niveles energéticos del electrón en un campo electrostático.

Fig. 101. Niveles energéticos de los electrones en un cristal.

Ilustremos lo dicho con un ejemplo concreto. Supongamos que un electrón se halla en el campo electrostático de una carga puntual positiva que se encuentra inmóvil en el origen de coordenadas. La energía potencial del electrón E_p será:

$$E_p = -\frac{C}{r},$$

donde C es una constante positiva, y r la distancia del electrón al origen de coordenadas (fig. 100). En este caso, según la teoría cuántica (véase el t. III), la energía total del electrón en la región de las energías negativas ($E<0$), puede adquirir solamente uno de los valores

$$E = -\frac{B}{n^2}, \qquad (1)$$

donde B es una constante, y n toma los valores de números enteros: $n=1, 2, 3, \ldots$ Las energías correspondientes a la fórmula (1) vienen representadas en la fig. 100 por líneas horizontales ("niveles").

Esta deducción de la discontinuidad de la energía es justa para los sistemas atómicos. En particular, los valores posibles de energía del átomo del hidrógeno y de los iones, parecidos al primero (un electrón en el campo electrostático del núcleo atómico), vienen dados por la fórmula (1). Lo mismo ocurre con los cristales donde los

electrones pueden hallarse solamente en determinados niveles energéticos.

Como se ha dicho en el § 160, parte de los electrones del metal deja de estar ligada a determinados átomos y se mueve libremente por el interior del pozo de potencial. Sin embargo, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, este movimiento, como se ha indicado, se diferencia del examinado en la teoría clásica en que la energía de los electrones puede tomar solamente una serie discontinua de valores. Estos valores de la energía de los electrones del cristal pueden ser representados por un conjunto de niveles, cuyo número para

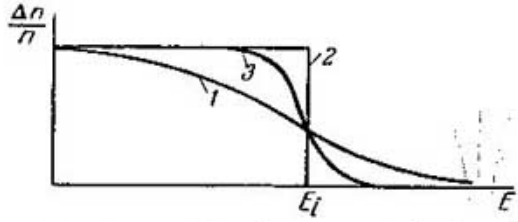


Fig. 102. Distribución de los electrones según los niveles energéticos.

1, según la ley de Boltzmann a $T \neq 0$; *2*, según la ley de Fermi a $T=0$; *3*, según la ley de Fermi a $T \neq 0$.

un cristal de dimensiones normales es excesivamente grande, de manera que los niveles vecinos se hallan muy próximos unos de otros (fig. 101).

Para comprender la conductibilidad eléctrica, es muy importante ver otra diferencia con respecto a la teoría clásica que nos da la mecánica cuántica. Esta diferencia se refiere a la ley de distribución de los electrones según los niveles energéticos. Desde el punto de vista clásico, los electrones se distribuyen por los niveles energéticos según la ley de Boltzmann, que corresponde, en la fig. 102, a la curva *1*. En la mecánica cuántica, la distribución es otra, lo cual se basa en la subordinación de los electrones al llamado *principio de exclusión de Pauli*. Según este principio, en un nivel energético (si "no está degenerado") no pueden hallarse más de dos electrones. Estos dos electrones deben diferenciarse por la dirección de los propios momentos magnéticos (véase el t. III).

Del principio de exclusión de Pauli se deduce directamente la diferencia entre el concepto clásico y el cuántico de la distribución de electrones según los niveles energéticos a la temperatura del cero absoluto ($T=0$). Efectivamente, desde el punto de vista clásico, a la temperatura de $T=0$, la energía de *todos* los electrones debe ser igual a cero. Sin embargo, según el principio de exclusión de Pauli, a la temperatura de $T=0$ el número de electrones de un nivel no puede

www.elsolucionario.org

ser mayor de dos. Si el número total de electrones libres del cristal es igual a n, a la temperatura de $T=0$ ocuparán los $n/2$ niveles energéticos más bajos (estado normal o básico). La ley de distribución de los electrones según los niveles, en este caso, viene representada por la línea quebrada *2* de la fig. 102. Sea E_i la energía del último nivel ocupado por los electrones (fig. 101). La curva *2* expresa el hecho de que, a la temperatura de $T=0$, todos los niveles de energía $E \leqslant E_i$ tienen la misma cantidad de electrones (dos en cada nivel); los niveles de energía $E > E_i$ están vacíos. Si $T \neq 0$, la distribución de los electrones la determina la llamada ley de Fermi, que corresponde a la curva *3* de la fig. 102. A temperaturas muy elevadas, la curva de Fermi se aproxima a la curva correspondiente a la ley clásica de Boltzmann.

Hay que tener en cuenta que, para los metales, la energía E_i tiene un valor relativamente grande y corresponde a las energías de los movimientos térmicos de los átomos a temperaturas de decenas de millares de grados.

Estas deducciones de la mecánica cuántica nos permiten, en general, explicar los fenómenos de la conductibilidad eléctrica. Si no hay ningún campo eléctrico exterior, los electrones se distribuyen simétricamente respecto a las direcciones de las velocidades, lo cual corresponde, como en la teoría clásica, a su movimiento desordenado y, por consiguiente, a la ausencia en el cristal de una corriente orientada.

Veamos el caso en que la temperatura no es muy elevada y no todos los niveles están ocupados por los electrones. En este caso, incluso un débil campo exterior puede trasladar electrones a niveles libres más elevados, ya que los niveles están muy cerca uno de otro. En otras palabras, influida por un campo exterior, la energía de los electrones puede variar, es decir, los electrones pueden adquirir una velocidad complementaria. Bajo la influencia del campo exterior surgen desplazamientos de electrones en la dirección de las fuerzas que actúan sobre ellos, y en el cristal se crea una corriente. Este caso se refiere a los cristales de los metales con su gran conductibilidad eléctrica. Para explicar el valor finito de la conductibilidad σ, es necesario tener en cuenta, en correspondencia con la mecánica cuántica, el carácter ondulatorio del movimiento de los electrones libres (véase el t. III). Las ondas electrónicas se dispersan debido a la heterogeneidad que siempre presenta la red cristalina. La dispersión de las ondas corresponde a la longitud finita del recorrido libre de los electrones en el cristal. En el caso de la red ideal, la heterogeneidad que causa la dispersión de las ondas, es debida solamente al movimiento térmico (vibraciones) de la red, lo cual nos lleva a la proporcionalidad de la conductibilidad eléctrica σ respecto a la magnitud $1/T$, donde T es la temperatura absoluta del cristal.

Como se ha indicado (§ 154), se observa efectivamente esta dependencia de σ respecto a T; pero no podría ser explicada por la teoría clásica. Si hay impurezas en la red cristalina, habrá heterogeneidad independiente de la temperatura; por eso, la relación entre la conductibilidad eléctrica σ y la temperatura tendrá la forma: $\sigma = a \times \frac{1}{T} + b$, donde a y b son constantes. Esta dependencia de σ respecto a T se observa a bajas temperaturas, si a un metal puro cualquiera se le añaden pequeñas partículas de otro metal.

En su trabajo sobre la teoría de los metales, el físico soviético Y. Frénkel fue el primero en expresar la idea de que la resistencia de los metales es debida a la dispersión de las ondas electrónicas en las imperfecciones de las redes, imperfecciones causadas por el movimiento térmico.

La teoría cuántica vence otro obstáculo con que habrá tropezado la teoría clásica, a saber, la de no influir los electrones libres sobre la capacidad calorífica de los metales (§ 162). Al elevar la temperatura, parte de los electrones pasa a niveles energéticos más elevados. Sin embargo, si la energía media del movimiento térmico, $\overline{E} = \frac{3}{2} kT$, correspondiente a tres grados de libertad, es pequeña en comparación con la E_i, la curva de distribución de los electrones según los niveles, en correspondencia con la fórmula de Fermi, se diferencia muy poco de la curva de distribución cuando $T=0$ (las curvas *3* y *2* de la fig. 102, se diferencian muy poco una de otra). De esto se deduce que la energía total de los electrones depende muy poco de la temperatura (a temperaturas no muy elevadas); de donde, a su vez, se deduce que la presencia de electrones libres en el metal, prácticamente no influye en su capacidad calorífica.

Para demostrar con más exactitud que los electrones libres no influyen prácticamente en la capacidad calorífica de los metales, hay que recurrir a la ley cuantitativa de la distribución de los electrones según sus velocidades.

En la fig. 102 se representan los gráficos de distribución de los electrones según los niveles. Si tenemos en cuenta el número relativo de electrones dn/n, cuya energía total se halla en el intervalo de las energías E y $E+dE$, obtenemos un gráfico de otra clase, ya que los niveles no estarán dispuestos con la misma densidad a distintos valores de energía, y, por consiguiente, a un mismo intervalo dE le corresponderá diferente número de niveles, según la región de energía en que se tome el intervalo dE. Según la ley de distribución de Fermi:

$$\frac{dn}{n} = \gamma \frac{E^{1/2}}{1 + e^{\frac{E - E_i}{kT}}} dE, \qquad (2)$$

donde γ es una constante*), y E_i, según lo indicado arriba, es la energía máxima de los electrones a $T=0$. Entonces, en lugar de los gráficos *2* y *3* de la fig. 102,

*) γ depende del volumen del cristal.

obtenemos los gráficos representados en la fig. 103, donde la curva *2* se refiere de nuevo al caso cuando $T=0$, y la curva *3*, al caso cuando $T\neq 0$.

La energía media del electrón en el cristal a la temperatura T es

$$\overline{E}=\frac{1}{n}\int E\,dn,$$

donde la integración debe extenderse a todos los valores posibles de la energía E. Utilizando la distribución expresada en la (2), obtenemos que:

$$\overline{E}=\gamma\int_0^{\infty}\frac{E^{3/2}}{1+e^{\frac{E-E_f}{kT}}}\,dE.$$

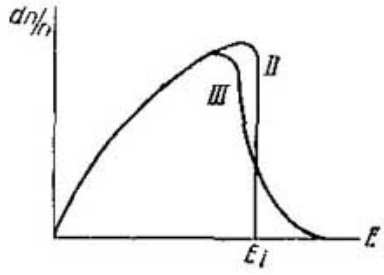


Fig. 103. Distribución de los electrones según los niveles energéticos. II, a $T=0$; III, a $T\neq 0$.

La integración nos da el siguiente resultado aproximado:

$$\overline{E}=\frac{3}{5}E_f\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{E_f}\right)^2\right].$$

Como el calor específico molar a volumen constante C_V viene determinado por la derivada de la energía (correspondiente a un mol) respecto a la temperatura, tenemos que

$$C_V=N\frac{d\overline{E}}{dT}=\frac{\pi^2}{2}Nk\left(\frac{kT}{E_f}\right), \qquad (3)$$

donde N es el número de Avogadro.

Según la teoría clásica, el calor específico molar del gas electrónico es $C_V=\frac{3}{2}Nk$. Según lo dicho, para los metales, E_f corresponde a la energía media del movimiento térmico de las partículas a temperaturas de decenas de millares de grados. Por consiguiente, la magnitud E_f es centenares de veces mayor que kT, que se refiere a las temperaturas medias. Así tenemos que el factor $\left(\frac{kT}{E_f}\right)\sim 0{,}01$ y la fórmula (3) nos da para las temperaturas medianas una capacidad calorífica del gas electrónico despreciable en comparación con la que da la teoría clásica.

§ 164. Circuito cerrado de corriente continua. Para mantener una corriente continua constante en un conductor, hay que poseer una constante diferencia de potencial en sus extremos. Las fuentes de esta constante diferencia de potencial pueden ser distintas. Una de estas fuentes pueden ser las *pilas*. Las pilas constan de dos láminas, generalmente metálicas, llamadas electrodos, sumergidas en una solución determinada (electrólito). Por ejemplo, la *pila Daniell* (fig. 104) consta de una lámina de zinc sumergida en una solución de vitriolo blanco (sulfato de zinc), y una lámina de cobre sumergida en una solución de vitriolo azul (sulfato cúprico). Las soluciones

www.elsolucionario.org

están separadas con una membrana porosa A. En las láminas de la pila Daniell desconectada se crea una diferencia de potencial de 1,1 V. La *pila de Leclanché* (fig. 105) que crea en sus electrodos una diferencia de potencial aproximadamente de 1,5 V, consta de una lámina de zinc sumergida en una solución de sal amoníaco y una lámina de carbón cubierta de una capa de bióxido de manganeso.

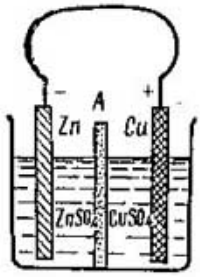


Fig. 104. Pila Daniell.

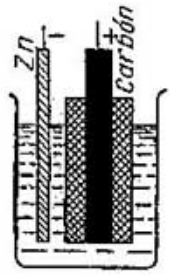


Fig. 105. Pila de Leclanché.

Sin meternos por ahora a analizar las causas que crean la diferencia de potencial en los bornes de la pila, veamos qué ocurre si conectamos una fuente de diferencia de potencial de esta clase en un circuito cerrado.

Supongamos que la resistencia del circuito que cierra la pila (fig. 106) es R. Llamémosla *resistencia exterior*. La pila, a su vez, posee una resistencia R_0, que llamaremos *resistencia interna*. En los extremos, la resistencia exterior tiene los potenciales V_1 y V_2, que son los potenciales de los electrodos, si están unidos con un conductor exterior de resistencia dada. Supongamos que el potencial V_1 es mayor que el V_2; entonces, por el circuito exterior fluye la corriente desde el electrodo de potencial V_1 hasta de potencial V_2. En el circuito exterior tenemos una *caída de potencial*.

Aplicando la ley de Ohm a la parte del circuito formada por la resistencia exterior R, obtenemos que la caída de potencial en el circuito exterior $V_1 - V_2$ es

$$V_1 - V_2 = IR. \qquad (1)$$

La corriente estacionaria, que es un flujo de cargas, debe formar un circuito cerrado (véase el § 156), por consiguiente, en la parte interna del circuito la corriente debe fluir en dirección contraria a la del circuito exterior. Si en la parte exterior fluye del electrodo A al electrodo B (fig. 106), en la interior fluirá del electrodo B al A. Esto sólo puede ocurrir, si hay saltos de potencial en los límites

ntre los electrodos y el electrólito. Las causas que pueden originar stos saltos las examinaremos después. Ahora supongamos que en as capas límites del electrodo B y el electrólito surge un salto de potencial elevándolo hasta la magnitud V_2'. El potencial del electrólito en el lugar de contacto con el electrodo A lo llamaremos V_1'. Por comodidad en la representación gráfica de las caídas y saltos de potenciales en todo el circuito cerrado, mediremos los potenciales V

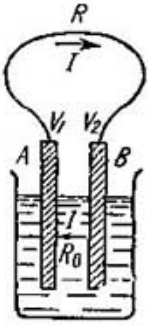


Fig. 106. Circuito de una pila con resistencia exterior.

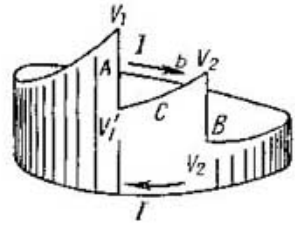


Fig. 107. Representación de las caídas y saltos de potencial de un circuito cerrado de una pila con resistencia exterior.

según las generatrices de una superficie cilíndrica. En la fig. 107, los puntos A y B corresponden a la posición de los electrodos: la parte AbB es la exterior del circuito, y la BcA, la interior.

En el interior del electrólito, la corriente va desde el potencial V_2' hasta el V_1'. Según la ley de Ohm, la caída de potencial en la parte interna del circuito es

$$V_2' - V_1' = IR_0, \tag{2}$$

donde R_0 es la resistencia de la parte interna del circuito. Recorramos mentalmente el circuito cerrado en el sentido de $AbBcA$ volviendo al electrodo inicial A de potencial V_1. La suma de las caídas de potencial en el recorrido del contorno deberá ser igual a la suma de las elevaciones.

Designemos los saltos de los potenciales por ε:

$$V_1 - V_1' = \varepsilon_1,$$
$$V_2' - V_2 = \varepsilon_2.$$

Consideremos que los saltos son positivos, si con ellos se aumenta el potencial en el sentido del recorrido del circuito, y negativos, si lo disminuyen. La condición de que la suma de caídas de poten-

cial al recorrer el circuito es igual a la suma de elevaciones del mismo, se escribe así:

$$IR + IR_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \tag{3}$$

La suma algebraica de los saltos de potencial que resultan al recorrer el circuito es

$$\mathscr{E} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

y se denomina *fuerza electromotriz* conectada al circuito. En el caso dado, la suma de saltos expresa la f.e.m. de la pila. Con este concepto de f.e.m., $\mathscr{E}$, podemos escribir la igualdad (3) de la siguiente manera:

$$IR + IR_0 = \mathscr{E}. \tag{3a}$$

Esta igualdad *es la ley de Ohm para el circuito cerrado*. Escribámosla de la siguiente manera:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + R_0}, \tag{4}$$

de donde se deduce que la intensidad de la corriente I de un circuito cerrado es directamente proporcional a la f.e.m. $\mathscr{E}$ e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito $R+R_0$.

Observando que $IR=V_1-V_2$, obtenemos, de la (3a):

$$V_1 - V_2 = \mathscr{E} - IR_0, \tag{5}$$

es decir, *la diferencia de potencial V_1-V_2 en los bornes de una pila es igual a su f.e.m. menos la caída de potencial de la parte interna del circuito*. Cuanto mayor sea la caída de potencial en la parte interna del circuito, mayor será la discrepancia.

Para una pila desconectada, $I=0$ y, por consiguiente, es igual a cero la caída de potencial en la parte interna del circuito. En este caso, de la (5), tenemos que $\mathscr{E}=V_1-V_2$, es decir, *la f.e.m. $\mathscr{E}$ es igual a la diferencia de potencial de los bornes desconectados de la pila*.

La diferencia de potencial de los bornes de una pila conectada con una resistencia exterior, siempre es menor que su f.e.m.

La diferencia de potencial de los bornes de una pila también es igual a su f.e.m. en el caso cuando la corriente I que fluye por la pila, esté compensada por una fuente exterior cualquiera de diferencia de potencial (véase la definición de f.e.m. según el método de compensación en el § 167).

En el § 156 se ha demostrado que en el caso de una corriente estacionaria, las líneas de flujo eléctrico son cerradas. De esto se desprende que las cargas, cuyo desplazamiento origina la corriente, se mueven por líneas cerradas. Así tenemos que en el circuito de una pila, las cargas convencionalmente consideradas positivas se desplazan no solamente por las regiones de caídas de potencial, es decir,

www.elsolucionario.org

por la parte exterior AbB e interior BcA del circuito (fig. 107); sino que también lo hacen en las regiones de los saltos de potencial. En estas últimas regiones, se desplazan en *dirección del aumento del potencial*, es decir, contra la dirección en que actúan las fuerzas electrostáticas. Está claro que este movimiento no es debido a las fuerzas electrostáticas, sino a fuerzas de otra procedencia. Estas fuerzas se denominan *fuerzas ajenas*. En el caso de la pila, las fuerzas ajenas son resultado de los procesos químicos que se producen al disolverse el material de los electrodos en los electrólitos.

Generalicemos el concepto de fuerza electromotriz para el caso cuando las fuerzas ajenas actúan en cualquier lugar del circuito. La ley de Ohm, considerando la densidad de la corriente, tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}.$$

Esta ecuación la establecimos suponiendo que sobre las cargas que crean la corriente, actúan fuerzas eléctricas. En el caso general, sobre las cargas pueden actuar fuerzas eléctricas y fuerzas de otro origen, que hemos denominado ajenas. Designemos por $\mathbf{f}_0$ las fuerzas ajenas que actúan sobre la carga. Entonces, en la expresión (4) del § 161, la aceleración de la carga w hay que representarla de la siguiente manera:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}_0}{m} = \frac{e\mathbf{E} + \mathbf{f}_0}{m} = \frac{e\,(\mathbf{E} + \mathbf{f}_0/e)}{m}.$$

Designemos $\mathbf{f}_0/e$ por $\mathbf{E}_0$ y llamémosla intensidad de las fuerzas ajenas. Entonces, la aceleración de la carga w vendrá determinada por la suma de la intensidad del campo eléctrico E e intensidad de las fuerzas ajenas $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{w} = \frac{e\,(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0)}{m}.$$

Repitiendo los razonamientos del § 161, llegaremos a la expresión de la ley de Ohm que, en este caso, tendrá la forma:

$$\mathbf{i} = \sigma\,(\mathbf{E} + \mathbf{E}_0). \qquad (6)$$

En esta expresión se ve el papel de las fuerzas ajenas en el movimiento de las cargas. Está claro que en los lugares donde no haya fuerzas ajenas, $\mathbf{E}_0 = 0$ y nos da la ley de Ohm en la forma primitiva.

Veamos un tubo de corriente, es decir, el espacio limitado por las líneas de flujo eléctrico (el tubo de corriente puede ser también todo el conductor). La intensidad de la corriente a través de la sección del tubo ΔS será constante y se puede representar de la manera siguiente:

$$I = i_n \Delta S = \sigma\,(E_n + E_{0n})\,\Delta S.$$

Supongamos que la sección ΔS es perpendicular a las líneas del flujo eléctrico, entonces el sentido de la normal a esta sección **n** coincidirá con el de la dirección 1 de las líneas del flujo, y tendremos:

$$I = \sigma (E_l + E_{0l}) \Delta S$$

o

$$E_l + E_{0l} = \frac{I}{\sigma \Delta S}.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por la longitud elemental del tubo de corriente Δl y sumando todos los elementos del tubo de la corriente, nos da:

$$\sum (E_l + E_{0l}) \Delta l = \sum \frac{I}{\sigma \Delta S} \Delta l.$$

Como la intensidad de la corriente I a través de cualquier sección del tubo es constante, se puede sacar fuera del signo de la suma, de donde:

$$\sum E_l \Delta l + \sum E_{0l} \Delta l = I \sum \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}.$$

La magnitud $\sum \frac{\Delta l}{\sigma \Delta S}$ es la resistencia total del tubo, que designaremos por $R + R_0$, sobrentendiendo que R_0 es la resistencia de la parte en que actúan las fuerzas ajenas (resistencia interna), y R, es la resistencia de la parte donde no actúan las fuerzas ajenas (resistencia exterior). Después veremos que la suma $\Sigma E_l \Delta l$ para un contorno cerrado es igual a cero, ya que esta expresión es la del trabajo de las fuerzas electrostáticas al recorrer una carga unidad por el contorno cerrado del tubo (potencial electrostático).

La expresión $\Sigma E_{0l} \Delta l$ para un contorno cerrado se denomina *circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajenas*, y es la suma de los productos de las proyecciones del vector de intensidad de las fuerzas ajenas en la dirección de los elementos del contorno E_{0l} por la longitud de estos elementos Δl, a lo largo de todos los elementos del contorno cerrado. Llamemos $\mathcal{E}$ a esta suma:

$$\mathcal{E} = \sum E_{0l} \Delta l, \tag{7}$$

entonces la ecuación (6) toma la forma:

$$\mathcal{E} = I (R + R_0),$$

de donde se ve que $\mathcal{E}$ es una f.e.m. que actúa en el contorno. De esta manera hemos obtenido la ley de Ohm para un circuito cerrado en el que *la f.e.m. viene representada como la circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajenas.*

Las fuerzas ajenas pueden actuar en cualquier lugar del circuito. Es fácil de ver que cuando las fuerzas ajenas crean solamente saltos

de potencial en distintos lugares del circuito, la circulación nos dará la suma algebraica de los saltos de potencial para el contorno cerrado de la corriente. Por consiguiente, la definición arriba dada de f.e.m. como suma de los saltos de potencial, es un caso particular de la ecuación (7). En el caso de la corriente continua de una pila o de una batería de pilas, las fuerzas ajenas actuarán en las regiones donde se producen los procesos químicos (partes interiores del circuito).

Tomando en la ecuación (7) los elementos del contorno infinitamente pequeños, sustituimos la suma por la integral extendida a todo el contorno cerrado, y entonces la expresión de la f. e. m. $\mathcal{E}$ adquiere la forma:

$$\mathcal{E} = \oint E_{0l}\, dl.$$

La integral de la derecha es la circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajenas.

Ejemplo. La resistencia interna de la pila R_0 es k veces menor que la resistencia exterior R con que se cierra el circuito de la pila de f. e. m. $\mathcal{E}$. Hallar en cuántas veces la diferencia de potencial de los bornes de la pila $V_1 - V_2$ se diferencia de la f. e. m. $\mathcal{E}$ de la pila.

Solución. Colocando el valor de la intensidad de la corriente I de la (4) en la ecuación (5), obtenemos para la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ en los bornes de la pila:

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E}\,\frac{R}{R+R_0},$$

o

$$V_1 - V_2 = \frac{\mathcal{E}}{1+\dfrac{R_0}{R}}.$$

Como de la condición del problema $\dfrac{R_0}{R} = \dfrac{1}{k}$ la última fórmula adquiere la forma:

$$V_1 - V_2 = \frac{\mathcal{E}}{1+\dfrac{1}{k}} = \frac{k}{k+1}\,\mathcal{E},$$

es decir, la diferencia de potencial en los bornes de la pila $V_1 - V_2$ es $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{k}}$ veces menor que la f. e. m.

Si la resistencia exterior R es grande en comparación con la interna R_0, la relación $\dfrac{1}{k}$ será muy pequeña en comparación con la unidad, y la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ se acerca al valor de la f. e. m. Y viceversa, si R es muy pequeña en comparación con R_0, la relación $\dfrac{1}{k}$ será grande y la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ adquiere un valor mucho menor que $\mathcal{E}$.

§ 165. Energía desprendida en un circuito de corriente continua. Veamos las relaciones energéticas de un circuito cerrado de corriente continua. En la fig. 106 se ha representado un circuito

www.elsolucionario.org

cerrado de corriente continua, alimentado por una pila de f.e.m. $\mathcal{E}$ y con una resistencia interna R_0. Designemos por R la resistencia exterior del circuito. La potencia total del circuito se compondrá de las potencias de las partes exterior e interior del circuito:

$$W = I^2 R + I^2 R_0 = I^2 (R + R_0),$$

o, como según la fórmula (3a) del § 164, $I\ (R+R_0)=\mathcal{E}$, tenemos que:

$$W = I \cdot \mathcal{E}. \qquad (1)$$

De esta manera, *la potencia total de un circuito es igual al producto de la intensidad de la corriente por la f.e.m. de la pila*. Esta potencia será abastecida por ciertas fuentes ajenas de energía, como por ejemplo, las reacciones químicas producidas en la pila.

Por consiguiente, *en un circuito de corriente continua, las fuerzas ajenas suministran una potencia positiva igual a* $+I\mathcal{E}$.

Veamos ahora cómo depende la potencia desprendida por el circuito, de la resistencia exterior R con que se cierra la pila. Supongamos que la pila tiene una f.e.m. $\mathcal{E}$ y una resistencia interna R_0, y se cierra con una resistencia exterior R. Determinemos la dependencia respecto a R de las siguientes magnitudes: potencia total W desprendida en el circuito, potencia W_a desprendida en la parte exterior del circuito, y rendimiento η, de valor numérico igual a la relación de la potencia desprendida en la parte exterior del circuito respecto a la potencia total.

La intensidad de la corriente I, según la ley de Ohm, será:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0}.$$

El máximo valor lo alcanzará cuando $R=0$; en cuyo caso se llama *corriente de cortocircuito* y su intensidad es:

$$I_{c.\,c.} = \frac{\mathcal{E}}{R_0}.$$

Al aumentar la resistencia exterior, la intensidad de la corriente disminuye tendiendo a cero según una asíntota al aumentar infinitamente la resistencia exterior (véase la fig. 108).

La potencia total desprendida en el circuito será:

$$W = I\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2}{R + R_0}.$$

El valor máximo lo alcanzará en la corriente de cortocircuito ($R=0$):

$$W_{máx} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_0}.$$

Al aumentar R, la potencia disminuye tendiendo, según una asíntota, a cero al aumentar indefinidamente R.

La potencia desprendida en la parte exterior del circuito, será:

$$W_a = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+R_0)^2} \cdot R.$$

En la corriente de cortocircuito, $R=0$; de donde la potencia desprendida en la parte exterior del circuito, en este caso, es igual a

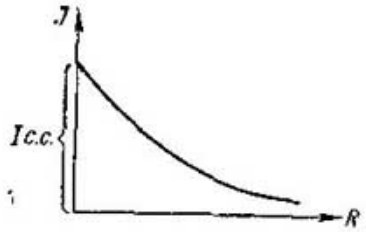


Fig. 108. Dependencia entre la intensidad de la corriente y la resistencia exterior.

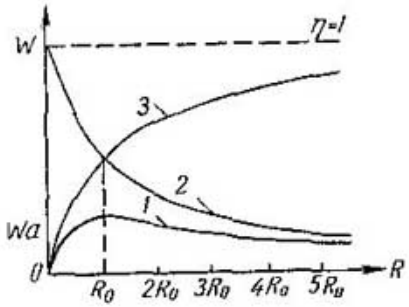


Fig. 109. Dependencia de la potencia W_a (1) desarrollada en la parte exterior del circuito; de la potencia total W (2), y del rendimiento η (3), respecto a la resistencia exterior R del circuito.

cero. El valor máximo de la potencia W_a lo alcanzará cuando $R = R_0$, es decir, cuando la resistencia exterior sea igual a la interna. En este caso

$$W_{a\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R_0},$$

es decir, es igual a la cuarta parte de la potencia del cortocircuito.

Para convencerse de que el máximo de la potencia W_a se obtiene cuando $R=R_0$, derivemos W_a respecto a la resistencia exterior:

$$\frac{dW_a}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+R_0)^4}\left[(R+R_0)^2 - 2(R+R_0)\cdot R\right],$$

de donde:

$$\frac{dW_a}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+R_0)^3}\cdot(R_0^2 - R^2),$$

El máximo tendrá lugar cuando sea igual a cero la primera derivada

$$\frac{dW_a}{dR} = 0, \text{ de donde } R = R_0.$$

Para convencernos de que en estas condiciones hemos obtenido el valor máximo no el mínimo de W_a, determinamos el signo de la segunda derivada $\frac{d^2W}{dR^2}$.

Al aumentar infinitamente la resistencia exterior, la potencia desprendida en la parte exterior del circuito tiende a cero.

El rendimiento lo determinamos de la relación de la potencia desprendida en la parte exterior del circuito W_a, respecto a la potencia total W:

$$\eta = \frac{W_a}{W} = \frac{R}{R+R_0}.$$

Cuando $R=0$, tenemos que $\eta=0$; con el aumento de R, aumenta el rendimiento tendiendo a $\eta=1$ cuando R aumenta indefinidamente; no obstante, en este caso, la potencia desprendida en la parte exterior del circuito, tiende a cero, por eso, desde el punto de vista práctico, no interesan las condiciones del máximo rendimiento.

En la fig. 109, la curva *1* nos da la dependencia entre la potencia W_a desprendida en la parte exterior del circuito, y la resistencia exterior R; la curva *2* representa la dependencia entre la potencia total W y la resistencia R, y por último, la curva *3* representa la variación del rendimiento η en función de la misma resistencia exterior R. Como se ve, η aumenta con el aumento de R.

La potencia W_a, que más interesa desde el punto de vista práctico, desprendida en la parte exterior del circuito, al principio aumenta, alcanzando el máximo cuando $R=R_0$, y después empieza a disminuir.

Siendo $R=R_0$, es decir, cuando W_a alcanza el máximo valor, $\eta=\frac{1}{2}$.

§ 166. Ley de Ohm para el circuito heterogéneo. Ley de Kirchhoff. La ley de Ohm en la forma presentada en el § 153 es justa para el circuito homogéneo, es decir, circuito en el cual no hay ninguna f.e.m. ni saltos de potencial. Pero ya se ha observado que la corriente continua en un circuito puede surgir solamente si hay f.e.m. En las pilas, las f.e.m. surgen debido a los saltos de potencial en la capa límite de los electrodos con las soluciones en que se sumergen (§ 164). Después veremos (§ 168) que los saltos de potencial también surgen en los lugares de contacto de dos metales diferentes y cuando haya diferencia de temperaturas. Así, en el caso general, hay que estudiar el circuito en que hay saltos de potencial ε_1, ε_2, ε_3, ... En el sentido dado de recorrido del circuito, los saltos pueden ser de diferente signo. La suma algebraica de los saltos de potencial $\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\ldots$ en la parte dada del circuito, es la f.e.m. $\mathcal{E}$*) real de esta parte del circuito.

*) En general, en un circuito heterogéneo, además de saltos de potencial, puede haber un aumento progresivo de potencial, por ejemplo, en un electrólito en el cual la concentración de iones varía de un lugar a otro.

www.elsolucionario.org

Veamos, para simplificar, un circuito heterogéneo compuesto de diferentes conductores conectados en serie A, B, C (fig. 110). Los contactos entre los conductores los designaremos con las cifras *1* y *2*. Sea V_1 el potencial del extremo izquierdo del circuito, y V_2, el del extremo derecho. Llamemos $V_A^{(1)}$ al potencial del conductor A en el lugar del primer contacto y $V_B^{(1)}$, al del conductor B en el

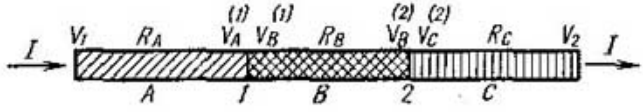


Fig. 110. Saltos de potencial en los lugares de contacto de un circuito heterogéneo.

mismo contacto; de la misma manera, los potenciales de los conductores B y C en los lugares del segundo contacto los llamaremos respectivamente $V_B^{(2)}$ y $V_C^{(2)}$. Sean R_A, R_B y R_C las resistencias respectivas de los conductores A, B y C. Como los conductores están conectados en serie, por ellos pasará una misma corriente I. Aplicando la ley de Ohm a cada conductor por separado, tenemos que:

$$IR_A = V_1 - V_A^{(1)},$$
$$IR_B = V_B^{(1)} - V_B^{(2)},$$
$$IR_C = V_C^{(2)} - V_2.$$

Sumando estas tres igualdades, hallamos que:

$$I(R_A + R_B + R_C) = V_1 + (V_B^{(1)} - V_A^{(1)}) + (V_C^{(2)} - V_B^{(2)}) - V_2. \qquad (1)$$

Pero las diferencias $V_B^{(1)} - V_A^{(1)}$ y $V_C^{(2)} - V_B^{(2)}$ son los saltos de potencial ε_1 y ε_2 en las capas límites *1* y *2* de los conductores. La suma de saltos de potencial ε_1 y ε_2 nos da la f.e.m. $\mathcal{E}$ que actúa en la parte dada del circuito; por consiguiente:

$$(V_B^{(1)} - V_A^{(1)}) + (V_C^{(2)} - V_B^{(2)}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mathcal{E}.$$

También tenemos que la suma de resistencias R_A, R_B y R_C es la resistencia total de la parte dada del circuito R:

$$R_A + R_B + R_C = R.$$

Con ello, la ecuación (1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$IR = V_1 - V_2 + \mathcal{E},$$

o

$$I = \frac{V_1 - V_2 + \mathcal{E}}{R}. \qquad (2)$$

La ecuación (2) es la ley de Ohm aplicada a un circuito heterogéneo:

el valor numérico de la intensidad de la corriente es igual a la suma de la diferencia de potencial de los extremos del circuito V_1-V_2 *y la f.e.m.* $\mathcal{E}$ *del circuito dividida por la resistencia total* R. En este caso, se considera positiva la f.e.m. que crea un *aumento* de potencial en el sentido en que fluye la corriente.

Si la f.e.m. de la parte dada del circuito es igual a cero, es decir, $\mathcal{E}=0$, la fórmula (2) se transforma en la habitual de la ley de Ohm:

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}.$$

Para un circuito cerrado tenemos que $V_1=V_2$, y la resistencia total será la suma de las resistencias de la parte exterior del circuito R y de la parte interior del mismo R_0, de donde:

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+R_0},$$

lo cual coincide con la fórmula (4) del § 164.

La generalizada ley de Ohm expresada por la fórmula (2) nos permite calcular cualquier circuito complejo. No obstante, el cálculo directo de circuitos bifurcados resulta complicado. Esta dificultad se vence en alto grado, si utilizamos dos sistemas de ecuaciones deducidas por Kirchhoff.

El circuito bifurcado se caracteriza por las intensidades de corriente que van por sus conductores, por las resistencias de los mismos y las f.e.m. conectadas a ellos. Estas magnitudes están relacionadas entre sí, y sabiendo unas se pueden hallar las otras. Por ejemplo, por las resistencias y f.e.m. dadas, se pueden hallar las intensidades y direcciones de las corrientes que fluyen por cada uno de los conductores.

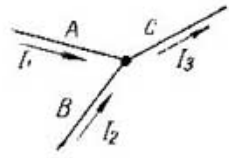


Fig. 111. Nudo formado por tres conductores A, B y C.

Veamos las ecuaciones de Kirchhoff por separado.

Primer sistema de ecuaciones de Kirchhoff. Llamemos *nudo* en un circuito bifurcado (fig. 111) a todo punto en que convergen no menos de tres conductores. El primer sistema de ecuaciones de Kirchhoff se refiere a los nudos. Como estamos analizando el caso de corrientes continuas, en cualquier punto del circuito y, por consiguiente, en cualquier nudo, la carga que tiene, debe permanecer constante. Por lo tanto, tendrá que salir la misma cantidad de cargas que llega (véase el § 156). Si consideramos positivas las corrientes que afluyen al nudo, y negativas las que salen del mismo, podemos decir que *la suma algebraica de las intensidades de las corrientes que llegan a un nudo es igual a cero.* Analíticamente se escribe así:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k=0, \qquad (3)$$

donde n es el número de corrientes que coinciden en el nudo dado. Esta ecuación se cumple en cualquier nudo del circuito.

El conjunto de ecuaciones (3) formadas para cada nudo del circuito dado, es el primer sistema de ecuaciones de Kirchhoff.

El segundo sistema de ecuaciones de Kirchhoff se refiere a cualquier contorno cerrado que se pueda tomar del circuito bifurcado (red o malla) dado. Veamos un contorno cerrado cualquiera $ABCA$ (fig 112) que consta de las partes (conductores) heterogéneas AB, BC y CA. Consideremos positivas las corrientes que al recorrer el contorno fluyen según un sentido determinado, por ejemplo, *según las agujas del reloj*, y negativas, las de sentido opuesto. De la misma manera consideraremos positivas las f.e.m. que aumentan el potencial al recorrer el contorno en este sentido, y negativas, las que lo disminuyen en este recorrido.

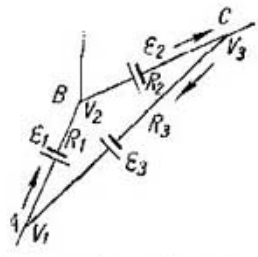


Fig. 112. Circuito cerrado $ABCA$.

Apliquemos la ley de Ohm, según la fórmula (2), a cada una de las partes heterogéneas AB, BC y CA del contorno. Sean R_1, R_2, R_3; I_1, I_2, I_3, y $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$, respectivamente las resistencias de las partes AB, BC y CA, las intensidades de las corrientes que las recorren y las f.e.m. que hay en ellas. Sean V_1, V_2 y V_3 los potenciales respectivos de A, B y C.

La ley de Ohm aplicada a cada una de las partes por separado se expresará con las siguientes ecuaciones:

$$I_1R_1 = V_1 - V_2 + \mathcal{E}_1,$$
$$I_2R_2 = V_2 - V_3 + \mathcal{E}_2,$$
$$I_3R_3 = V_3 - V_1 + \mathcal{E}_3.$$

Sumando estas tres igualdades hallamos que:

$$I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

En este resultado vemos que los potenciales V_1, V_2 y V_3 de los puntos A, B y C, se han eliminado.

Como estos razonamientos se pueden aplicar a *cualquier contorno cerrado*, en general podemos escribir:

$$\sum_{k=1}^{m} I_kR_k = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{E}_k; \qquad (4)$$

aquí m es el número de partes que contiene el contorno cerrado, y k el número que caracteriza a cada una de estas partes. De esta manera tenemos que *en cualquier contorno cerrado arbitrariamente elegido de una red de conductores, la suma de los productos de las intensidades de las corrientes por las resistencias respectivas*

www.elsolucionario.org

de los conductores, es igual a la suma de las f.e.m. que hay en este contorno. El conjunto de las ecuaciones (4) de los distintos contornos cerrados de la red dada de conductores, forma el segundo sistema de ecuaciones de Kirchhoff. Las ecuaciones de Kirchhoff (3) y (4) de los nudos y contornos permiten calcular la red. Hay que escribir tantas ecuaciones (3) y (4) como incógnitas haya en el sistema, observando que unas ecuaciones no se deduzcan de otras. Si en la red hay r nudos, en el primer sistema de ecuaciones se podrán escribir solamente $r-1$ ecuaciones, ya que la ecuación para el último nudo será una consecuencia de las anteriores. Si en la red se pueden considerar varios contornos cerrados, por ejemplo, los contornos cerrados *ABCA*, *ACDA* y *ABCDA* (fig. 113), las ecuaciones independientes del segundo sistema de ecuaciones de Kirchhoff se pueden escribir solamente para los contornos que no pueden resultar de la superposición de los ya examinados.

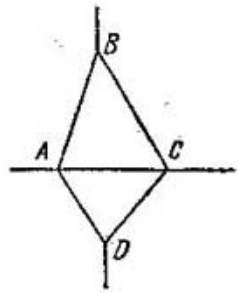


Fig. 113. Circuitos cerrados: *ABCA*, *ACDA* y *ABCDA*.

Por ejemplo, para la red compleja de la fig. 113, se pueden escribir las ecuaciones de los contornos *ABCA* y *ACDA*: estas ecuaciones serán independientes. La ecuación del contorno *ABCDA* resultará ser una consecuencia de las dos anteriores. Se pueden escribir ecuaciones independientes para otros dos contornos, por ejemplo el *ABCA* y el *ABCDA*; entonces la ecuación del contorno *ACDA* resultará ser una consecuencia de las dos anteriores.

Al escribir el segundo sistema de ecuaciones de Kirchhoff hay que tener bien presente las reglas arriba indicadas sobre los signos de las corrientes y de las f.e.m.

§ 167. Aplicación de las ecuaciones de Kirchhoff a la solución de varios problemas. 1. *Agrupación de conductores en paralelo.* Utilicemos primeramente el sistema de ecuaciones de Kirchhoff para resolver el problema sencillo de dos conductores en paralelo. Sean dos conductores en paralelo de resistencias R_1 y R_2. La intensidad total de la corriente que pasa por los conductores es igual a I y la dirección, la indicada en la fig. 114. Conocidos los valores de R_1, R_2 e I, hallar las intensidades de las corrientes I_1 e I_2 de los respectivos conductores.

En este problema tenemos dos incógnitas, que son las intensidades de las corrientes I_1 e I_2. Por consiguiente hay que escribir dos ecuaciones. La primera ecuación la escribiremos, por ejemplo, para el nudo A. Consideremos que la corriente I llega al nudo, entonces las corrientes I_1 e I_2 se deben considerar que salen del mismo y

escribirlas con signo negativo. Así, la primera ecuación de Kirchhoff para el nudo A será:

$$I - I_1 - I_2 = 0,$$

de donde

$$I = I_1 + I_2. \tag{1}$$

La segunda ecuación de Kirchhoff la escribiremos para el contorno cerrado $ABCDA$. Recorriendo este contorno según las agujas del reloj, es decir, en el sentido desde el nudo A por el conductor B al nudo C y después por el conductor D al nudo A otra vez, deberemos considerar la corriente I_1 positiva y la corriente I_2 negativa. Como en este contorno cerrado no hay f.e.m., la segunda ecuación de Kirchhoff se escribirá así:

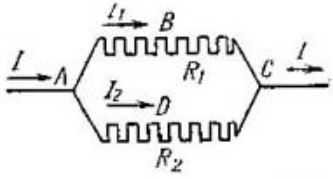


Fig. 114. Conexión en paralelo de dos conductores B y D.

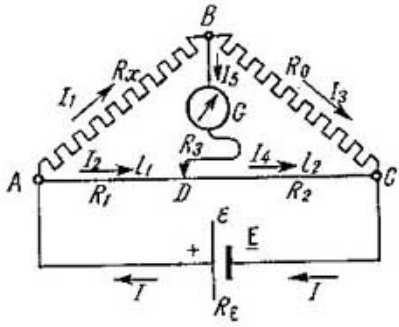


Fig. 115. Esquema del puente de Wheatstone.

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0,$$

de donde

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1} I_2. \tag{2}$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) respecto a I_1 e I_2 hallamos que

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I,$$

que es lo buscado. De la ecuación (2) también sacamos que:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

es decir, la conocida ley de que las intensidades de las corrientes de dos conductores en paralelo, son inversamente proporcionales a sus respectivas resistencias.

2. *Puente de Wheatstone.* El puente de Wheatstone es un aparato utilizado para comparar la resistencia desconocida R_x y que se quiere averiguar, con otra resistencia conocida R_0. El esquema del puente

de Wheatstone consta de un circuito que, partiendo de una pila E (fig. 115) se bifurca en el nudo A: una parte la componen las resistencias R_x y R_0 conectadas en serie, y la segunda generalmente es un conductor homogéneo tirante AC. En el punto B de conexión de las resistencias R_x y R_0 se conecta un borne del instrumento de medición (galvanómetro) G, el segundo borne se conecta a un cursor D. Este contacto (cursor) puede desplazarse a lo largo del conductor AC y, de esta manera, variar la relación de las resistencias R_1 y R_2 de las partes AD y DC del conductor. Más adelante demostraremos que por la parte BGD del circuito no pasará corriente si se cumple la relación:

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{3}$$

que se puede escribir de la siguiente manera:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_0. \tag{3a}$$

En un conductor homogéneo, las resistencias de sus partes están en razón directa con sus longitudes. Así, designando la longitud de la parte AD del conductor por l_1, y la de la parte DC, por l_2, tenemos que:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2},$$

después de lo cual, la ecuación (3) toma la forma:

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} R_0.$$

Esta relación es la que sirve de comparación de la resistencia a medir R_x con la resistencia conocida R_0. Para ello, el cursor D se desplaza de manera que por el galvanómetro G deje de pasar corriente, lo cual se determina directamente al dejar de inclinarse la aguja. La relación de las longitudes l_1/l_2 se determina por la regla graduada que hay a lo largo del conductor AC.

Utilicemos las ecuaciones de Kirchhoff para deducir la ecuación (3). Supongamos primeramente que nos son conocidas las cuatro resistencias R_x, R_0, R_1 y R_2, y la resistencia interna R_E de la pila E, su f.e.m. $\mathcal{E}$ y la resistencia R_3 de la parte BGD del circuito, que contiene el galvanómetro G. La resistencia de los conductores que llevan la corriente desde la pila hasta los nudos de nuestro esquema A y C, se desprecia. Llamemos I a la intensidad de la corriente que va de la pila, e I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5 a las intensidades de las corrientes de las partes AB, AD, BC, DC y BGD, respectivamente.

En nuestro esquema hay *cuatro* nudos: A, B, C y D. Según lo dicho en el § 166, escribiremos las ecuaciones de Kirchhoff para *tres* de ellos. Elegimos los nudos A, B y D. Hemos convenido considerar

www.elsolucionario.org

positivas las corrientes que llegan al nudo, y negativas las que salen del mismo. No obstante, en un esquema complejo, podemos no saber de antemano cuáles son precisamente las direcciones de las corrientes. En este caso podemos atribuirles cualquier dirección y al resolver las ecuaciones de Kirchhoff, los resultados con valores positivos de I_k corresponderán a las corrientes cuyos sentidos hemos elegido acertadamente, y los resultados con valores negativos de I_k corresponderán a las corrientes, cuyo sentido es el opuesto al elegido. En nuestro caso, atribuimos a las corrientes el sentido indicado por las flechas en la fig. 115, de donde el primer sistema de ecuaciones de Kirchhoff será:

$$\left.\begin{array}{l} \text{para el nudo } A\text{: } I - I_1 - I_2 = 0, \\ \text{para el nudo } B\text{: } I_1 - I_3 - I_5 = 0, \\ \text{para el nudo } D\text{: } I_5 + I_2 - I_4 = 0. \end{array}\right\} \quad (4)$$

El segundo sistema de ecuaciones de Kirchhoff lo escribimos considerando en nuestro esquema los contornos cerrados $ABDA$, $BCDB$ y $ACEA$. Recorriendo cada contorno según las agujas del reloj, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{para el contorno } ABDA\text{: } I_1 R_x + I_5 R_3 - I_2 R_1 = 0, \\ \text{para el contorno } BCDB\text{: } I_3 R_0 - I_4 R_2 - I_5 R_3 = 0, \\ \text{para el contorno } ACEA\text{: } I_2 R_1 + I_4 R_2 + I R_E = \mathcal{E}. \end{array}\right\} \quad (5)$$

De esta manera hemos obtenido seis ecuaciones que, dadas la f.e.m. $\mathcal{E}$ y las resistencias R_x, R_0, R_1, R_2, R_3 y R_E, nos permiten hallar los valores de todas las seis intensidades de las corrientes I, I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5. No obstante, nos limitaremos a resolver un problema más fácil que nos llevará a la ecuación (3), a saber, aclarar las condiciones en que la corriente I_5, que fluye por el galvanómetro G, es igual a cero. Si $I_5 = 0$, las ecuaciones segunda y tercera del sistema (4) nos dan:

$$I_1 = I_3, \quad I_2 = I_4, \quad (6)$$

y la primera y segunda ecuaciones del sistema (5):

$$I_1 R_x = I_2 R_1, \quad I_3 R_0 = I_4 R_2. \quad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) obtenemos que:

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_2},$$

que es lo que se quería demostrar.

La exactitud de la comparación de las resistencias R_x y R_0 será mayor, cuando la relación $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l'}{l''}$ difiera poco de la unidad. Por eso, al medir con el puente de Wheatstone la resistencia desconocida

R_x, es preferible que el valor de la resistencia patrón R_0 se diferencia poco del de R_x. Para ello, como resistencia patrón para la parte BC del puente de Wheatston, generalmente se toma una caja de resistencias (véase el § 159) y sacando unas u otras clavijas de la caja se consigue que el valor de R_0 sea aproximado al de R_x.

3. Conexión de pilas formando batería. Veamos primeramente dos casos: conexión en serie y conexión en paralelo de las pilas de la batería. Para simplificar consideraremos que todas las pi as conectadas tienen la misma f.e.m. $\mathcal{E}$ y la misma resistencia interna R_0.

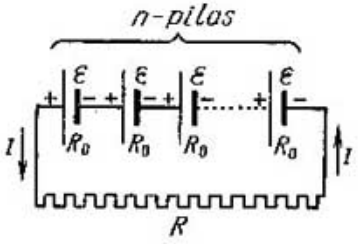


Fig. 116. Conexión en serie de pilas formando batería.

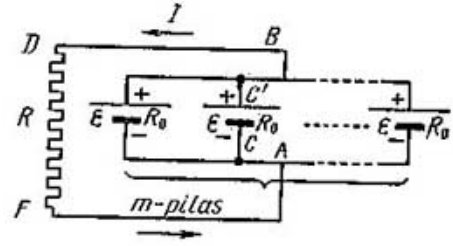


Fig. 117. Conexión en paralelo de pilas de una batería.

Sea una batería de *n pilas conectadas en serie* (fig. 116) y cuyo circuito lo cierra la resistencia exterior R. Determinar la intensidad de la corriente del circuito. La resistencia de los conductores que conectan las pilas, se desprecia.

Escribamos la segunda ecuación de Kirchhoff para el contorno cerrado que forma el circuito. Está claro que en nuestro caso la ecuación será:

$$InR_0 + IR = n\mathcal{E},$$

de donde

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + nR_0}, \tag{8}$$

Si comparamos esta ecuación con la

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0},$$

que determina la intensidad de la corriente de un circuito cerrado conteniendo una pila de f.e.m. $\mathcal{E}$ y de resistencia interna R_0, vemos que *en la conexión en serie de n pilas de una batería, la f.e.m. aumenta n veces y n veces aumenta la resistencia interna.* De esto se deduce claramente que la conexión en serie de pilas conviene cuando la resistencia exterior R es grande en comparación con la interior R_0. Efectivamente, si R es mucho mayor que nR_0, es decir, $R \gg nR^0$, en el denominador de la fórmula (8) se puede despreciar la magnitud

nR_0, de donde aproximadamente:

$$I = n\frac{\mathcal{E}}{R},$$

es decir, en la conexión en serie de n pilas, la corriente del circuito es casi n veces más intensa que la de una pila. Si la resistencia exterior R es pequeña en comparación con la resistencia interior de la batería nR_0, en la fórmula (8) se puede despreciar R, y aproximadamente tenemos:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_0},$$

es decir, la misma intensidad de corriente que la de una pila.

Veamos ahora la *conexión en paralelo* de una batería de m pilas de igual f.e.m. $\mathcal{E}$ e igual resistencia interna R_0 (fig. 117). Sea una batería cuyo circuito lo cierra una resistencia exterior R. Se desprecia la resistencia de los conductores que conectan las pilas. Como en el nudo A el circuito se bifurca en m partes iguales, la primera ecuación de Kirchhoff nos da que la intensidad de la corriente en cada una de ellas será m veces menor que la intensidad de la corriente I de todo el circuito; en otras palabras, por cada una de las pilas independientemente pasa una corriente de intensidad I/m. Después de esto, escribimos la segunda ecuación de Kirchhoff para uno de los contornos cerrados del circuito, por ejemplo, para el contorno $ACC'BDFGA$, lo cual nos da:

$$\frac{I}{m}R_0 + IR = \mathcal{E},$$

de donde

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{R_0}{m}}. \qquad (9)$$

La fórmula (9) indica que *en la conexión en paralelo de m pilas iguales de una batería, la f.e.m. no varía, y la resistencia interna disminuye m veces.*

Es fácil de ver que la conexión en paralelo de las pilas de una batería conviene cuando la resistencia exterior es pequeña; efectivamente, si R es tan pequeña con respecto a R_0/m, que se pueda despreciar, la fórmula (9) con valor aproximado da:

$$I = m\frac{\mathcal{E}}{R_0},$$

es decir, un aumento de la intensidad de la corriente m veces en comparación con la producida por una pila. Si la resistencia exterior es mucho mayor que R_0/m, es decir, $R \gg R_0/m$, la fórmula (9) nos indica que la conexión en paralelo de m pilas iguales de una batería no acarrea un aumento de la intensidad de la corriente.

www.elsolucionario.org

Utilizando la ecuación de Kirchhoff, también es fácil demostrar que si conectamos en serie n grupos cada uno de los cuales consta de m pilas conectadas en paralelo, la intensidad de la corriente I será:

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + \frac{n}{m} R_0}.$$

4. *Método de compensación (de Poggendorff) de determinación de la fuerza electromotriz de una pila.* La determinación de la f.e.m. de una pila se efectúa habitualmente comparándola con la f.e.m. conocida de una pila patrón. Esta comparación se realiza con el esquema de compensación representado en la fig. 118. La batería E_1, cuya f. e. m. $\mathcal{E}_1$ es mayor que la f. e.m. $\mathcal{E}_0$ de la pila patrón E_0 y que la f.e.m. $\mathcal{E}$ de la pila que se mide E_x, se conecta con la resistencia exterior AC cerrando el circuito. La pila patrón E_0 se conecta mediante la llave 1 al circuito AC de manera que su polo positivo esté conectado con el punto A de la resistencia AC, donde el potencial es mayor, y el negativo, con el cursor B, que puede desplazarse a lo largo de la resistencia AC. El galvanómetro G mide la intensidad de la corriente que pasa por la pila patrón E_0. La pila E_x que se mide, al principio la suponemos desconectada del esquema con la llave 2.

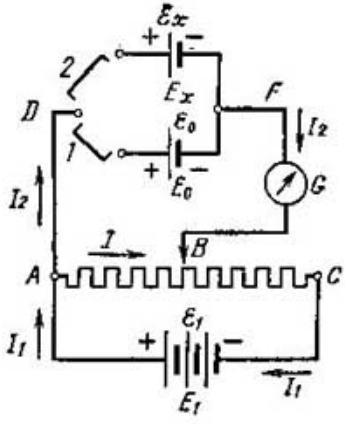


Fig. 118. Esquema del método de compensación para determinar la fuerza electromotriz de una pila.

Sean I, I_1 e I_2, respectivamente, las corrientes que pasan por las partes AB, BCE_1A y ADE_0FB del circuito. Aplicando la primera ecuación de Kirchhoff al nudo A, tenemos:

$$I_1 - I_2 = I.$$

Sea R_0 la resistencia de la parte ADE_0FB del circuito, y R_1 la de la parte AB del mismo; entonces, la segunda ecuación de Kirchhoff para el contorno cerrado ADE_0FBA será:

$$R_0 I_2 - R_1 I = -\mathcal{E}_0,$$

o, como $I = I_1 - I_2$, tenemos que

$$R_0 I_2 - R_1 (I_1 - I_2) = -\mathcal{E}_0. \qquad (10)$$

Desplazando el cursor B se puede conseguir una igualdad a cero de la intensidad de la corriente I_2, lo cual se percibe directamente al

lejar de inclinarse la aguja del galvanómetro G. En este caso, la ecuación (10) tendrá la forma:

$$I_1 R_1 = \mathcal{E}_0. \tag{11}$$

Así tenemos que cuando la caída de potencial $I_1 R_1$ en la parte AB del circuito es igual a la f.e.m. $\mathcal{E}$ de la pila patrón, su f.e.m. estará compensada, es decir, la corriente a través de la pila patrón es igual a cero. Después de escribir la segunda ecuación de Kirchhoff para el contorno $ABCE_1A$, obtenemos que la intensidad de la corriente I_1 la determinan solamente los valores de la f.e.m. $\mathcal{E}_1$ y de la resistencia R_3 de todo el contorno:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_3}.$$

Después de haber compensado la pila patrón, se desconecta con la llave *1* y, en su lugar, se conecta en el esquema la pila a medir E_x con la llave *2*. Desplazando el cursor B, se consigue de nuevo que deje de pasar corriente por el galvanómetro G. En este caso, el cursor B ocupará otro lugar que cuando teníamos conectado la pila patrón, y la resistencia de la parte AB del circuito tendrá otro valor R_2. Está claro que de nuevo se cumplirá una condición análoga a la expresada en la (11):

$$I_1 R_2 = \mathcal{E}_x. \tag{12}$$

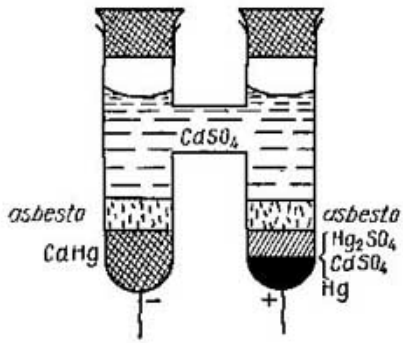


Fig. 119. Pila patrón.

La intensidad de la corriente I_1 de nuevo es igual a $\mathcal{E}_1/R_3$, entonces, de las ecuaciones (11) y (12) obtenemos la relación de las f.e.m.:

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{E}_0} = \frac{R_2}{R_1} \text{ o } \mathcal{E}_x = \frac{R_2}{R_1}\mathcal{E}_0.$$

Así tenemos que, sabiendo la f.e.m. de la pila patrón $\mathcal{E}_0$ y la relación de las resistencias R_2/R_1, hallamos la f.e.m. $\mathcal{E}_x$ que queremos medir.

Como se ve, el método no exige que se sepan los valores de R_1 y R_2, sino solamente el valor de su relación R_1/R_2. Esta relación se puede determinar por la posición del cursor B.

Como pila patrón generalmente se utiliza una pila de cadmio y mercurio (pila Weston), cuya f. e. m. varía muy poco con el tiempo (electrodos de pequeña polarización, véase el § 179). Esta pila (fig. 119) consta de un electrodo de mercurio (polo positivo) y otro de una amalgama de cadmio (polo negativo). Entre ellos se coloca sulfato mercurioso (Hg_2SO_4) con cristales de $CdSO_4$ y una solución de sulfato de cadmio ($CdSO_4$). La fuerza electromotriz de la pila patrón a la

temperatura de 20° C es $\mathcal{E}_{0,20}=1{,}0183$ V. Variando la temperatura, la f.e.m. varía muy poco: la f.e.m. $\mathcal{E}_{0,t}$ a $t°$ C viene determinada por la siguiente fórmula empírica:

$$\mathcal{E}_{0,t}=\mathcal{E}_{0,20}-4{,}075\cdot 10^{-5}(t°-20°)-9{,}444\cdot 10^{-7}(t°-20°)^2+9{,}8\cdot 10^{-9}(t°-20°)^3.$$

§ 168. Diferencia de potencial de contacto. Para comprender las causas que engendran la f.e.m. veamos primeramente las condiciones que se crean en la capa límite de dos metales y en la de un metal con el vacío. En 1797, Volta descubrió que al poner en contacto dos metales diferentes surge entre ellos una diferencia de potencial.

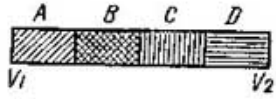


Fig. 120. Serie consecutiva de metales.

Volta determinó una serie de metales, en la cual cada metal en contacto con el que le sigue, se electriza positivamente. Esta serie es la siguiente: Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd.

Después Volta estableció que si varios metales diferentes A, B, C, D (fig. 120) se ponían en contacto uno tras otro, en los extremos del conductor formado por esta serie, se creaba una diferencia de potencial que dependía solamente de la naturaleza de los conductores extremos A y D, y no dependía de los conductores B y C intercalados. Esta diferencia de potencial que surge al poner en contacto dos metales diferentes, se denomina *diferencia de potencial de contacto*. Esta diferencia de potencial de contacto oscila, según sea el par de metales, desde varias décimas de voltio hasta voltios enteros, y depende en alto grado de la pureza de los metales, sobre todo de la ausencia de gases ocluidos en las superficies.

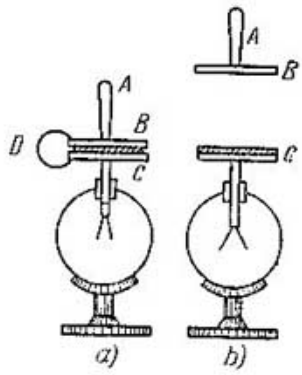


Fig. 121. Comprobación de la diferencia de potencial de contacto

La manera más fácil de comprobar la existencia de la diferencia de potencial de contacto es con el siguiente experimento. En la varilla de un electroscopio se enrosca una placa C del metal a experimentar (fig. 121, *a*). La placa C se cubre por arriba de una fina capa de material aislante. Sobre la placa C se coloca una segunda placa B del segundo metal a experimentar con un mango aislador A. Ambas placas se unen con el hilo conductor D. Según lo arriba indicado,

www.elsolucionario.org

entre las placas C y B se crea una diferencia de potencial, que corresponde a la naturaleza de los metales de que están hechas, independientemente del metal del hilo conductor D. Como resultado de ello, este condensador plano formado por las placas C y B, se carga. Conectemos la placa superior B con tierra y retiremos el hilo conductor D: la placa inferior C resultará cargada hasta un potencial igual a la diferencia de potencial de contacto de los metales experimentados. No obstante, debido a la poca sensibilidad del corriente electroscopio de panes, no percibiremos esta diferencia de potencial. Para percibir la diferencia de potencial entre las placas C y B, elevemos la placa B asiéndola del mango A (fig. 121, *b*), con lo cual aumenta la distancia entre las placas y, por consiguiente, disminuye la capacidad del condensador formado por ellas (véase el § 148). Como en este caso, las cargas que hay en las placas quedan invariables, la diferencia de potencial entre las placas aumentará en tantas veces, como haya disminuido la capacidad. Si distanciamos suficientemente las placas, el potencial de la placa B se eleva lo suficiente para que los panes del electroscopio se separen. Si el electroscopio está graduado en voltios y su capacidad se ha medido de antemano (la capacidad sin panes y la capacidad después de colocarle la placa superior conectada a tierra), se puede calcular la diferencia de potencial de contacto buscada. No obstante, este método no es exacto. Más abajo describiremos otros métodos de medición de la diferencia de potencial de contacto.

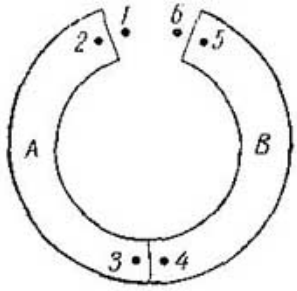


Fig. 122. Circuito abierto formado de dos metales.

Veamos con más detalle la creación de la diferencia de potencial de contacto. Sea un circuito abierto formado por dos metales A y B (fig. 122). Veamos la variación del potencial al recorrer el contorno sucesivamente por los puntos *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*. Entre los puntos *1* y *2* hay una diferencia de potencial debido a que los electrones del metal se hallan en un pozo de potencial. Los puntos *2* y *3* se hallan a un mismo potencial por pertenecer al mismo metal. En el lugar de contacto de los metales A y B surge una diferencia de potencial, lo cual nos da una variación de potencial al pasar del punto *3* (metal A) al punto *4* (metal B). Los puntos *4* y *5* se hallan a un mismo potencial. Entre los puntos *5* y *6* (metal B y el vacío) de nuevo surge un salto de potencial, ya que los electrones del metal B se hallan en un pozo de potencial. De esta manera tenemos dos magnitudes diferentes: la diferencia de potencial en el lugar de contacto de dos metales (llamada diferencia de potencial de contacto interior) y la

diferencia de potencial entre los puntos *1* y *6* junto a la superfici de ambos metales en el vacío. Esta última se denomina diferenci de potencial de contacto exterior y es la que generalmente se mide por eso se llama simplemente diferencia de potencial de contact V_{AB}. Gracias a la diferencia de potencial entre los puntos *1* y *6*, e el intersticio entre los extremos de los metales *A* y *B* se crea un camp eléctrico, y en las superficies libres de los metales *A* y *B*, surge cargas eléctricas.

Como se ha indicado en el § 163, los electrones del metal se hallan en un pozo de potencial, en cuyo interior hay niveles energéticos. A la temperatura del cero absoluto, $n/2$ niveles inferiores están llenos de electrones (n es el número de electrones), los demás están vacíos. A la temperatura de $T \neq 0$, parte de electrones se halla en

Fig. 123. Los niveles energéticos del cristal no están llenos por completo.

niveles más elevados. Sin embargo, a temperaturas no muy elevadas, el número de electrones de esta clase no es muy grande relativamente y, por eso, podemos considerar, por simplificar, que solamente $n/2$ niveles inferiores están llenos. Estos niveles vienen representados en la fig. 123, donde E_{p0} es la energía del electrón fuera del metal, y E_i, la energía del último nivel ocupado. La magnitud $A = E_{p0} - E_i$ es el trabajo de salida del electrón del metal al vacío. El trabajo de salida se ha convenido en expresarlo mediante el producto de la carga del electrón e por la diferencia de potencial V elegida de tal manera, que el producto eV sea igual al trabajo de salida A:

$$eV = A.$$

Como la carga del electrón es una magnitud constante, el trabajo de salida lo determina solamente una magnitud, que es la diferencia de potencial ($V = \frac{A}{e}$). Sin embargo, el trabajo de salida generalmente se mide en unidades especiales de trabajo denominadas *electrón-voltio* (siglas eV). Esta unidad de trabajo es igual al trabajo efectuado al desplazar la carga de un electrón e entre dos puntos de diferencia de potencial igual a 1 voltio. Como $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$, tenemos que

$$1eV = \frac{4{,}803 \cdot 10^{-10}}{300} \text{ erg} = 1{,}601 \cdot 10^{-12} \text{ erg}.$$

Basándose en este concepto de la energía del electrón en el metal, analicemos cuáles serán las energías de los electrones en el caso de dos metales en contacto. En la fig. 124 vienen representadas gráficamente las energías de los electrones de dos metales en contacto. En esta representación, los puntos *1*, *2*, *3*, *4*, *5* y *6* corresponden a los respectivos puntos de la fig. 122. La magnitud E_{lA} es la energía del electrón que se halla en el metal *A* en el último nivel ocupado, y E_{lB}, la energía del electrón que se halla en el último nivel ocupado del metal *B*. Si estas energías no son iguales, en el lugar de contacto de los metales se crea un salto de potencial que corresponde al paso desde el punto *3* hasta el punto *4*. Este salto de potencial es la diferencia de potencial de contacto interior V''_{AB}.

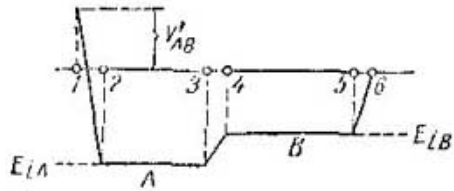


Fig. 124. Pozo de potencial de dos metales en contacto.

La diferencia de potencial entre los puntos *2* y *1* es debida a que para trasladar a un electrón del metal (punto *2*) al vacío (punto *1*) hay que realizar un trabajo A_A. Este trabajo de salida determina el potencial $V_A = \frac{A_A}{e}$, que va a poseer el electrón arrancado del metal *A* y que se encuentra en el vacío cerca de su superficie (punto *1*). De la misma manera tenemos que el potencial del electrón en las proximidades del metal *B* en el punto *6*, será igual a $V_B = \frac{A_B}{e}$, donde A_B es el trabajo de salida del electrón del metal *B* al vacío. De esta manera tenemos que en el intersticio entre los metales surge una diferencia de potencial V'_{AB} (diferencia de potencial entre los puntos *1* y *6*) igual a:

$$V'_{AB} = V_B - V_A = \frac{A_B - A_A}{e}. \qquad (1)$$

La magnitud V'_{AB} es la diferencia de potencial de contacto exterior de dos metales. Como se ha dicho, es debida a la diferencia de trabajos de salida de ambos metales.

La diferencia total de potencial de contacto V_{AB} entre los puntos *1* y *2* es la suma de las diferencias de potencial de contacto exterior e interior:

$$V_{AB} = V'_{AB} + V''_{AB}. \qquad (2)$$

www.elsolucionario.org

La diferencia de potencial de contacto interior es $V''_{AB}=E_{iB}-E_{iA}$ (véase la fig. 124). Una teoría detallada de la diferencia de potencial de contacto interior, solamente se puede exponer basándose en la mecánica cuántica. Desde el punto de vista de la teoría electrónica clásica del origen de la diferencia de potencial de contacto interior se explica basándose en que el número de electrones libres n_0 por unidad de volumen es diferente en los metales A y B. Sea n_{0A} el número de electrones libres por unidad de volumen del metal A, y n_{0B} el del metal B. Si suponemos que $n_{0A}<n_{0B}$, a través de la superficie de contacto de ambos metales se difunden menos electrones en el metal B procedentes del A, que en el A procedentes del B. Debido a ello, entre los metales A y B surge una diferencia de potencial V''_{AB}. Los correspondientes razonamientos teóricos (véase más abajo en el escrito de menor cuerpo) demuestran que

$$V''_{AB}=\frac{kT}{e}\ln\frac{n_{0A}}{n_{0B}}, \qquad (3)$$

donde k es la constante de Boltzmann, e, la carga del electrón y T la temperatura absoluta de los metales. Sin embargo, los números de electrones n_{0A} y n_{0B} para los diferentes pares de metales se diferencian poco uno de otro; por eso, la diferencia de potencial V''_{AB} generalmente es muy pequeña en comparación con la diferencia de potencial V'_{AB} y, prácticamente, la diferencia de potencial de contacto V_{AB} es casi igual a la V'_{AB}, es decir, se expresa aproximadamente por el trabajo de salida según la ecuación (1).

La diferencia de potencial en los extremos de una serie de metales depende solamente de la naturaleza de los metales extremos, y no de la naturaleza de los metales intermedios. Veamos una serie de metales en contacto A, B, C. La diferencia de potencial en los extremos de este circuito abierto será igual a la suma de las diferencias de potencial de contacto de los distintos pares:

$$V_{AC}=V_{AB}+V_{BC}=(V_B-V_A)+(V_C-V_B)=V_C-V_A.$$

Como se ve, V_{AC} viene determinado solamente por los valores de V_A y V_C, es decir, V_{AC} es igual a la diferencia de potencial de contacto que se crearía del contacto directo de los metales A y C sin el metal intermedio B. De esta manera llegamos a la conclusión de que *al formar un circuito cerrado de diferentes metales conectados en serie* (fig. 125), *la suma de diferencias de potencial de contacto de estos metales no crea en el circuito ninguna f.e.m. resultante*. Efectivamente, la f.e.m. $\mathcal{E}$ es la suma algebraica de todos los saltos de potencial que se encuentran al recorrer el circuito cerrado; por lo tanto, al recorrer un circuito cerrado de tres metales diferentes A, B, C,

obtendremos que

$$\mathcal{E} = V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = (V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_A - V_C) = 0.$$

Este resultado es justo si todos los contactos del circuito se hallan a la misma temperatura.

Al mismo resultado se puede llegar basándose en los razonamientos generales termodinámicos. Los metales son conductores de primera clase, es decir, conductores en los cuales no se producen ningunas variaciones químicas al pasar por ellos la corriente eléctrica. Por eso, si en un circuito cerrado de conductores de primera clase surgiese una f.e.m. diferente de cero, la corriente eléctrica

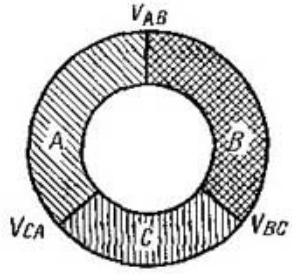


Fig. 125. Circuito cerrado de tres metales.

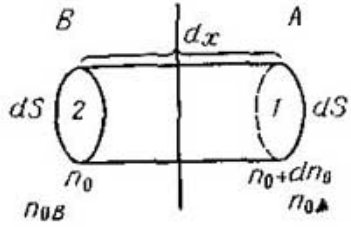


Fig. 126. Cilindro elemental en la zona de transición entre dos metales.

que esta f.e.m. originaría, no acarrearía variación alguna en los propios conductores. Al mismo tiempo, esta corriente desarrollaría cierta potencia que se podría reflejar solamente en el calor transmitido por los cuerpos que lo rodean. Pero este proceso sería un móvil perpetuo de segunda especie, cuya realización es imposible.

Definitivamente llegamos a la conclusión de que la sola existencia de diferencia de potencial de contacto, no puede acarrear la creación de f.e.m. alguna. La fuerza electromotriz puede surgir en un circuito cerrado (si la temperatura de todas las partes del circuito es la misma), solamente si este circuito consta, además de conductores de primera clase, de conductores de segunda clase, es decir, de conductores en los cuales, al pasar la corriente eléctrica, se producen procesos químicos.

Veamos la segunda parte de la diferencia de potencial de contacto relacionada con las distintas cantidades de electrones libres en diferentes metales, utilizando los conceptos de la teoría electrónica clásica. Este análisis se puede hacer debido a que los niveles energéticos de los electrones en el metal están muy próximos unos de otros y no están ocupados por completo.

Supongamos que no hay una línea divisoria neta entre los metales, sino que hay una zona de transición en la cual, el número de electrones por unidad de volumen varía constantemente desde el valor n_{0A} hasta el valor de n_{0B}. Sea un

cilindro, dentro de la zona de transición, de generatrices perpendiculares a la superficie divisoria de los metales en contacto, y de bases paralelas a esta superficie divisioria (fig. 126). Sea dx la longitud del cilindro, y dS el área de la base. Según la hipótesis de Lorentz (compárese con lo dicho en el § 161), los electrones libres forman en el metal un gas electrónico que corresponde a los conceptos fundamentales de la teoría cinética de los gases.

Sea n_0+dn_0 el número de electrones libres por unidad de volumen de la región donde se halla la base *1* del cilindro, y n_0, el correspondiente a la región donde se halla la base *2* del cilindro. Entonces, la presión del gas electrónico sobre la base *2* será:

$$p=\frac{2}{3}n_0\overline{w},$$

donde $\overline{w}$ es la energía cinética media de los electrones a la temperatura dada.

Como se ha visto en el § 163, las teorías clásica y cuántica dan distintos valores de la energía cinética media $\overline{w}$ de los electrones a la temperatura dada; pero el valor dado por la teoría clásica nos conduce a una capacidad calorífica inexacta de los metales. No obstante, aquí utilizaremos el valor clásico de $3/2\,kT$ como más sencillo, ya que nos vamos a limitar a aclarar los caracteres generales del proceso.

De esta manera, colocando $\overline{w}=3/2\,kT$ en la expresión de la presión del gas electrónico p sobre la base *2* del cilindro tenemos que

$$p=n_0kT.$$

De la misma manera obtenemos que sobre la base *1* del cilindro, el gas electrónico ejerce una presión de

$$p+dp=(n_0+dn_0)\,kT.$$

De aquí que la diferencia de presiones que sufre el cilindro, sea:

$$dp=kT\,dn_0. \tag{4}$$

Debido a esta diferencia de presiones, los electrones empiezan a desplazarse de la base *1* hacia la base *2* (si dn_0 es valor positivo). Este desplazamiento de electrones acarrea un transporte de cargas y, por consiguiente, la creación de una diferencia de potencial dV entre las bases *2* y *1*, que impide el desplazamiento ulterior de electrones. El equilibrio dinámico tendrá lugar cuando la fuerza del campo eléctrico, fuerza de freno, sea igual a la fuerza debida a la diferencia de presiones dp.

El número de electrones del volumen del cilindro que examinamos, es igual a n_0dxdS, de donde la fuerza que actúa de parte del campo sobre todos estos electrones, será

$$dF=En_0\,dxdS,$$

donde E es la intensidad del campo y e la carga de un electrón. Según la fórmula (2a) del § 131, la intensidad del campo E, es igual, numéricamente, a

$$|E|=\frac{dV}{dx},\ \text{de donde}\ |dF|=en_0\frac{dV}{dx}\,dx\,dS,$$

y, por consiguiente, las condiciones de equilibrio dinámico que se reducen a que $|dF|=dpdS$, nos conducen a la igualdad:

$$en_0dV=dp,$$

o, si utilizamos la fórmula (4),

$$en_0dV=kTdn_0.$$

www.elsolucionario.org

Esta última igualdad se puede escribir así:

$$dV = \frac{kT}{e}\frac{dn_0}{n_0}.$$

Para obtener la diferencia total de potencial V''_{AB}, hay que integrar esta igualdad en los límites comprendidos desde la zona que hay en la región del metal B, donde el número de electrones por unidad de volumen es igual a n_{0B}, hasta la zona de la región del metal A, donde el número de electrones por unidad de volumen es igual a n_{0A}. De esta manera tenemos que:

$$V''_{AB} = \int_{n_{0B}}^{n_{0A}} \frac{kT}{e}\cdot\frac{dn_0}{n_0} = \frac{kT}{e}\ln\frac{n_{0A}}{n_{0B}},$$

lo cual coincide con la fórmula (3) del § 168.

Como se ha indicado, la diferencia de potencial V''_{AB} es pequeña. Esto es debido a que el número de electrones libres por unidad de volumen, se diferencia muy poco de unos metales a otros; por lo menos se puede suponer que n_{0A}/n_{0B} no es mayor de 3. Esto nos da que el $\ln\frac{n_{0A}}{n_{0B}} \cong 1$ y, por consiguiente, para $T = 300°$ K, tenemos que

$$V''_{AB} \cong \frac{kT}{e} = \frac{1{,}38\cdot10^{-16}\cdot300}{4{,}8\cdot10^{-10}} \text{ unid. } CGSE \cong 0{,}03V.$$

Este razonamiento clásico de la segunda parte de la diferencia de potencial de contacto, tiene más bien valor ilustrativo y, hablando rigurosamente, lo debe sustituir el razonamiento cuántico; no obstante, el aspecto físico del proceso se revela claramente en este razonamiento clásico, aunque los resultados cuantitativos no son exactos.

§ 169. Pilas. *Además* de los conductores de primera clase (metales, carbón), en los cuales no se producen ningunas variaciones químicas al pasar por ellos una corriente eléctrica, están los llamados *conductores de segunda clase*, en los cuales se producen variaciones químicas al ser atravesados por una corriente eléctrica. Son conductores de segunda clase las soluciones de sales, ácidos y bases. En los metales, como hemos visto, la corriente eléctrica consiste en un desplazamiento de electrones libres. En los conductores de segunda clase, los portadores de cargas son iones. Las moléculas de las sales, al disolverse las sales, se disocian en iones, es decir, en partes con cargas de signos contrarios. Por ejemplo, al disolver sal común en agua, las moléculas de NaCl se disocian en iones positivos Na^+ y iones negativos Cl^-. El desplazamiento de estos iones bajo la influencia del campo eléctrico exterior, crea una corriente en el conductor de segunda clase. El proceso de disociación de las moléculas de una solución en iones, que se denomina *disociación electrolítica*, y el paso de corriente a través de los conductores de segunda clase,

los examinaremos detenidamente en los párrafos dedicados a la electrólisis. Ahora examinaremos la función que desempeñan los conductores de segunda clase en la creación de la f.e.m.

Como hemos visto, al construir un circuito cerrado de conductores de primera clase, no se produce ninguna f.e.m. Si construimos un circuito cerrado de conductores de primera y de segunda clase, se crea una f. e.m. $\mathcal{E}$ diferente de cero. Esta combinación de conductores de primera y de segunda clase forma una pila.

En la zona límite entre el metal (conductor de primera clase) y la solución (conductor de segunda clase) se produce un salto de potencial, cuyo continuo restablecimiento se efectúa a costa del trabajo de las fuerzas químicas.

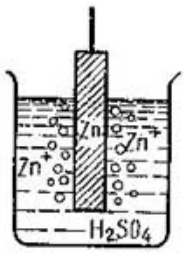


Fig. 127. Paso de los iones de zinc a la solución de ácido sulfúrico.

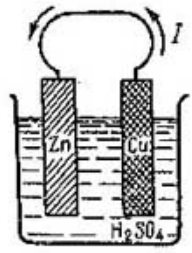


Fig. 128. Pila de una lámina de zinc y otra de cobre sumergidas en una solución de ácido sulfúrico.

Veamos, por ejemplo, una lámina de zinc introducida en una solución acuosa de ácido sulfúrico (fig. 127). El zinc empieza a disolverse; pero los átomos de zinc pasarán a la solución en forma de iones positivos Zn^+, y no átomos neutros. Debido a ello, la solución resultará positivamente cargada, y la lámina de zinc, negativamente. En la zona límite entre el zinc y la solución de H_2SO_4 se forma una doble capa eléctrica, donde se crea un campo eléctrico y parte de los iones de zinc empieza a volver a la lámina de zinc. Con ello se establece el equilibrio dinámico.

A una diferencia de potencial completamente determinada entre la solución y el metal (en el caso del zinc puro, es aproximadamente de $+0{,}51$ V), las fuerzas eléctricas equilibran a las químicas y cesa la disolución del zinc.

Pero si en la solución de H_2SO_4 se introduce otra lámina de otro metal y se conecta con la primera mediante un hilo conductor, surge una corriente, ya que junto a la segunda lámina se producirá un proceso análogo de paso de iones a la solución: pero la segunda lámina adquirirá otro potencial, diferente del de la primera (fig. 128).

El trabajo de las fuerzas químicas restablecerá continuamente los saltos de potencial junto a las dos láminas. Estos diferentes saltos de potencial mantenidos constantemente por el trabajo de las fuerzas químicas, crean la f.e.m. de la pila.

La combinación del par metal—solución puede ser tal, que los iones positivos de la solución pasen al metal; en este caso el metal se carga positivamente, y la solución, negativamente.

Veamos desde este punto de vista el funcionamiento de la pila Daniell. La pila Daniell, esquemáticamente representada en la fig 104, consta, como ya se ha indicado, de una lámina de zinc sumergida en una solución de sulfato de zinc ($ZnSO_4$), y de una lámina de cobre sumergida en una solución de sulfato cúprico ($CuSO_4$); las soluciones están separadas por una membrana porosa A. La lámina de zinc se carga negativamente debido a que desprende iones positivos Zn^+ que pasan a la solución, y en la zona límite del zinc con la solución se crea un salto de potencial de $+0{,}51$ V. La lámina de cobre se carga positivamente debido a los iones positivos Cu^+ de la solución que se le adhieren. En esta solución las moléculas de $CuSO_4$ se disocian en iones negativos SO_4^- y positivos Cu^+. En la zona límite de la solución con el cobre se crea un salto de potencial de $+0{,}60$ V.

Por último, al recorrer todo el contorno cerrado, hay que tener en cuenta la diferencia de potencial de contacto entre el cobre y el zinc (que es igual a $+0{,}006$ V) y la diferencia de potencial en el lugar de contacto de las dos soluciones. Esta última diferencia de potencial depende de la concentración de las soluciones y es de unas milésimas de voltio

Así tenemos que la f. e. m. de la pila Daniell se compone fundamentalmente de dos saltos de potencial que se crean en las zonas límites de contacto de las láminas con las respectivas soluciones. Como estos saltos de potencial son iguales a $+0{,}5$ V y $+0{,}6$ V, la f. e. m. de la pila Daniell será $\mathscr{E}=1{,}1$ V. Esta f. e. m. se puede calcular por el calor de las reacciones químicas que se producen en la pila.

Las mediciones termoquímicas nos dan que el proceso de transformación del zinc en vitriolo blanco $ZnSO_4$ (que es lo que ocurre al fin y al cabo en la pila) viene acompañado de un desprendimiento de energía de $1{,}06 \cdot 10^5$ cal/mol.

El desprendimiento de cobre de la solución de vitriolo azul se produce absorbiendo $0{,}56 \cdot 10^5$ cal/mol.

Así tenemos que por cada mol de sustancia que reacciona en la pila, se desprende una energía de

$$U=(1{,}06-0{,}56)\ 10^5 \text{ cal/mol}=5{,}0 \cdot 10^4 \text{ cal/mol} \cong 2 \cdot 10^{12} \text{ erg/mol}.$$

Esta energía se invierte en mantener el trabajo de la corriente $A=Q\mathscr{E}$, donde $\mathscr{E}$ es la f. e. m. de la pila, y Q, la cantidad de electricidad transportada. De aquí que

$$Q\mathscr{E}=U \quad \text{ó} \quad \mathscr{E}=\frac{U}{Q}. \tag{1}$$

La cantidad de electricidad Q transportada es fácil de calcular. Cada ion positivo de zinc de la solución, como veremos más adelante, lleva una carga positiva doble, es decir, una carga numéricamente igual a dos veces la carga del electrón $+2e$. De esto se deduce que al disolver un mol de zinc, del electrodo a la solución se transporta una cantidad de electricidad $Q=2eN$, donde N es el número de Avogadro; entonces, según la (1), tenemos que

$$\mathscr{E}=\frac{U}{Q}=\frac{U}{2eN}.$$

www.elsolucionario.org

Colocando en lugar de U, e y N sus valores numéricos, hallamos que

$$\mathcal{E} = \frac{2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 6 \cdot 10^{23}} \text{ unid. } CGSE \cong 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ unid. } CGSE,$$

o, traduciéndolo a voltios:

$$\mathcal{E} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 300\, V = 1{,}05\, V,$$

lo cual se aproxima al valor de la f.e.m. de la pila Daniell indicado arriba.

En la mayoría de las otras pilas, los procesos químicos tienen un carácter más complicado, y el cálculo de la f.e.m. no se puede realizar tan fácilmente.

§ 170. Fenómenos termoeléctricos. En el § 168 se ha indicado que en un circuito cerrado compuesto de conductores de primera clase, no se crea ninguna f.e.m. Pero esto tiene lugar mientras la temperatura de los contactos entre los distintos conductores sea la misma. Si la temperatura de los contactos es diferente, en el circuito se crea una f.e.m. que ya no es igual a cero (*fuerza termoelectromotriz*). Si se construye un circuito cerrado de dos metales soldados y calentamos una de las soldaduras dejando la otra fría, en el circuito se crea una corriente.

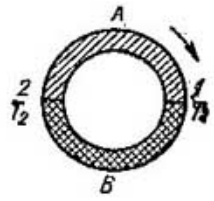


Fig. 129. En el circuito cerrado de dos metales aparece una f. e. m., si la temperatura de los contactos T_1 y T_2 es diferente.

Este efecto se denomina *efecto Seebeck* (*efecto o fenómeno termoeléctrico*).

El surgimiento de la fuerza termoelectromotriz es fácil de explicar basándose en lo dicho en el § 168. Hemos visto que la diferencia de potencial de contacto es debida a dos causas: a la diferencia de los trabajos de salida y a la diferencia del número de electrones libres por unidad de volumen en los distintos metales. Si tenemos en cuenta estas dos causas, la diferencia de potencial de contacto entre los metales A y B, según las fórmulas (2) y (3) del § 168, será:

$$V_{AB} = V_B - V_A + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}. \qquad (1)$$

Supongamos ahora que en un circuito cerrado compuesto de dos metales A y B (fig. 129), el contacto 1 se mantiene a la temperatura T_1, y el contacto 2, a la temperatura T_2. Los trabajos de salida V_A y V_B y los números de electrones libres n_{0A} y n_{0B} los consideraremos que no dependen de la temperatura. La f.e.m. total $\mathcal{E}$ es igual a la suma de todos los saltos de potencial que encontremos al recorrer el circuito cerrado en una dirección determinada (por ejemplo, en la dirección indicada por la flecha en la fig. 129). Entonces, según la (1):

$$\mathcal{E} = V_{AB} + V_{BA} = V_B - V_A + \frac{kT_1}{e} \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}} + V_A - V_B + \frac{kT_2}{e} \ln \frac{n_{0B}}{n_{0A}},$$

de donde

$$\mathscr{E} = \frac{k}{e}(T_1 - T_2) \ln \frac{n_{0A}}{n_{0B}}. \qquad (2)$$

La fórmula (2) demuestra que a diferentes temperaturas de las soldaduras surge una fuerza termoelectromotriz $\mathscr{E}$ directamente proporcional a la diferencia de temperaturas de las soldaduras $T_1 - T_2$. La fórmula (2) no tiene en cuenta la posible dependencia entre la concentración de electrones n_{0A} y n_{0B} y la temperatura.

La magnitud de la fuerza termoelectromotriz, según la teoría, es de varias cienmilésimas de voltio por grado. Por ejemplo, en el caso de un circuito compuesto de constantán y hierro, a una diferencia de temperaturas de las soldaduras de 1° C surge una f.e.m. de $5{,}2 \cdot 10^{-5}$ V. Esta f.e.m. aumenta, con bastante exactitud, directamente proporcional a la diferencia de temperaturas de las soldaduras. No obstante se observan casos cuando la dependencia de la fuerza termoelectromotriz respecto a la diferencia de temperaturas es de carácter más complicado. Por ejemplo, el par zinc—plata, en el intervalo de diferencia de temperaturas comprendido entre 0° y 100° C nos da +0,5 μV/grado, y en el intervalo de diferencia de temperaturas comprendido entre 300 y 400° C, nos da +4,6 μV/grado. Puede ocurrir también un cambio de signo de la f.e.m.: en el par tungsteno—molibdeno, a pequeñas diferencias de temperaturas, la corriente fluye a través de la soldadura caliente del molibdeno al tungsteno, y a grandes diferencias de temperaturas, fluye del tungsteno al molibdeno. Este carácter de dependencia de la fuerza termoelectromotriz respecto a la diferencia de temperaturas se explica, en parte, porque con la temperatura varía la relación del número de electrones por unidad de volumen. No obstante, una teoría completa de los fenómenos termoeléctricos se puede dar solamente basándose en la mecánica cuántica.

Los fenómenos termoeléctricos, en la actualidad se utilizan ampliamente, tanto para medir elevadas temperaturas, como para revelar pequeñas variaciones de la misma. Para medir elevadas temperaturas se utilizan los llamados *pares termoeléctricos* (*termopares*) o elementos termoeléctricos, que son dos alambres de determinados metales de fuerza termoelectromotriz conocida de antemano. Los alambres se sueldan en los lugares de contacto. Un contacto (el *b* en la fig. 130), se coloca en un medio de temperatura determinada T_0, por ejemplo, en un recipiente con hielo en fusión, el otro (el *a* en la fig. 130), allí donde se quiera medir la temperatura T. La f.e.m. que surge en el circuito, se mide con el voltímetro V. Según la f.e.m. medida, se determina la diferencia de temperaturas $T - T_0$. Como la temperatura T_0 es conocida, la diferencia nos dará directamente el valor de T. En los pares termoeléctricos construidos de

determinados metales, el voltímetro V se calibra directamente en grados. Para medir temperaturas no muy elevadas, se utilizan pares termoeléctricos formados de constantán y cobre, y de constantán y hierro; para medir temperaturas elevadas en los hornos de los laboratorios y de las fábricas (hasta temperaturas de 1 700° C), se utilizan pares termoeléctricos en los cuales un conductor es de platino puro, y el otro, de una aleación de platino con 10% de rodio.

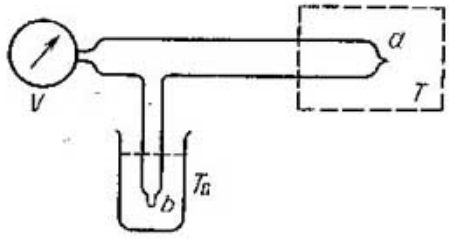


Fig. 130. Esquema de medición de la temperatura con ayuda de un par termoeléctrico.

En la tabla V se dan las fuerzas termoelectromotrices que surgen en los tres pares termoeléctricos dados a distintas diferencias de temperaturas de los contactos.

El efecto Seebeck se puede utilizar también para acusar pequeñas variaciones de temperatura, por ejemplo, para acusar la variación de temperatura producida por la absorción de un flujo luminoso. Este

Tabla V

Fuerzas termoelectromotrices siendo de 0° C la temperatura de la soldadura fría

$T - T_0$ en °C	Fuerza termoelectromotriz (en mV)		
	Pt — Pt + +10% Rh	constantán—hierro	constantán—cobre
1	0,00	0,00	0,00
100	0,64	5,2	4,3
200	1,42	10,5	9,3
300	2,29	15,8	14,9
500	4,17	26,6	—
800	7,31	43,4	—
1 000	9,56	—	—
1 500	15,45	—	—
1 700	17,81	—	—

www.elsolucionario.org

efecto se puede reforzar utilizando varios pares termoeléctricos conectados en serie, calentando, por ejemplo, todas las soldaduras pares y enfriando las impares. Esta clase de agrupación de pares termoeléctricos se llama *pila termoeléctrica* o *termo-pila*. La pila termoeléctrica representada en la fig. 131, consta de una serie de cintas muy finas de hoja de constantán y de manganina (de unos 0,005 mm de espesor). Las soldaduras del medio, ennegrecidas, se someten a la acción de la irradiación, las laterales se engastan en una pieza maciza de cobre, con lo cual la temperatura permanece constante. En una pila termoeléctrica de éstas, la f.e.m. de un microvoltio corresponde a 20 erg/seg de potencia de radiación absorbida. Un mayor aumento de sensibilidad y constancia de las indicaciones se puede conseguir utilizando *termoelementos al vacío*, que están formados de un par termoeléctrico de finas hojas de constantán y manganina fijas entre dos barras macizas de cobre A y B (fig. 132) en el interior de un recipiente en que se ha hecho el vacío. Al colocar el par termoeléctrico en el vacío, disminuye la pérdida de calor, lo cual acarrea un mayor calentamiento de la soldadura siendo la misma la absorción de rayos irradiados, con lo cual la sensibilidad del par termoeléctrico aumenta hasta 100 veces. En los mejores modelos de estos instrumentos, la f.e.m. de un microvoltio corresponde a una potencia de radiación de 0,5 erg/seg.

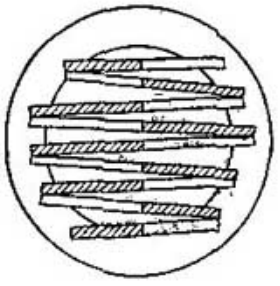


Fig. 131. Pila termoeléctrica o termopila.

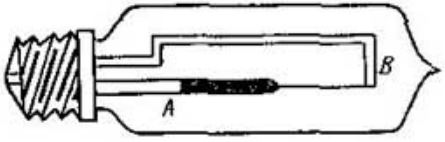


Fig. 132. Termoelemento al vacío.

Un gran número de pares termoeléctricos conectados puede formar una batería capaz de crear una diferencia de potencial de varios voltios y corrientes de varios amperios de intensidad. Sin embargo, el rendimiento de una *batería termoeléctrica* de esta clase no es elevado. La batería termoeléctrica, al suministrar corriente eléctrica a costa del calor absorbido, debe satisfacer el segundo principio de termodinámica. Por consiguiente, su rendimiento η' no puede ser superior al rendimiento η de la máquina térmica ideal:

$$\eta = \frac{T - T_0}{T},$$

donde T es la temperatura de la soldadura caliente, y T_0, la de la soldadura fría.

De esta manera, para que la acción de la batería termoeléctrica sea rentable, hay que calentar mucho unas soldaduras, dejando las otras frías. Pero con ello son inevitables grandes pérdidas y prácticamente, los valores del rendimiento η que se logran, son muy inferiores a los teóricos.

En cierto sentido, el fenómeno termoeléctrico inverso es el *efecto Peltier*. Consiste en que al pasar una corriente por la soldadura de dos metales diferentes, en la soldadura se desprende o absorbe una cantidad complementaria de calor, además del calor correspondiente según la ley de Joule-Lenz. Si en determinada

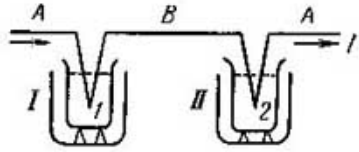


Fig. 133. Esquema del experimento para observar el efecto Peltier.

dirección de la corriente se desprende calor en la soldadura, en el sentido contrario de la corriente se absorberá calor en la misma soldadura. Para observar este fenómeno se puede utilizar el siguiente esquema: en dos calorímetros se introducen las soldaduras *1* y *2* de tres conductores conectados en serie: conductor *A*, conductor *B* y de nuevo el conductor *A* (fig. 133). Al fluir la corriente en el sentido que indica la flecha, en la soldadura *1* la corriente fluye del metal *A* al *B*, y en la soldadura *2*, del *B* al *A*. En este caso, si en la soldadura *1* se desprende calor, en la *2* se absorbe. Si en ambos calorímetros *I* y *II* se introducen partes iguales del circuito, los calores Q desprendidos por el efecto de Joule-Lenz, serán del mismo signo, mientras que los desarrollados según el efecto de Peltier q tendrán diferente signo.

Así, en el calorímetro *I*, en determinado tiempo, se desprende cierta cantidad de calor

$$Q_1 = Q + q,$$

en el calorímetro *II*, en el mismo tiempo, se desprende

$$Q_2 = Q - q.$$

De donde

$$Q_1 - Q_2 = 2q \text{ ó } q = \frac{Q_1 - Q_2}{2},$$

es decir, las mediciones de los calorímetros permiten hallar directamente el calor q. Este calor q es proporcional a la intensidad de la corriente que pasa por la soldadura y al tiempo que fluye la corriente.

El efecto Peltier se explica por haber una diferencia de potencial de contacto. Si el campo eléctrico creado en la soldadura por la diferencia de potencial de contacto, acelera los electrones, en la soldadura se desprende una cantidad de calor complementario; si el campo eléctrico frena a los electrones, se absorbe calor.

Existe otro fenómeno termoeléctrico más, enunciado por Thomson basándose en sus cálculos teóricos, que consiste en que en un *conductor homogéneo*, si en él hay diferencia de temperaturas, debe crearse una f.e.m. Como resultado de esta f.e.m. se observa un efecto análogo al de Peltier: al fluir una corriente por un conductor de éstos calentado irregularmente, en el conductor se desprende o se absorbe una cantidad de calor complementaria, además de la cantidad de calor debida a la ley de Joule — Lenz. En la porción del conductor donde la corriente de electrones coincide con la dirección del flujo térmico, se desprende una cantidad complementaria de calor. En la porción del conductor donde el sentido de la corriente de electrones es contrario al del flujo térmico, se absorbe calor.

El efecto Thomson se puede observar de la siguiente manera: dos barras iguales, AB y CD, se unen con un conductor como se indica en la fig. 134. Los extremos A y C se mantienen a una temperatura T_1 mayor que la temperatura

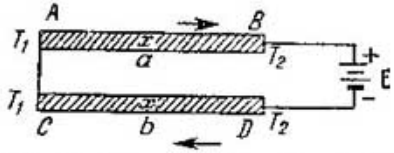


Fig. 134. Método de revelación del efecto Thomson.

T_2 a que se mantienen los extremos B y D. Si se conectan las barras al circuito de una batería E, como se indica en la fig. 134, la corriente de electrones, cuyo sentido indican las flechas, fluirá en la barra AB en el sentido de disminución de la temperatura, y en la barra CD, en el de aumento de la temperatura. Antes de conectar la corriente eléctrica, los puntos simétricos a y b de las barras tienen la misma temperatura. Después de conectar la corriente, debido al efecto Thomson, el punto a se calentará más que el b, ya que en la barra AB la corriente electrónica coincide, según el sentido, con el flujo térmico, mientras que en la barra CD, son de sentido opuesto.

Hay que observar que todas las explicaciones aducidas de los fenómenos termoeléctricos basadas en el concepto del "gas" de electrones que toman parte en el movimiento térmico, tienen carácter cualitativo solamente. En lo que respecta a la cantidad, los resultados de la teoría no concuerdan bien con los datos que nos dan los experimentos. La causa de estas divergencias está en que los conceptos clásicos no sirven para explicar el comportamiento de los electrones en los metales. Un concepto justo de ello se saca solamente basándose en la mecánica cuántica (véase el § 163).

§ 171. Semiconductores. Los fenómenos analizados se refieren a los metales conductores, cuya conductibilidad eléctrica se debe a la existencia de electrones libres. En la actualidad, en la física tienen gran importancia los semiconductores. Como se ha dicho más arriba (véase el § 154), los semiconductores se distinguen de los metales por su pequeña conductibilidad eléctrica que, a diferencia de la conductibilidad eléctrica de los conductores, aumenta con la temperatura según la ley

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{b}{T}},$$

www.elsolucionario.org

donde T es la temperatura absoluta, y b una constante diferente para cada semiconductor.

Como regla general, la conductibilidad eléctrica de los semiconductores aumenta rápidamente con la temperatura, disminuyendo respectivamente la resistividad ρ. Así, por ejemplo, en el silicio (Si) puro, que es un típico semiconductor, a la temperatura de 20° C la resistividad es $\rho = 6 \cdot 10^4$ $\Omega \cdot$cm, y a la temperatura de 700° C, es de $\rho \approx 0{,}1$ $\Omega \cdot$cm, es decir, de unas centenas de millares menor.

A temperaturas muy bajas, los semiconductores se convierten en aisladores.

El aumento de la conductibilidad con la temperatura es debido a que el movimiento térmico crea, en los semiconductores, a los portadores de la corriente. El aumento de la conductibilidad eléctrica de los semiconductores puede ser también debido a la iluminación o a otras acciones relacionadas con la transmisión de energía. La importancia particular de los semiconductores es debida a una serie de propiedades de los mismos. Resulta que en un circuito compuesto de dos semiconductores, se puede obtener una fuerza termoeléctromotriz mucho mayor que en el par termoeléctrico de dos conductores. Designando la temperatura de los dos contactos por T_1 y T_2 respectivamente, obtenemos, en un circuito de dos semiconductores, una f.e.m. que es proporcional a la diferencia de las temperaturas de los contactos:

$$\mathcal{E} = \alpha (T_1 - T_2),$$

donde α alcanza valores del orden de $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ V/grado, mientras que en los metales esta magnitud es del orden de 10^{-5} V/grado.

Unas condiciones especiales se crean en los lugares de contacto de dos semiconductores o de un semiconductor con un metal. La resistencia en el lugar de contacto puede depender en alto grado de la dirección de la corriente: en una dirección de la corriente, la resistencia es pequeña, mientras que en otra dirección, es grande. Esta circunstancia se utiliza en los llamados *rectificadores secos* (véase el § 237).

Bajo la acción de una radiación luminosa, como se ha dicho, la conductibilidad de los semiconductores también aumenta. Esto se utiliza para medir el flujo luminoso (véase el t. III).

Las propiedades de los semiconductores solamente se pueden explicar basándose en la teoría cuántica de los sólidos. En el § 163 se ha dicho que en los conductores metálicos, los electrones se distribuyen según numerosos niveles energéticos muy próximos unos de otros. Cada nivel energético contiene dos electrones. En el conductor, los electrones ocupan los niveles inferiores, mientras que los superiores están libres. Esto significa que influidos por un campo eléctrico exterior, los electrones pueden pasar a los

niveles libres más elevados, es decir, variar su energía total y, en particular, la cinética. En otras palabras, los electrones, bajo la acción de un campo exterior, pueden variar la velocidad. Como los niveles energéticos se hallan muy cerca uno de otro, la variacion de energía

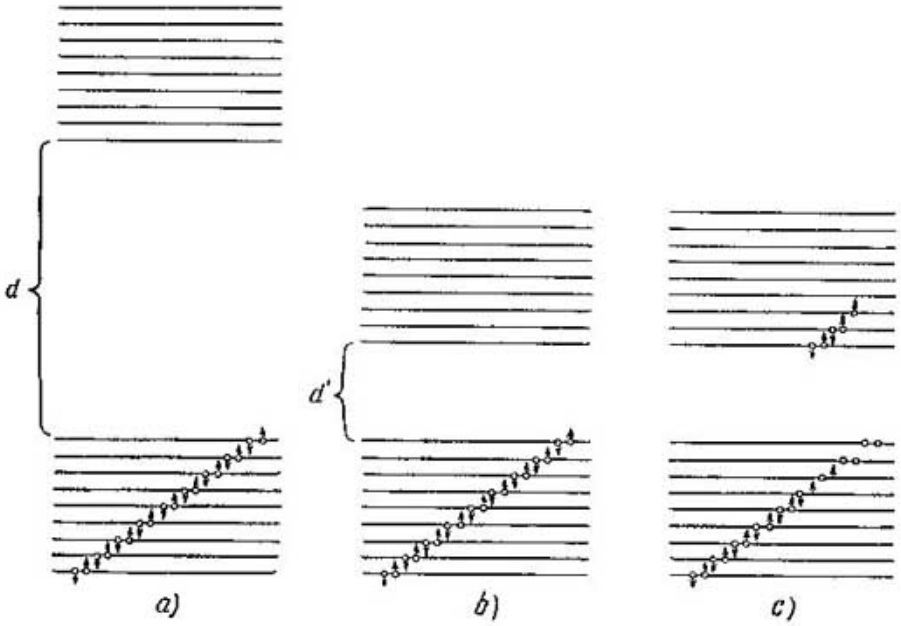


Fig. 135. Bandas permitidas de energía de los electrones en el cristal: *a*) dieléctrico, *b*) semiconductor y *c*) semiconductor con «huecos».

prácticamente se efectúa sin interrupción, lo cual explica el que la teoría electrónica clásica pudiese interpretar satisfactoriamente considerable número de hechos relacionados con la conductibilidad eléctrica de los metales.

Un estudio más profundo de los cuerpos cristalinos nos demuestra que en los cristales se forman grupos o, como se ha establecido denominar, bandas permitidas de energía separadas entre sí por amplias regiones denominadas bandas prohibidas de energía.

La diferente disposición relativa de las bandas permitidas de energía explica la diferencia de las propiedades de los dieléctricos, conductores y semiconductores. Sean dos bandas de energía, en un cristal, separadas por una amplia región, y el número de subniveles de la banda inferior es igual exactamente a la mitad del número de electrones libres. En este caso, toda la banda inferior estará llena de electrones, mientras que en la superior no hay electrones. Este caso viene representado en la fig. 135,*a*, donde los electrones son los

puntos con flechas. Un campo eléctrico exterior (si no es muy intenso) no puede desplazar los electrones de la banda inferior a la superior, ya que las bandas están separadas por una región bastante amplia. Por eso, un campo exterior no puede, en general, variar el estado de movimiento de los electrones, es decir, comunicarles una velocidad complementaria. En un cristal de éstos, no surge corriente eléctrica al ponerse bajo la acción de un campo exterior: este cristal se denomina dieléctrico (aislador). Si la banda inferior no está toda llena de electrones, incluso un débil campo exterior puede desplazar electrones a los próximos niveles energéticos libres, es decir, comunicarles cierto movimiento. Un cristal de esta clase (metal) será conductor.

De lo dicho se ve que las teorías cuántica y clásica explican de distinta manera la diferencia entre dieléctricos y metales. Desde el punto de vista clásico, todos los electrones del dieléctrico se mantienen fijamente alrededor de sus átomos, mientras que en los metales hay electrones libres cuyo movimiento de traslación bajo la influencia de un campo exterior, crea la corriente eléctrica. Desde el punto de vista cuántico, tanto en los dieléctricos como en los metales hay electrones "libres", es decir, no vinculados a determinados átomos *). Los dieléctricos y los metales se diferencian en la disposición relativa de las bandas de energía permitidas y en el grado en que están llenas.

La teoría de las bandas no sólo vence las dificultades con que tropezaba la teoría clásica en su intento de explicar la conductibilidad de los metales, sino que explica las propiedades de los semiconductores. El semiconductor se caracteriza por que, lo mismo que en el dieléctrico, la banda inferior está toda llena de electrones (fig. 135,*b*), pero la distancia d' entre las bandas no es grande. A temperaturas bastante elevadas, parte de los electrones de la banda inferior pasa a la superior (los lugares liberados de esta banda, "huecos", "agujeros", vienen indicados con circulitos, véase la fig. 135,*c*). Como en la banda superior quedan aún muchos lugares vacantes, los electrones pueden cambiar el estado de su movimiento, es decir, adquirir velocidad influidos por un campo exterior y, por consiguiente, crear la conductibilidad. Por esto, la banda superior de los niveles energéticos del semiconductor se denomina *banda de conducción*. El número de electrones n' que pasa a la banda de conducción es

$$n' = ae^{-\frac{b}{2kT}},$$

*) Sin embargo, hay diferencia entre los electrones "libres" en el cristal y los electrones verdaderamente libres sobre los cuales no actúa ninguna fuerza. La teoría demuestra que esta diferencia se reduce a que el electrón del cristal, al parecer, posee una masa diferente de la del electrón verdaderamente libre. Y se denomina masa "efectiva".

www.elsolucionario.org

donde a y b son constantes. En correspondencia con ello, la dependencia de la conductibilidad eléctrica respecto a la temperatura será:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{b}{2kT}}.$$

La conductibilidad eléctrica de los semiconductores tiene otra particularidad. El paso de electrones de la banda inferior llena a la superior, deja en la inferior puestos libres, "huecos". Esto permite a los electrones de la banda inferior tomar parte también en el proceso de conductibilidad eléctrica. Al desplazarse los electrones solicitados por un campo exterior, el "hueco" se desplazará en dirección contraria a la de los electrones. Está claro que el desplazamiento de esta clase de "huecos" equivale al desplazamiento de una carga positiva.

El esquema estudiado de las bandas de energía corresponde a sustancias muy puras. Si hay impurezas, pueden surgir niveles complementarios de energía de carácter local. Los electrones que se hallan en estos niveles, no toman parte en la conductibilidad eléctrica, pero al aceptar o al donar electrones de estos niveles a otras bandas conduce al surgimiento de electrones de conducción, o de "huecos". La impureza que origina electrones de conducción se denomina *donadora* (*dadora*) (por ejemplo, arsénico en un cristal de silicio), y la impureza que origina "huecos", se denomina *aceptadora* (*aceptora*) (por ejemplo, boro en un cristal de silicio). Los portadores electrizados (portadores de carga) que en el semiconductor dado están en mayoría, se denominan *portadores mayoritarios*, y los que están en minoría, *portadores minoritarios*. Si los portadores mayoritarios son los electrones, los semiconductores se denominan *semiconductores por exceso* o *semiconductores tipo n*, y si los portadores mayoritarios son los "huecos", se denominan *semiconductores por defecto o semiconductores tipo p*. Si el número de electrones y de "huecos" es del mismo orden, el semiconductor se denomina mixto (y la conductibilidad eléctrica, mixta).

La cuestión de si el mecanismo de la conductibilidad del semiconductor es por exceso (por electrones) o por defecto (por huecos), se puede resolver según el signo que nos dé el efecto Hall (véase el § 217).

Hay que tener en cuenta que cuando la conductibilidad eléctrica del semiconductor es debida al desplazamiento de "huecos", en realidad lo que pasa es que se mueven los electrones. El caso es que cuando los electrones llenan casi por completo la banda, su movimiento en una dirección equivale al desplazamiento de los lugares vacíos, "huecos", en sentido contrario. No obstante, el resultado del movimiento de los electrones en una banda con muchos lugares vacantes, y en una banda con casi todos los lugares ocupados, a veces

resulta distinto y en estos dos casos, como se ha indicado, el efecto Hall tiene diferente signo. Por eso se debe distinguir la conductibilidad por exceso y la conductibilidad por defecto. La existencia de estas dos clases de conductibilidad explica el surgimiento de la "capa de barrera" "capa de detención") en la zona fronteriza de dos semiconductores, lo cual conduce a la rectificación en el lugar de contacto de dos semiconductores o de un semiconductor y un metal.

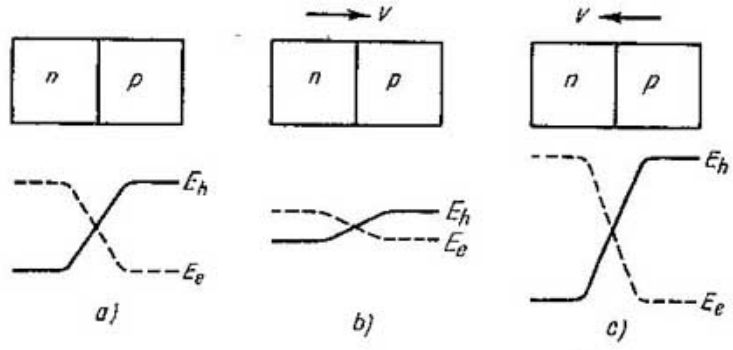


Fig. 136. Variación de la energía potencial en la superficie límite de los semiconductores por exceso (tipo *n*) y por defecto (tipo *p*) cuando hay un campo exterior.

La energía potencial de los dos portadores electrizados (electrones y "huecos") es distinta en los semiconductores en contacto, de resultas de lo cual en la zona fronteriza se crea un salto de potencial (véase la fig. 136). Los electrones y los "huecos" se difunden a través de la línea divisoria de ambos semiconductores (compárese con lo dicho en el § 168 sobre la difusión de electrones a través de la línea divisoria de dos metales en contacto).

Si no hay ningún campo eléctrico exterior (fig. 136,*a*), el número de cargas transportadas en ambos sentidos es el mismo y la corriente total es igual a cero. Si hay un campo exterior, la energía de los electrones de los dos semiconductores varía. Si el aumento de potencial va del semiconductor tipo *n* al semiconductor tipo *p*, la energía de los electrones del semiconductor tipo *n* aumenta, y la del tipo *p* disminuye. Con ello disminuye la magnitud del salto de potencial en la zona fronteriza de los dos semiconductores (fig. 136,*b*), los electrones pueden pasar fácilmente de un semiconductor a otro, y a través del contacto fluye una corriente cuya intensidad aumenta rápidamente con el aumento de la diferencia de potencial. Y viceversa, si el aumento de potencial va del semiconductor tipo *p* al semiconductor tipo *n*, el salto de potencial en la zona fronteriza

de los dos semiconductores aumenta (fig. 136,*c*) y se crea una capa de barrera. Ahora los electrones, si es que la diferencia de potencial no es muy elevada, no pueden pasar a través del contacto, y la intensidad de la corriente que pasa de un semiconductor a otro es muy pequeña.

Está claro que para los portadores minoritarios, las condiciones de paso a través de la zona fronteriza de los semiconductores serán completamente opuestas a las de los portadores mayoritarios. No obstante, debido a la poqueña cantidad de portadores minoritarios, la corriente creada por ellos es muy pequeña y no desempeña ninguna función notable en el paso de la corriente total por el contacto.

Una capa de barrera análoga puede surgir en la superficie límite de un semiconductor con un metal.

En la Unión Soviética, A. Yoffe y sus asistentes han realizado un amplio estudio de las propiedades de los semiconductores. La explicación de la acción rectificadora en la zona fronteriza de dos semiconductores, la dieron al mismo tiempo e independientemente B. Davidov, Schottky y Mott.

§ 172. Emisión de electrones por conductores incandescentes. En los párrafos anteriores se ha demostrado que para arrancarle electrones a un metal hay que realizar un trabajo de salida $A = eV_A$. A la temperatura ordinaria, una parte insignificante de electrones del metal posee la suficiente energía cinética para realizar el trabajo de salida A y salirse del metal. Con la elevación de la temperatura, el número de electrones veloces aumenta y, gracias a ello, debe aumentar el número de electrones que salen del metal. Este proceso es análogo al de evaporación de moléculas de un líquido que se calienta. Si la temperatura es bastante elevada, se hace sensible la emisión de electrones del metal. Este fenómeno se denomina *emisión termoiónica* o *emisión termoelectrónica*.

Examinemos este fenómeno desde el punto de vista de la clásica teoría electrónica. Sea eV_A el trabajo de salida de un electrón de un metal dado. En este caso, el metal lo podrán abandonar solamente los electrones cuya energía cinética $\frac{1}{2} mv^2$ no sea menor que el trabajo de salida eV_A, es decir, no sea menor que una magnitud $mv_k^2/2$ que satisfaga la condición:

$$\frac{1}{2} mv_k^2 = eV_A. \qquad (1)$$

Para valorar la energía $mv_k^2/2$ comparémosla con la energía *media* del movimiento térmico de los átomos (o de las moléculas) que, según la teoría clásica, es igual a $\frac{3}{2} kT$, donde k es la constante de

www.elsolucionario.org

Boltzmann. Igualando esta energía con el trabajo de salida eV_A, hallaremos la temperatura T_k a que la energía media de la partícula es igual al trabajo de salida:

$$\frac{3}{2}kT_k = eV_A, \text{ de donde } T_k = \frac{2eV_A}{3k}. \quad (2)$$

Para los diferentes metales, el trabajo de salida oscila dentro de los límites desde 1 hasta 4,5 eV. Si $V_A = 2$V, es decir, $\frac{2}{300}$ unid. *CGSE* de potencial, obtenemos que:

$$T_k = \frac{2 \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 2}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300} \cong 15\,000^\circ \text{ K},$$

es decir, la energía de electrones necesaria para poder desprenderse del metal debe ser relativamente muy grande y corresponder a la energía *media* del movimiento térmico de los átomos a temperaturas de decenas de millares de grados. En realidad, los electrones empiezan a desprenderse en cantidades perceptibles a temperaturas de unos 1 000—3 000° K, es decir, a temperaturas mucho más bajas.

Esto se explica porque los electrones ocupan lugares determinados según la energía que poseen. Gracias a ello, una parte de electrones posee una energía notablemente *mayor que la media*. A costa de estos electrones empieza la emisión.

Si se aceleran los electrones emitidos por un metal incandescente con un campo eléctrico exterior, los electrones crean una corriente. Esta corriente electrónica (termoiónica) se puede obtener en el vacío, donde los choques con las moléculas o los átomos no impiden el movimiento de los electrones. Por la intensidad de la corriente electrónica se puede apreciar el número de electrones emitidos por el metal incandescente.

El fenómeno de emisión termoiónica es cómodo estudiarlo con ayuda de una *válvula (lámpara o tubo) de dos electrodos* (diodo), que es una ampolla donde se ha practicado un vacío elevado, con dos electrodos: el electrodo K es un filamento (fig. 137) y el electrodo A es un disco o una placa. El electrodo K se denomina *cátodo* y se une al polo negativo de una batería B, y el electrodo A, denominado *ánodo*, se une al polo positivo de la misma batería. El cátodo K se puede calentar con ayuda de una batería complementaria B'. El campo electrostático que se crea entre el cátodo K y el ánodo A, acelera los electrones que salen despedidos del cátodo K al calentarlo, con lo cual, el flujo de electrones que pasan a través del vacío entre K y A, cierra el circuito $KAGBK$. La intensidad de la corriente creada en el circuito la mide el instrumento G. El voltímetro V permite medir la diferencia de potencial entre el cátodo K y el ánodo A. La experiencia enseña que la intensidad de la corriente que pasa por la

válvula (llamada *corriente anódica o de placa*), depende de la temperatura del cátodo y de la diferencia de potencial V_1-V_2 entre el cátodo y el ánodo. A una temperatura constante del cátodo, la intensidad de la corriente anódica I_A aumenta con el aumento de la diferencia de potencial V_1-V_2 entre los electrodos. Sin embargo, la dependencia que hay entre la intensidad de la corriente I_A y la diferencia de potencial V_1-V_2 no viene expresada por una ley análoga a la de Ohm, según la cual I es proporcional a la diferencia

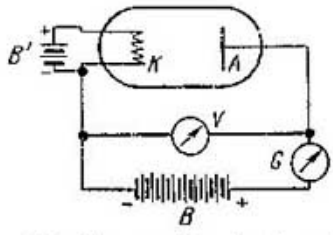


Fig. 137. Observación de la emisión termoelectrónica con ayuda de un tubo catódico.

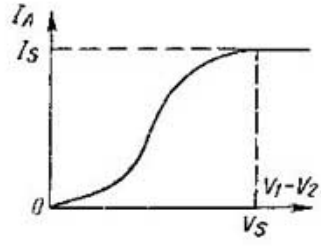


Fig. 138. Dependencia entre la corriente anódica I_a y la diferencia de potencial V_1-V_2 entre el cátodo y el ánodo.

de potencial; esta dependencia es de carácter más complejo y gráficamente viene representada en la fig. 138. Al principio, la intensidad de la corriente aumenta poco con el aumento de la diferencia de potencial V_1-V_2, después, este aumento es mayor, y por último, otra vez es pequeño. A partir de determinado valor de $V_1-V_2=V_s$ deja de aumentar la intensidad de la corriente, es decir, la corriente alcanza su valor máximo, *corriente de saturación*.

Cualitativamente, este carácter de dependencia de la corriente anódica respecto a la diferencia de potencial V_1-V_2 se explica de la siguiente manera. Si $V_1-V_2=0$, la intensidad de la corriente, a una distancia bastante grande de los electrodos, tambien es igual a cero *). Esto es debido a que los electrones desprendidos del cátodo forman cerca de éste una nube de electrones (carga de espacio) que crea un campo que frenará los electrones que sigan desprendiéndose, con lo cual cesará la emisión de los mismos, y la misma cantidad de electrones que se desprendan del metal, retornará al mismo repelida por el campo de la carga del espacio, que es de acción inversa. Si entre los electrodos se crea un campo que acelere los electrones, la carga del espacio se disipa y entre el cátodo y el ánodo se crea una corriente. La intensidad de esta corriente I_A aumenta con el aumento de la diferencia de potencial V_1-V_2. El cálculo teórico (véase el

*) Si los electrodos están cerca, incluso cuando $V_1-V_2=0$ fluirá una insignificante corriente.

§ 186) demuestra que la intensidad de la corriente I_A es proporcional a $(V_1-V_2)^{3/2}$;

$$I_A=\alpha(V_1-V_2)^{3/2}. \quad (3)$$

Esta fórmula se denomina fórmula de Boguslavski—Langmuir (ley de Child—Langmuir). Aquí α es un coeficiente que depende de la forma y disposición de los electrodos. Así tenemos que la intensidad de la corriente I_A aumenta con *más rapidez* que en razón directa de la diferencia de potencial V_1-V_2. No obstante, con el aumento ulterior de la diferencia de potencial V_1-V_2, el aumento de la intensidad de la corriente empieza a decrecer, ya que el número total de electrones emitidos por el cátodo K a la temperatura dada es limitado. Cuando la diferencia de potencial V_1-V_2 alcanza el valor de V_s, suficiente para absorber todos los electrones emitidos por el cátodo, cesa de crecer la corriente. La corriente obtenida en este caso se denomina *corriente de saturación*, I_s, a que corresponde la parte horizontal del gráfico de la fig. 138.

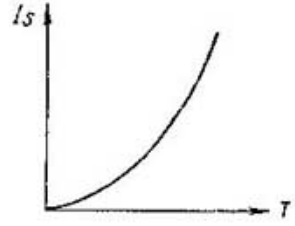


Fig. 139. Dependencia entre la corriente de saturación I_s y la temperatura T del cátodo.

Basándose en lo dicho se puede considerar que la intensidad de la corriente de saturación I_s numéricamente es igual a la carga de todos los electrones emitidos en la unidad de tiempo por el cátodo dado a la temperatura dada.

Por consiguiente, si llamamos n al número de electrones emitidos por el cátodo en la unidad de tiempo, tendremos

$$I_s=ne,$$

donde e es la carga del electrón. De aquí que

$$n=\frac{I_s}{e}. \quad (4)$$

Los experimentos enseñan que la intensidad de la corriente de saturación aumenta con gran rapidez al aumentar la temperatura del cátodo. El carácter de dependencia de la intensidad de la corriente de saturación en función de la temperatura del metal emisor viene representado gráficamente en la fig. 139.

Según la fórmula (4), la corriente de saturación I_s determina el número de electrones que se desprenden del metal incandescente. Si en lugar de la corriente total I_s se toma la densidad de la corriente i_s, es decir, la corriente por unidad de superficie del metal emisor, esta i_s determinará el número de electrones n emitidos por unidad de superficie del metal dado a la temperatura T.

www.elsolucionario.org

La teoría cuántica permite calcular el valor de la densidad de la corriente de saturación i_s. Estos cálculos (véase el escrito de cuerpo pequeño) nos dan:

$$i_s = BT^2 \cdot e^{-\frac{eV_A}{kT}}, \qquad (5)$$

donde T es la temperatura absoluta del metal, eV_A, el trabajo de salida, k, la constante de Boltzmann, y B, una constante que, en general, es distinta para diferentes metales.

Tabla VI

Constante de emisión B y trabajo de salida eV_A

Superficie emisora	B en A/cm² · grad²	eV_A en eV
Pt	32	5,3
W	60	4,5
Mo	55	4,2
Th	70	3,4
W + Cs	3,2	1,36
W + Ba	1,5	1,56
W + Th	3,0	2,63
Oxido bárico	1,18	1,84

La ecuación (5) señala la gran rapidez de aumento de la densidad de la corriente de saturación i_s con la temperatura. En general, la ley de este aumento la determina el factor exponencial $e^{-\frac{eV_A}{kT}}$. El valor teórico de la constante B para una superficie bastante limpia de metal es igual a 120 A/cm² · grad². En realidad, B varía para diferentes metales en unos límites bastante amplios, además, hay que tener en cuenta que el valor de B depende en alto grado del estado de la superficie del metal, y sobre todo del grado de su nitidez. Lo mismo ocurre, como ya se ha indicado, con el trabajo de salida eV_A. Una delgada capa de metales absorbidos, Cs, Ba, Th, óxidos de bario y otros, es capaz de disminuir en alto grado el trabajo de salida. Esto se aprovecha para obtener corrientes importantes a temperaturas del cátodo relativamente pequeñas.

En la tabla VI se dan los valores de la constante B y del trabajo de salida eV_A para distintos metales puros y para el tungsteno cubierto con una capa delgada de otra sustancia.

Como el trabajo de salida eV_A entra como exponente en la fórmula (5), y la magnitud B es un factor de la misma, el trabajo de

salida eV_A desempeñará la función principal en la creación de grandes corrientes de saturación. Por eso, es muy rentable, como se ha indicado, cubrir la superficie de tungsteno con *Cs*, *Ba*, etc., a pesar de los pequeños valores de la constante de emisión B.

Para tener una idea más exacta de la importancia de los diferentes factores de la fórmula (5), veamos los siguientes e j e m p l o s numéricos.

Para una superficie limpia de tungsteno, según los datos de la tabla VI, el trabajo de salida $eV_A = 4{,}5$ eV y la constante de emisión $B = 60$ A/cm^2.grad^2. De aquí que la densidad de la corriente de saturación i_s a la temperatura $T = 1\,000°$ K sea

$$i_s = 60 \cdot 1\,000^2 \cdot e^{-\frac{4{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 4{,}5}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 1\,000 \cdot 300}} \text{ A/cm}^2 \cong 1{,}3 \cdot 10^{-15} \text{ A/cm}^2.$$

La misma superficie de tungsteno a la temperatura $T \cong 3\,000°$ K da

$$i_s = 60 \cdot 3\,000^2 \cdot e^{-\frac{4{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 4{,}5}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 3\,000 \cdot 300}} \text{ A/cm}^2 = 11 \text{ A/cm}^2.$$

Como se ve, una elevación de la temperatura T desde 1 000° K hasta 3 000° K acarrea un aumento de la corriente de saturación de casi 10^{15} veces.

Para una superficie de tungsteno cubierta de cesio tenemos que $eV_A = 1{,}36$ eV y $B = 3{,}2$ A/cm^2.grad^2, de donde a la temperatura de 1 000° K obtenemos una corriente de saturación

$$i_s = 3{,}2 \cdot 1\,000^2 \cdot e^{-\frac{4{,}8 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}36}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 1\,000 \cdot 300}} \text{ A/cm}^2 \cong 0{,}46 \text{ A/cm}^2.$$

Así tenemos que recubriendo la superficie del tungsteno con cesio, a la temperatura de caldeo $T = 1\,000°$ K, se obtiene una corriente de saturación aproximadamente de $3 \cdot 10^{14}$ veces mayor que del tungsteno puro a la misma temperatura.

Midiendo la corriente de saturación I_s podremos hallar el trabajo de salida eV_A. Efectivamente, tomando los logaritmos de los miembros de la (5), obtenemos

$$\ln i_s = \ln B + 2 \ln T - \frac{eV_A}{kT}.$$

La suma de los dos términos $\ln B + 2 \ln T$ se puede considerar constante, ya que al variar la temperatura, el valor de $\ln T$ varía con mucha mayor lentitud que la magnitud $1/T$. Por eso, aproximadamente tenemos que

$$\ln i_s = \text{const} - \frac{eV_A}{k} \cdot \frac{1}{T}. \qquad (6)$$

Si el eje de ordenadas representa el valor de $\ln i_s$ y el de las abscisas, el de $1/T$ (fig. 140), según la fórmula (6), la dependencia de $\ln i_s$ en función de $1/T$ la expresará una recta. Este carácter de dependencia de i_s respecto a T lo confirma la experiencia. La tangente del ángulo de inclinación α de la recta respecto al eje de abscisas se

determina, según la (6), por el coeficiente que lleva la magnitud $1/T$, es decir, tendremos la relación:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{eV_A}{k}. \qquad (7)$$

Obteniendo experimentalmente la dependencia de $\ln i_s$ respecto a $1/T$, podemos hallar el ángulo α y, según la (7), el valor de trabajo de salida. Los valores de trabajo de salida eV_A dados en la tabla VI se han hallado de esta manera.

El fenómeno de emisión termoiónica desempeña un gran papel en la técnica moderna de radio y de electricidad. En ella se funda el funcionamiento de los diodos (kenotrones), de las válvulas amplificadoras, etc.

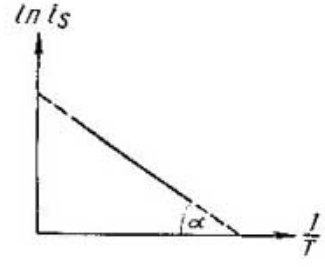


Fig. 140. Dependencia lineal entre el logaritmo de la corriente de saturación y $1/T$.

La emisión de partículas cargadas por superficies incandescentes se observa no sólo en los metales, sino en otros sólidos. Los semiconductores por exceso emiten principalmente electrones. Los cristales iónicos emiten iones positivos o negativos y, en algunos casos, iones de ambos signos. Las sales CdI_2, ZnI_2, CaF_2, TlI, CuI_2 y otras muchas, a las temperaturas de 600—700° K, emiten solamente iones positivos. Los haluros alcalinos (NaCl, KCl y otros), a las temperaturas de 700—800° K, emiten solamente iones positivos, y a temperaturas mayores de 900—1 000° K, iones negativos.

Ciertos metales, al calentarlos en vapores de metales alcalinos, también emiten iones positivos.

Además de la emisión termoiónica tenemos también la emisión debida a la acción de un *campo eléctrico exterior* (*autoemisión, emisión fría o emisión por campo eléctrico*), y la producida por la acción de choques (bombardeo) de electrones o iones. Esta última se denomina *emisión secundaria*.

Para calcular el valor del campo eléctrico exterior necesario para arrancar electrones al metal, hay que conocer muy bien la estructura de la capa superficial del metal. Rugosidades microscópicas pueden variar notablemente la magnitud de las fuerzas que actúan en el electrón de la superficie. Según cálculos aproximados, para arrancar electrones a la temperatura ordinaria, hay que crear en la superficie del metal un gradiente de potencial del orden de 10^8 V/cm. Para crear campos tan grandes en la superficie de un conductor se puede utilizar el campo de un condensador cilíndrico. Según lo dicho en el § 149, la intensidad del campo de un condensador cilíndrico en el espacio comprendido entre los cilindros es

$$E = \frac{2Q}{\varepsilon r l},$$

www.elsolucionario.org

donde Q es la carga, l, la longitud de los cilindros, ε, la constante dieléctrica de la sustancia que hay entre los cilindros, y r, la distancia del eje del cilindro interior. La capacidad de un condensador de éstos es

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}},$$

donde R_2 y R_1 son los radios respectivos de los cilindros exterior e interior. Utilizando la relación $C = \frac{a}{V_1 - V_2}$, donde $V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial entre los cilindros, obtenemos que

$$\frac{Q}{l} = \frac{\varepsilon (V_1 - V_2)}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Colocando este valor de Q/l en la expresión de E, obtenemos que

$$E = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

De esto se desprende que la intensidad del campo junto a la superficie del cilindro interior, donde $r = R_1$, es

$$E = \frac{V_1 - V_2}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Si R_1 es muy pequeño, la magnitud E puede llegar a ser muy grande. Al hacer los experimentos, como cilindro interior se toma un hilo muy fino, de unos micrones de diámetro, con lo cual, siendo relativamente pequeña la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, se pueden conseguir, para la superficie del hilo, intensidades del campo de hasta 10^8 V/cm. Los experimentos hay que hacerlos en el vacío eliminando con esmero los gases de las superficies, si no, entre el hilo y el cilindro exterior se crean cargas. Es muy importante también el estado de las superficies, que deben ser muy lisas. Tomando toda clase de precauciones, por la posible aparición de fenómenos extraños, experimentalmente se ha podido revelar que el campo exterior arranca electrones y demostrar que este fenómeno empieza a una intensidad del campo, en la superficie, del orden de $10^7 - 10^8$ V/cm.

La *emisión secundaria* se observa al bombardear las superficies de diferentes sustancias con electrones o iones. En el caso de bombardear con electrones, los electrones despedidos por la superficie bombardeada son, de un lado, parte de electrones primitivos reflejados en ella, y, de otro lado, los electrones secundarios arrancados del cuerpo bombardeado. El número total de electrones emitidos por la superficie puede ser mayor que el de los electrones que inciden en ella. Por ejemplo, para el aluminio, a la energía de 350 eV de los electrones incidentes, el número de electrones emitidos por la superficie es 1,75 veces mayor que el número de electrones incidentes. Sobre todo es grande la emisión secundaria de superficies complejas, por ejemplo, de una capa de cesio sobre una superficie de plata y cubierta, a su vez, por una fina capa de óxido. Para estas capas, el número de electrones secundarios puede superar en decenas de veces el número de los electrones primarios.

En la actualidad, la emisión secundaria se utiliza para amplificar las corrientes en el interior de los tubos de vacío (fotomultiplicadores o *tubos de Kubetski*).

§ 173. Teoría de la emisión termoiónica. La emisión electrónica de los metales incandescentes es debida al movimiento térmico de los electrones. Para que el electrón pueda desprenderse del metal, su velocidad, además de ser grande, tiene que tener una dirección determinada. Por eso, vamos a ver el número de electrones cuya componente de velocidad perpendicular a la superficie del metal a través de la cual se desprenden los electrones, tiene un valor determinado. Si trazamos un sistema de coordenadas rectangulares XYZ dirigiendo el eje OX perpendicularmente a la superficie del metal, tendremos que examinar el grupo de electrones dn_{0x}, cuya componente de velocidad v_x esté dentro del intervalo v_x, v_x+dv_x, y las otras dos componentes tengan valores arbitrarios desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

La distribución de los electrones, según sus energías, en el metal, como se ha indicado en el § 163, responde a la ley de Fermi. De esta ley se deduce que el número de electrones dn_0 cuyas componentes de velocidad v_x, v_y, v_z, están en los intervalos v_x, v_x+dv_x, v_y, v_y+dv_y, v_z, v_z+dv_z, es

$$dn_0 = \alpha \frac{1}{1+e^{\frac{E_c - E_i'}{kT}}} dv_x dv_y dv_z, \qquad (1)$$

donde α es una constante, $E_i' = |E_{pa} - E_i|$, E_i es la energía máxima de los electrones a $T=0$, E_{pa}, la energía potencial y E_c la energía cinética, que es igual a $1/2\, m\ (v_x^2+v_y^2+v_z^2)$.

Para obtener el número dn_{0x} de electrones por unidad de volumen cuya componente de velocidad, según el eje OX, esté en el intervalo de v_x, v_x+dv_x, y las otras dos componentes tengan valores arbitrarios, integremos la parte de la derecha de la fórmula (1) según las variables v_y y v_z en los límites desde $-\infty$ hasta $+\infty$:

$$dn_{0x} = \alpha dv_x \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^{\frac{E_c - E_i'}{kT}}} dv_y dv_z. \qquad (2)$$

Como a las temperaturas en que se observa la emisión, se cumple la desigualdad $E_c - E_i' \gg kT$ para los electrones capaces de desprenderse del metal, tendremos que la magnitud $e^{\frac{E_c - E_i'}{kT}}$ será mucho mayor que la unidad y aproximadamente:

$$\frac{1}{1+e^{\frac{E_c - E_i'}{kT}}} \cong e^{-\frac{E_c - E_i'}{kT}} = e^{\frac{E_i'}{kT}} \cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)},$$

después de lo cual, la expresión (2) se puede escribir de la manera siguiente

$$dn_{0x} = d \cdot e^{\frac{E_i'}{kT}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z.$$

Como se sabe, la integral determinada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

de donde:

$$dn_{0x} = \alpha \cdot \frac{2\pi kT}{m} \cdot e^{\frac{E_l'}{kT}} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\,dv_x. \qquad (3)$$

Ahora calculemos el número de electrones que se desprenden de la unidad de superficie del metal por unidad de tiempo. Veamos el grupo de electrones dn_{0x} de componente de velocidad v_x que está en el intervalo dado v_x, $v_x + dv_x$. Por unidad de tiempo, de la unidad de superficie llegan a desprenderse todos los electrones de este grupo que se hallan en el volumen de una columna de sección transversal igual a la unidad de superficie y de longitud igual a la

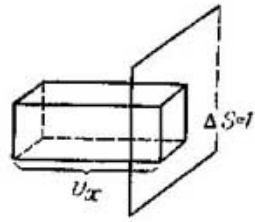


Fig. 141. Representación gráfica para el cálculo de la cantidad de electrones desprendidos por unidad de tiempo de una superficie de área unidad.

velocidad v_x (fig. 141; compárese con el razonamiento del § 161). Este número de electrones dn será

$$dn_x = dn_{0x} \cdot v_x.$$

El número total de electrones n que se desprende por unidad de tiempo de la unidad de superficie del metal, lo obtenemos integrando dn_x en los límites desde v_{xa} hasta $+\infty$, donde v_{xa} es la componente mínima de la velocidad v_x suficiente para que el electrón pueda desprenderse del metal. Así tenemos que:

$$n = \int_{v_{xa}}^{+\infty} v_x\,dn_{0x}. \qquad (4)$$

La magnitud v_{xa} se determina razonando de la siguiente manera: La energía potencial en el interior del metal es constante en todas partes e igual a E_{pa} (fig. 101 y 123)*); por lo tanto, para que el electrón pueda desprenderse del metal, su componente v_x de velocidad debe ser menor que la magnitud v_{xa}, que satisface la igualdad:

$$\frac{1}{2} m v_{xa}^2 = |E_{pa}|,$$

*) Hay que tener en cuenta que en las figs. 101 y 123, las líneas horizontales, que representan los niveles de energía, se refieren a la *energía total*.

www.elsolucionario.org

de donde

$$v_{xa} = \sqrt{\frac{2\,|E_{pa}|}{m}}.$$

Colocando este valor de v_{xa} en la (4) y utilizando la igualdad (3), hallamos que

$$n = \alpha \frac{2\pi kT}{m} \cdot e^{-\frac{E_i'}{kT}} \int_{\sqrt{\frac{2\,|E_{pa}|}{m}}}^{+\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} v_x dv_x.$$

Realizando la integración, tenemos

$$n = \alpha \frac{2\pi k^2 T^2}{m^2} \cdot e^{-\frac{|E_{pa}| - E_i'}{kT}}.$$

La densidad de la corriente de saturación i_s se obtiene multiplicando el número de electrones n que se desprenden por la carga del electrón e:

$$i_s = \alpha e \frac{2\pi k^2}{m^2} T^2 e^{-\frac{|E_{pa}| - E_i'}{kT}}.$$

Por último, observando que $|E_{pa}| - E_i' = eV_a$, donde eV_a es el trabajo de salida, escribiremos la última ecuación de la siguiente manera:

$$i_s = BT^2 e^{-\frac{eV_a}{kT}},$$

donde B es una constante. Así tenemos que utilizando la ley de distribución de Fermi, hemos llegado a la expresión de la corriente de saturación que se había dado el el § 172 y que se confirma experimentalmente.

El valor teórico de la constante α es de $\frac{2m^3}{h^3}$, donde m es la masa del electrón y h la constante de Planck, igual a $6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg·seg.

Esto nos da para B el siguiente valor:

$$B = \frac{4\pi mek^2}{h^3} = 120 \text{ A/cm}^2 \cdot \text{grad}^2.$$

Los experimentos nos dan, para una serie de metales puros, $B \cong 60$ A/cm^2·grad^2, es decir, un valor dos veces menor. Esto se puede explicar suponiendo que no todos los electrones cuya $v_x \gg v_{xa}$, se desprenden del metal, sino que parte de ellos se refleja en la superficie del metal.

CAPÍTULO XVII

Corriente eléctrica en los electrólitos y en los gases

§ 174. Conducción electrolítica. Los líquidos puros, en su mayor parte, son malos conductores de electricidad. Así, por ejemplo, el agua pura, el queroseno, los aceites minerales, etc., son muy malos conductores. Sin embargo, las disoluciones de sales, ácidos y álcalis en el agua y en algunos otros líquidos, conducen bien la electricidad. Por ejemplo, en cuanto se añade al agua destilada un poco de sal común (NaCl) o unas gotas de ácido sulfúrico (H_2SO_4), el agua se convierte en un buen conductor.

En diferentes partes de nuestro curso ya se ha señalado que el paso de la corriente eléctrica a través de disoluciones de sales y de ácidos, va acompañada de un desprendimiento de las partes componentes de estas sustancias en los electrodos. Esta clase de conductores que se disocian al pasar por ellos la corriente eléctrica, como ya se ha indicado, se denominan conductores de segunda clase o *electrólitos*, y su conducción, *conducción electrolítica*. La conducción electrolítica es debida a la existencia de iones en la solución, es decir, átomos o moléculas cargados. *El movimiento de los iones bajo la acción de un campo eléctrico exterior crea una corriente eléctrica en el electrólito*, mientras que en los conductores de primera clase (metales) la corriente la origina el movimiento de los electrones libres.

El agua pura, como se ha indicado, es muy mala conductora de la electricidad. Esto significa que está compuesta fundamentalmente de moléculas neutras y no hay la cantidad suficiente de electrones libres o de otras cualesquiera partículas libres cargadas que, al moverse solicitadas por un campo eléctrico exterior, creen una corriente. Al disolver en el agua una serie de sustancias, por ejemplo, azúcar, glicerina, etc., la solución resultanto tampoco conduce la electricidad. Estas soluciones, como se ha indicado en el § 85 del t. I, revelan una presión osmótica cuya magnitud se determina por la *fórmula de Van't Hoff*. Al disolverse, las moléculas de estas sustancias no sufren ningún cambio, permanecen neutras y no se disocian. Sin embargo, las soluciones de sales y ácidos revelan una presión osmótica mayor que la calculada por la fórmula corriente de Van't Hoff. Hemos visto que el gran valor anómalo de la presión osmótica se explica sencillamente, si se supone que parte de las moléculas de la sustancia disuelta se disocia, es decir, se descompone en

partes. El propio hecho de que la solución resulte al mismo tiempo conductora, nos convence de que las partes en que se ha disociado la molécula, resultan cargadas, es decir, son iones. La disociación de las moléculas sobre todo es grande en las soluciones acuosas, lo cual se explica por el alto valor de la constante dieléctrica del agua ($\varepsilon = 81$).

Sea, por ejemplo, un recipiente C (fig. 142) con una solución acuosa de vitriolo azul $CuSO_4$ y con dos electrodos introducidos en él: el K, de carbón, y el A de cobre. A los electrodos se conectan los polos de una batería B: al electrodo de carbón K, el polo negativo de la batería, y al electrodo de cobre A, el positivo. Entonces los electrodos estarán cargados y entre ellos, en la solución, se creará un campo eléctrico. Influidos por este campo, los iones en que se disocian las moléculas de vitriolo azul de la solución, empezarán a desplazarse y por la solución pasará la corriente. Los iones cargados positivamente (cationes) se desplazarán hacia el cátodo K y, cediéndole su carga, se depositarán en él en forma de partículas neutras. Los iones negativos (aniones) se desplazarán hacia el ánodo A y se depositarán en él.

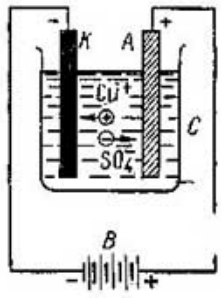


Fig. 142. Movimiento de los iones Cu^{++} y SO_4^{--} en la conducción electrolítica de una solución de vitriolo azul.

Haciendo pasar una corriente por cierto tiempo a través de la solución de vitriolo azul, es fácil observar que en la superficie oscura del cátodo de carbón se deposita una capa rojiza de cobre metálico. Esto nos convence de que el cobre estaba en la solución en forma de iones positivos. La parte restante de las moléculas disociadas de $CuSO_4$, es decir, el grupo SO_4, debe formar los iones negativos. De esta manera llegamos a la conclusión de que las moléculas de vitriolo azul se disocian, al disolverse, en iones positivos de cobre y iones negativos de SO_4, lo cual escribiremos de la siguiente manera:

$$CuSO_4 \rightarrow Cu^{++} + SO_4^{--}.$$

Los signos dobles $++$ y $--$ indican que, en el caso dado, los iones tienen dos cargas, es decir, resultan respectivamente como consecuencia de la pérdida de dos electrones o de la captura de dos electrones de más.

Los iones positivos del cobre Cu^{++} se desplazan hacia el cátodo y se depositan allí como átomos de cobre. Los iones negativos SO_4^{--} se desplazan hacia el ánodo. Si este ánodo es de cobre, como se ha escogido a propósito en este ejemplo, los iones SO_4^{--}, después de neutralizarse en el ánodo, reaccionan químicamente con el mismo

www.elsolucionario.org

y forman de nuevo moléculas de vitriolo azul:

$$SO_4^{--} + Cu = CuSO_4 + 2\varepsilon,$$

dónde ε designa al electrón que pasa al ánodo.

Estas moléculas formadas de vitriolo azul, pasan de nuevo a la solución y, como resultado de ello, la cantidad de vitriolo azul de la solución permanece constante. En el cátodo se desprende cobre, mientras que el cobre del ánodo, reaccionando químicamente con el ion SO_4^{--}, pasa a la solución.

Este ejemplo es característico: demuestra, por un lado, que la conducción electrolítica es debida al desplazamiento de los iones en que se han disociado las moléculas de la sustancia disuelta, y por otro, que en los electrodos no se depositan obligatoriamente las partes componentes de la sustancia disuelta. El resultado final de la electrólisis depende de las reacciones químicas que se efectúan en los lugares donde se depositan los iones. Estas reacciones se denominan *reacciones secundarias* o *fenómenos secundarios* de la electrólisis, y sin tenerlas en cuenta no se puede comprender bien el proceso de disociación electrolítica. Está claro que el carácter de las reacciones secundarias lo determina no sólo la naturaleza de la disolución, sino el material de los electrodos.

Los resultados de la electrólisis de una misma solución pueden ser diferentes, dependiendo de los electrodos elegidos. Veamos, por ejemplo, la electrólisis de una solución acuosa de ácido sulfúrico H_2SO_4. Las moléculas de ácido sulfúrico se disocian en iones positivos de hidrógeno H^+ y en iones negativos de SO_4^{--}, pero hay que tener en cuenta que en la disociación de cada molécula de H_2SO_4 aparecen dos iones de hidrógeno y un ion de SO_4^{--} cuyo valor numérico de la carga es dos veces mayor que el de la carga de cada ion de hidrógeno por separado, lo cual lo escribiremos así:

$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{--}.$$

Supongamos primeramente que en la solución de ácido sulfúrico introducimos electrodos de plomo. Entonces, en el electrodo que forma el cátodo, se desprende hidrógeno gaseoso, mientras que en el ánodo se depositará el ion SO_4^{--}, que reaccionará con el material del electrodo formando sulfato de plomo:

$$SO_4^{--} + Pb = PbSO_4 = 2\varepsilon.$$

La cantidad de ácido sulfúrico de la solución empezará a disminuir y como resultado de la electrólisis se descompone el ácido sulfúrico.

Pero si hacemos la electrólisis de la misma solución siendo los electrodos de platino, en el cátodo, como antes, se desprenderá hidrógeno gaseoso mientras que el ion SO_4^{--}, que va al ánodo, no

entrará en reacción con el platino, sino que lo hará con el agua de la siguiente manera:

$$SO_4^{--} + H_2O = H_2SO_4 + O + 2e,$$

es decir, se formará de nuevo ácido sulfúrico, y en el ánodo se desprenderá oxígeno gaseoso. Al fin y al cabo nos da que la cantidad de ácido sulfúrico de la solución permanece invariable y en los electrodos se desprenden hidrógeno y oxígeno gaseosos, con la particularidad de que por cada átomo de oxígeno que se desprende en el ánodo, se desprenden dos átomos de hidrógeno en el cátodo, es decir, resulta disociada una molécula de agua. De esta manera, debido a las reacciones secundarias de la electrólisis del ácido sulfúrico, se descompone el agua, mientras que el propio ácido sulfúrico se recupera.

El análisis de estos y otros casos de electrólisis demuestra que *los metales y el hidrógeno siempre forman iones positivos o cationes.* Las demás partes de las moléculas (radicales, halógenos, etc.) forman iones negativos (*aniones*).

En realidad, el proceso de disociación tiene un carácter más complejo que el explicado anteriormente, ya que los iones reaccionan con las moléculas de agua. Por ejemplo en el caso de una disolución acuosa, el ion positivo de hidrógeno H^+ no queda en estado libre (protón libre), sino que se une a la molécula de agua formando un ion molecular positivo H_3O^+ (hidronio, hidroxonio o ion hidronio). Los iones positivos de los metales también se someten a la hidratación (unión con moléculas de agua de cristalización), por ejemplo, al disolver las sales de cobre se forman los grupos $Cu(H_2O)_4^{++}$, etc.

El mismo proceso de disociación en soluciones acuosas hay que considerarlo como resultado de la acción mutua de la molécula que se disocia con la molécula de agua. Por ejemplo, al disociarse el ácido sulfúrico, como resultado de la acción mutua de la molécula de ácido sulfúrico H_2SO_4 con la molécula de agua H_2O, aparecen los iones H_3O^+ y HSO_4^-:

$$H_2SO_4 + H_2O \rightarrow H_3O^+ + HSO_4^-.$$

Después, el ion molecular HSO_4^- reaccionando con el agua forma el ion de doble carga SO_4^{--}:

$$HSO_4^- + H_2O \rightarrow H_3O^+ + SO_4^{--}.$$

En las condiciones corrientes de equilibrio en la solución hay iones SO_4^{--} y iones HSO_4^-, pero de estos últimos hay muchos más que de los primeros. No obstante, el resultado final de la electrólisis y de las reacciones secundarias será el mismo que se ha dado arriba.

§ 175. Leyes de Faraday. Las leyes de la conducción electrolítica fueron establecidas experimentalmente por Faraday en 1836. Las leyes son dos.

La primera ley de Faraday se refiere a la relación entre la cantidad de sustancia que se deposita en el electrodo, la intensidad de la

corriente y el tiempo que pasa la corriente por el electrólito. Esta ley se puede enunciar simplemente de la siguiente manera: la masa M de sustancia que se deposita en el electrodo, es proporcional a la intensidad de la corriente I y al tiempo de su paso t:

$$M = kIt; \tag{1}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad que depende solamente de la sustancia que se desprende y de la composición del electrólito.

El producto de la intensidad I de la corriente por el tiempo t es la cantidad de electricidad Q que pasa por el electrólito:

$$It = Q,$$

de donde la primera ley de Faraday se puede escribir:

$$M = kQ, \tag{1a}$$

es decir, *la masa M de la sustancia depositada es proporcional a la cantidad de electricidad Q que pasa a través del electrólito.* El coeficiente k se denomina *equivalente electroquímico* de la sustancia depositada.

Como para $Q=1$, tenemos que

$$M = k,$$

el equivalente electroquímico numéricamente será igual a la masa de la sustancia depositada al pasar a través del electrólito una unidad de cantidad de electricidad.

La segunda ley de Faraday determina la magnitud del equivalente electroquímico k.

Antes de formular la segunda ley de Faraday recordemos algunas características químicas de la sustancia. El *peso equivalente (o equivalente químico)* de un elemento es una magnitud sin dimensiones igual a la masa del elemento dado en gramos y que desplaza en los compuestos químicos a 1,0078 g de hidrógeno.

La *valencia* de un elemento es el número de átomos de hidrógeno que se sustituye en un compuesto químico por un átomo del elemento dado. Designando por A el peso atómico del elemento y por n, su valencia tenemos que el peso equivalente es igual a A/n. Si tomamos A/n gramos de un elemento, esta cantidad será el *equivalente-gramo* del elemento.

La segunda ley de Faraday dice que *los equivalentes electroquímicos k de los elementos son proporcionales a sus pesos equivalentes*:

$$k = C\frac{A}{n}, \tag{2}$$

donde C es un coeficiente de proporcionalidad igual para todos los

www.elsolucionario.org

elementos. Habitualmente, en lugar del coeficiente C se usa la magnitud inversa:

$$\frac{1}{F} = C,$$

Entonces, la segunda ley de Faraday adquiere la forma:

$$\kappa \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n}. \qquad (2a)$$

La magnitud F se denomina *faraday* *) o *constante de Faraday*. Colocando el valor del equivalente electroquímico k de la (2a) en la ecuación de la primera ley de Faraday (1), se obtiene una fórmula que une las dos leyes de Faraday:

$$M = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{n} Q. \qquad (3)$$

De esto se deduce que si se deposita un equivalente-gramo de sustancia, es decir que el valor numérico de M es igual a A/n, Q deberá ser igual a F.

De esta manera tenemos que *el faraday F es igual numéricamente a la cantidad de electricidad Q a cuyo paso por un electrólito, se deposita en el electrodo un equivalente-gramo de sustancia.*

Las mediciones de los equivalentes electroquímicos nos dan el siguiente valor del faraday F:

$$F = 96\,494 \frac{\text{culombios}}{\text{equivalente-gramo}}.$$

Las leyes de Faraday han sido de especial importancia al establecer la teoría electrónica. De la fórmula (3) se deduce que para depositar un equivalente-gramo de cualquier sustancia, por el electrólito tiene que pasar una cantidad completamente determinada de electricidad, a saber, una cantidad igual a un faraday F. La cantidad de átomos N' de un equivalente-gramo depende de la valencia n del elemento y, naturalmente, será igual a:

$$N' = \frac{N}{n},$$

donde N es el número de Avogadro. Así, el desprendimiento de cada átomo está relacionado con el paso por el electrólito de una cantidad de electricidad

$$q = \frac{F}{N'} = \frac{F}{N} \cdot n. \qquad (4)$$

Según la teoría iónica de la conducción de los electrólitos, el paso de la corriente por un electrólito se reduce al desplazamiento

*) No hay que confundir esta magnitud con el *faradio*. (*N. del T.*).

de iones; por lo tanto, teniendo en cuenta la fórmula (4), se deduce que *el ion de cada elemento lleva una carga q proporcional a la valencia n del elemento.*

La carga mínima e de un ion corresponde a la carga de un ion monovalente ($n=1$), de donde

$$e=\frac{F}{N}. \tag{5}$$

Como la valencia de un elemento es un número entero n, la carga q transportada por cualquier ion

$$q=ne,$$

será un *múltiplo de la carga mínima e.* Así tenemos que la ley de Faraday junto con la teoría atómica de la sustancia, nos lleva al concepto de la estructura atómica de la electricidad. A esta deducción llegaron al mismo tiempo e independientemente uno de otro, Helmholtz y Stoney en 1881. Cada átomo de una sustancia puede perder o captar una carga que sea múltiple de la carga elemental e. Está claro que esta carga elemental e es la carga del electrón. El ion positivo se formará, si el átomo (o la molécula) pierde uno o varios electrones. El ion negativo se formará, si el átomo (o la molécula) capta uno o varios electrones de más.

Así tenemos que en la disociación electrolítica, el hidrógeno y los metales alcalinos (litio, sodio, potasio, etc.) forman iones monovalentes positivos, es decir, son átomos que pierden un electrón cada uno. El zinc y el cobre, al disociarse los sulfatos de estos elementos ($ZnSO_4$ y $CuSO_4$), dan iones divalentes positivos, es decir, son átomos que les faltan dos electrones.

Los halógenos Cl, Br, I dan iones monovalentes negativos: sus átomos se apropian de un electrón de más cada uno.

Un mismo elemento puede funcionar con diferentes valencias. En correspondencia con ello surgen iones con distintas cargas. Por ejemplo, el ion positivo del hierro que se forma al disociar sales de hierro divalente, son átomos de hierro que han perdido dos electrones, mientras que los iones que se forman al disociar sales de hierro trivalente, son átomos que han perdido tres electrones.

La ecuación (5) nos permite determinar la carga del electrón en función del faraday F y del número de Avogadro N. Suponiendo que el número de Avogadro es $N=6{,}023\times10^{23}$ mol^{-1}, obtenemos que:

$$e=\frac{F}{N}=\frac{96\,494}{6{,}023\cdot10^{23}}\,\mathrm{C}=1{,}601\cdot10^{-19}\mathrm{C}=4{,}803\cdot10^{-10}\quad\text{unid. }CGSE,$$

que es el valor de la carga del electrón que se ha adoptado actualmente. No obstante, los métodos experimentales de determinación del número de Avogadro N son menos exactos que los métodos de

medición directa de la carga del electrón, por eso, la igualdad (5) se utiliza para determinar el número de Avogadro N en función del faraday y de la carga del electrón e.

§ 176. Disociación electrolítica. La conducción electrolítica, como se ha indicado en el § 174, es debida a la existencia de iones en la solución, los cuales se producen por disociación de las moléculas del soluto. Las moléculas se disuelven, en una solución, por la acción mutua con las moléculas del disolvente. El grado de disociación depende de la naturaleza de las moléculas, tanto del disolvente como del soluto. Hay un paralelismo entre la constante dieléctrica de la sustancia y su capacidad de causar la disociación cuando se emplea como disolvente: cuanto mayor es la constante dieléctrica del disolvente, mayor grado de disociación causa.

Para caracterizar cuantitativamente el grado de disociación se introduce un coeficiente α denominado grado de disociación o grado de ionización. Supongamos que en un volumen unidad de una solución hay n_0 moléculas del soluto, de las cuales

$$n_0' = \alpha n_0$$

se han disociado formando iones, y

$$n_0'' = n_0 - \alpha n_0 = (1 - \alpha)\, n_0$$

no se han disociado. α expresará el grado de disociación de las moléculas en la solución. Está claro que si

$$\alpha = 1,$$

todas las moléculas se habrán disociado, y si

$$\alpha = 0,$$

no hay disociación.

Para el grado dado de disociación de una solución habrá un equilibrio entre el proceso de ionización de las moléculas y el de reagrupación de los iones en moléculas neutras (*recombinación*). El número de moléculas que se disocia en cierto intervalo de tiempo es proporcional al número de moléculas que hay en la solución. Por consiguiente, el número de pares de iones que se forman por unidad de tiempo en la unidad de volumen, se puede considerar igual a

$$\Delta n_0' = \beta \cdot (1 - \alpha)\, n_0, \qquad (1)$$

donde β es un coeficiente de proporcionalidad. El número de iones que se reagrupan en moléculas, es proporcional al número de iones positivos y al de los negativos, ya que para formar una molécula se necesitan iones de ambos signos. Como el número de iones de cada signo por unidad de volumen es igual a αn_0, el número de pares de

www.elsolucionario.org

iones que se reagrupan en una unidad de volumen por unidad de tiempo, se puede considerar igual a

$$\Delta n_0'' = \gamma \cdot \alpha n_0 \cdot \alpha n_0 = \gamma \alpha^2 n_0^2, \qquad (2)$$

donde γ es un coeficiente de proporcionalidad. La condición de equilibrio entre el proceso de ionización y el de recombinación, evidentemente se reducirá a que el número de los nuevos pares de iones, formados sea igual al número de pares reagrupados de iones, es decir, que

$$\Delta n_0' = \Delta n_0'',$$

de donde, según la (1) y la (2),

$$\beta (1 - \alpha) n_0 = \gamma \alpha^2 n_0^2;$$

y de esta última igualdad hallamos que

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot n_0. \qquad (3)$$

Esta fórmula relaciona el grado de disociación α con el número de moléculas disueltas por unidad de volumen n_0.

La relación de los coeficientes γ/β no depende de n_0, sino solamente de la naturaleza de la solución y de las condiciones (temperatura) de la misma.

La fórmula (3) nos permite sacar algunas conclusiones del grado de disociación de las moléculas en la solución. Supongamos primeramente que la solución es muy débil, es decir, que el número de moléculas del soluto por unidad de volumen se aproxima a cero: $n_0 \cong 0$, de donde

$$\alpha \cong 1$$

es decir, *en las soluciones débiles α se aproxima a la unidad, lo cual significa que prácticamente todas las moléculas están disociadas.*

Y viceversa, si suponemos que el grado de disociación es pequeño, en la ecuación (3) se puede despreciar la magnitud α del numerador, de donde

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_0}}; \qquad (3a)$$

en este caso el grado de disociación es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de moléculas del soluto por unidad de volumen, o, en otras palabras, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la concentración de la solución.

El valor del grado de disociación se puede determinar en función de la conducción de la solución (véase el § 178). La magnitud α puede tener valores muy distintos, menores que la unidad, según sean la naturaleza y concentración de la solución. Por ejemplo, para

el KCl, siendo la concentración igual a 0,0001 mol/l, hallamos que $\alpha=0{,}993$; mientras que si la concentración es de 1 mol/l, hallamos que $\alpha=0{,}757$. El agua pura también se disocia, pero en un grado muy pequeño; se disocia en iones positivos H^+ y negativos OH^-, de hidroxilo. Los iones positivos H^+, al unirse con el agua forman iones H_3O^+, así que todo el proceso de disociación tiene el carácter siguiente:

$$H_2O+H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-.$$

Para el agua muy pura, α aproximadamente es igual a $1{,}7\cdot10^{-9}$. A este valor le corresponde una concentración de iones H^+ aproximadamente igual a 10^{-7} moles por litro. Es fácil de calcular que, en este caso, en cada cm^3 de agua hay $6\cdot10^{12}$ iones H^+ y otros tantos iones de hidroxilo OH^-.

En la electroquímica es de gran importancia el determinar la concentración de iones H^+ en las distintas soluciones. Esta concentración, expresada en moles por litro, se designa con el símbolo $[H^+]$. El logaritmo vulgar de $[H^+]$ tomado en signo contrario, se designa con el símbolo pH (exponente de hidrógeno, índice de hidrógeno o valor pH):

$$pH=-\lg[H^+].$$

Para el agua $[H^+]=10^{-7}$ y, por consiguiente, $pH=-\lg 10^{-7}=7$. Las disoluciones de $pH<7$ se llaman ácidas, y las de $pH>7$, alcalinas.

§ 177. Energía de los iones en la solución. Al examinar el fenómeno de diferencia de potencial de contacto hemos visto que los electrones del interior del metal poseen una energía potencial menor que la del electrón libre fuera del metal. Para arrancar un electrón del metal hay que realizar cierto trabajo. De la misma manera tenemos que el ion en el interior del disolvente posee determinada energía potencial. Esta cuestión de la energía del ion en la solución, la examinaremos primeramente desde el punto de vista macroscópico. Supongamos que tenemos en el vacío una esfera de radio r cargada con una carga q. Su energía (véase el § 138) será:

$$E_p=\frac{q^2}{2r}.$$

La misma esfera colocada en un dieléctrico de constante ε, posee una energía

$$E'_p=\frac{q^2}{2\varepsilon r}. \qquad (1)$$

Si en la solución consideramos el ion como una esfera de carga q colocada en un medio dieléctrico, su energía potencial vendrá expresada por la fórmula (1). Para trasladar al vacío este ion de la solución hay que realizar un trabajo igual a la diferencia de energías potenciales:

$$A=E_p-E'_p=\frac{q^2}{2r}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (2)$$

Suponiendo que el radio del ion es del orden de $2\cdot10^{-8}$ cm, hallamos que el trabajo A es una magnitud del orden de 3 eV.

Para determinar con mayor exactitud la energía del ion en una solución hay que examinar más detalladamente la acción mutua del ion con las moléculas que lo rodean.

El agua, que es el disolvente más corriente, consta de moléculas polares de tres átomos. Sea primeramente un ion individual. Empecemos a aproximarle simétricamente seis moléculas neutras de agua (fig. 143). Bajo la influencia del campo eléctrico del ion, las moléculas polares de agua serán atraídas por el ion independientemente de la carga de éste ya que siempre se orientarán con respecto al ion con el extremo que lleva la carga de signo contrario. La energía potencial mutua del ion y de las moléculas de agua disminuirá a medida que se acerquen las moléculas al ion, y se representará por la parte descendiente de la curva *ab* de la fig. 144. A una distancia suficientemente pequeña r entre las moléculas polares y el ion, la fuerza de atracción se transforma en fuerza de repulsión, y la energía potencial empieza a crecer (parte *cd* de la curva de la fig. 144). A determinada distancia entre el ion y las moléculas, le corresponde un mínimo de energía potencial y una disposición estable de las moléculas alrededor del ion. En lugar de acercar al ion seis moléculas, le podemos acercar seis grupos de moléculas, suficientes para formar a su alrededor capas de dos o tres moléculas de espesor. En este caso, la curva de la energía potencial será la misma que la de la fig. 144, pero con un mínimo más profundo. Un aumento ulterior de moléculas varía muy poco la curva potencial, ya que la intensidad del campo alrededor del ion disminuye rápidamente con la distancia. Añadiéndole una cantidad suficiente de moléculas, obtendremos un ion en una gota de líquido. De esta manera tenemos que la variación de la energía del ion al introducirlo en el disolvente vendrá representada por la profundidad del mínimo de la curva potencial del tipo de la representada en la fig. 144. La energía potencial del ion en el disolvente se puede representar de nuevo con la fórmula (1), sólo que el valor de ε será un poco diferente del valor de la constante dieléctrica del disolvente determinada por los medios macroscópicos corrientes.

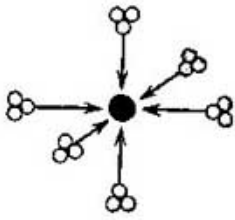


Fig. 143. Moléculas de agua que cercan al ion.

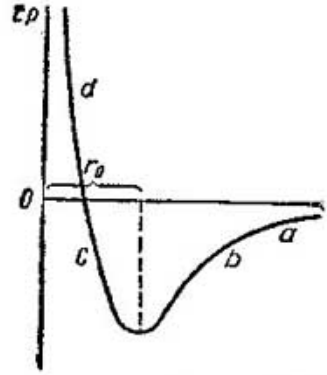


Fig. 144. La energía potencial E_p en función de la distancia r.

Si la solución es muy débil, no hay necesidad de tener en cuenta la acción mutua de los iones entre sí, como lo hemos hecho arriba. Cada ion reacciona solamente con las moléculas vecinas del disolvente, formando con ellas un complejo denominado *solvato*, que se desplaza en el disolvente puro.

En las soluciones no muy débiles hay que tener en cuenta la acción mutua de los iones. Supongamos que todos los iones llevan cargas del mismo valor numérico. Examinemos el comportamiento de determinado ion. La energía potencial de acción mutua con otro ion que se halla a la distancia r_i de este ion, será igual $qq^2_i/\varepsilon r_i$. Esta energía será positiva, si ambos iones son del mismo signo, y negativa, si tienen signo contrario. La energía potencial de acción recíproca del

www.elsolucionario.org

ión dado con todos los iones que lo rodean será igual a $q_i \sum \frac{q_i}{\varepsilon r_i}$. Las cargas q_i son de diferentes signos, por eso distintos miembros de esta suma también tendrán diferente signo y el valor de toda la suma no es muy grande. La suma sería igual a cero, si en las proximidades del ión dado hubiese el mismo número de iones positivos y negativos y se hallasen, como término medio, a la misma distancia. En este caso, la energía potencial del ión sería la misma que si en sus proximidades no hubiese otros iones. Sin embargo, en la realidad no ocurre así. En su movimiento térmico, cada ión choca con las moléculas neutras del disolvente que lo rodea y a veces se aproxima a otros iones. La repulsión de los iones del mismo signo impide que se aproximen, y la atracción de los iones de distinto signo facilita su acercamiento. Debido a ello, en las proximidades del ión positivo aparecen con más frecuencia iones negativos, y en las del ión negativo, iones positivos: resultando como si cada ión estuviese rodeado de una nube de iones de signo contrario.

En las redes de los cristales iónicos (por ejemplo, del cristal de sal gema), cada ión positivo está rodeado de seis negativos, y cada negativo, de seis positivos. Así tenemos que la distribución de los iones en la solución es de transición entre la distribución arbitraria de las moléculas neutras del líquido y la distribución regular de los iones en la red cristalina. De esto se deduce que el conjunto de iones de la solución posee cierta reserva de energía parecida a la energía de la red cristalina iónica. Por consiguiente, el trabajo de extracción de un ión de la solución donde hay otros iones, es un poco mayor que el realizado para extraerlo del disolvente puro. No obstante, este valor complementario no es grande en comparación con el trabajo expresado por la fórmula (2).

Las fuerzas de acción recíproca del ión con el medio que lo rodea no solamente tienen carácter electrostático. Esta circunstancia obliga a comportarnos con cuidado respecto a los métodos de determinación de los saltos de potencial entre dos sustancias diferentes, por ejemplo, entre dos metales o entre un metal y el electrólito. Si, por ejemplo, determinamos el salto de potencial entre el metal y el electrólito (por el trabajo de transporte), transportando una vez un electrón del metal al electrólito, y otra vez un ión, podremos obtener distintos valores. La determinación de la diferencia de potencial electrostático de dos puntos en función del trabajo de transporte de la carga unidad de uno de estos puntos a otro, es justa solamente en el caso de transporte de una carga eléctrica puntual e ideal, la cual no puede reaccionar en la sustancia que la rodea con ninguna otra fuerza que no sea electrostática. Mientras que en el transporte de cualquier carga real (electrón, ión), además de las fuerzas electrostáticas de acción recíproca, surgen otras fuerzas más o menos considerables que dependen de la clase de partículas transportadas y de la clase de sustancias limítrofes, por ejemplo, las "fuerzas de intercambio" (o de cambio), que se estudian en la mecánica cuántica. Entonces, la determinación de la diferencia de potencial en función del trabajo de transporte de una partícula real cargada de esta clase, se puede hacer solamente en el caso de que ambos puntos, para los cuales se determina la diferencia de potencial, estén en un mismo medio. Si los puntos están en diferentes medios, el trabajo puede resultar diferente, según sea la partícula que se transporte.

§ 178. Teoría de la conducción electrolítica. Si no hay campo eléctrico exterior, los iones del electrólito realizan un movimiento térmico, por consiguiente, la corriente resultante es igual a cero. Si hay un campo, los iones positivos adquieren una velocidad complementaria u_+ dirigida según el campo eléctrico, y los iones negativos, una velocidad complementaria u_- en dirección contraria. Al movimiento térmico desordenado se añade el movimiento de trans-

porte de iones, y en la solución surge una traslación de cargas en determinado sentido, es decir, se crea una corriente eléctrica.

Al examinar la conductibilidad eléctrica de los metales (§ 161) teníamos en cuenta la acción del campo sobre el electrón en el trayecto de su recorrido libre. Después, consideramos que al chocar con los iones que forman la armazón de la red cristalina del metal, el electrón perdía la velocidad complementaria adquirida bajo la influencia del campo exterior. El movimiento de los iones en el electrólito lo examinaremos de manera macroscópica: consideraremos que sobre el ion del electrólito actúan dos fuerzas, la fuerza eléctrica qE, donde q es la carga del ion y E la intensidad del campo eléctrico, y la fuerza de resistencia del medio. Este punto de vista es justo porque los iones son mucho mayores que los electrones y están densamente rodeados de moléculas del disolvente. En la mayoría de los casos, el ion está rodeado por todas partes de moléculas neutras, así que bajo la influencia del campo E se desplaza todo un complejo que se denomina *solvato*.

A las velocidades que poseen los iones, se puede considerar que la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad y, naturalmente, de sentido contrario al de la velocidad del ion. De esta manera, la fuerza de rozamiento que actúa sobre el ion positivo, se puede considerar igual a $-k_+u_+$, donde k_+ es el coeficiente de rozamiento. Designando la masa del ion positivo por m_+, y su aceleración por w_+, obtenemos la ecuación del movimiento orientado del ion positivo, que tendrá la forma:

$$m_+w_+ = qE - k_+u_+. \tag{1}$$

Esta ecuación indica que a pequeñas velocidades, gran importancia adquiere la fuerza eléctrica qE bajo cuya acción aumenta la velocidad del ion u_+; sin embargo, a medida que aumenta la velocidad u_+, aumenta la fuerza de rozamiento k_+u_+ y en un momento determinado alcanza una magnitud tal, que la parte de la derecha de la ecuación (1) es igual a cero:

$$qE - k_+u_+ = 0;$$

y entonces será igual a cero la aceleración w_+, por consiguiente la velocidad adquiere un valor constante, igual a

$$u_+ = \frac{qE}{k_+}. \tag{2}$$

De aquí obtenemos que la velocidad del movimiento orientado uniforme del ion u_+ es proporcional a la intensidad del campo eléctrico E.

Una ecuación análoga se obtiene para la velocidad u_- del ion negativo:

$$u_- = \frac{qE}{k_-}, \tag{2a}$$

donde k_- es el coeficiente de rozamiento del ion negativo.

La corriente en el electrólito la creará el movimiento de iones de ambos signos. El número de iones de cada signo por unidad de volumen del electrólito será igual a αn_0; por lo tanto, la densidad de la corriente, que es la suma de las densidades de las corrientes creadas por el movimiento de los iones positivos en el sentido del campo, y el de los negativos, en sentido contrario, será

$$i = i_+ + i_- = q\alpha n_0 u_+ + q\alpha n_0 u_- = q\alpha n_0 (u_+ + u_-), \tag{3}$$

donde q es la carga que lleva cada ion.

Llamaremos *concentración equivalente* η a la magnitud igual al número de equivalentes-gramo del soluto por unidad de volumen de la solución. Por lo tanto, $\eta = \frac{n_0}{N}$, donde n_0 es el número de moléculas del soluto por unidad de volumen, y N' es el número de moléculas del equivalente gramo. Multiplicando y dividiendo por N' el producto qn_0, tenemos que $qn_0 = qN' \frac{n_0}{N'}$. Pero, según lo dicho, $\frac{n_0}{N'} = \eta$, y $qN' = F$, donde F es el faraday. De donde

$$qn_0 = \eta F.$$

Colocando este valor de qn_0 en la (3), tenemos

$$i = F\eta\alpha(u_+ + u_-),$$

o, colocando en vez de las velocidades de los iones u_+ y u_- sus valores según las (2) y (2a):

$$i = F\eta\alpha \left(\frac{q}{k_+} + \frac{q}{k_-} \right) E. \tag{4}$$

Las relaciones q/k_+ y q/k_-, que numéricamente son iguales a las velocidades de los iones cuando la intensidad del campo $E=1$, se denominan *movilidades iónicas*. Designémoslas por u_+^0 y u_-^0. Entonces, la ecuación (4) se escribirá así:

$$i = F\eta\alpha (u_+^0 + u_-^0) E. \tag{4a}$$

La magnitud $F\eta\alpha (u_+^0 + u_-^0)$ es constante para la solución dada. Como según la ley de Ohm, la densidad de la corriente es $i = \sigma E$, la ecuación (4a) expresará la ley de Ohm para el caso de la conducción electrolítica. La conductibilidad σ del electrólito será:

$$\sigma = F\eta\alpha (u_+^0 + u_-^0). \tag{5}$$

www.elsolucionario.org

La ecuación (5) indica que la conductibilidad eléctrica del electrólito es proporcional al grado de disociación α y a la suma de las movilidades iónicas $(u_+^0 + u_-^0)$.

El grado de disociación α depende de la concentración de la solución; por eso la dependencia de σ respecto a η expresada en la fórmula (5) es de carácter complejo. Para un disolvente puro, la conductibilidad eléctrica $\sigma = 0$, ya que la concentración η es igual a cero. Después, con el aumento de η, la conductibilidad eléctrica aumenta y alcanza un máximo. En las soluciones concentradas, σ disminuye de nuevo, ya que disminuye el grado de disociación α. En la fig. 145 se representa la dependencia de σ en función de la concentración de una solución de ácido sulfúrico con agua.

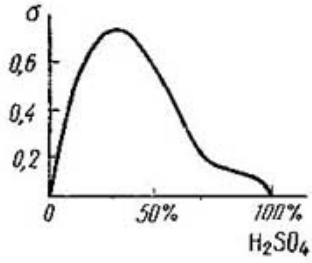


Fig. 145. Dependencia entre la conductibilidad eléctrica σ y la concentración de la solución de ácido sulfúrico en agua.

La magnitud σ/η se denomina *conductibilidad (conductancia) equivalente*. Designémosla por Λ, entonces, según la (5):

$$\Lambda = F\alpha(u_+^0 + u_-^0). \qquad (6)$$

El faraday F es una magnitud constante, la suma de las movilidades iónicas $u_+^0 + u_0^-$ del electrólito dado, también es una magnitud constante, por eso, según la (6),

$$\Lambda = C\alpha, \qquad (6a)$$

donde C es una constante. De esta manera tenemos que la conductibilidad equivalente es proporcional al grado de disociación α. Para una solución muy débil, $\alpha = 1$, de donde $\Lambda = C$, es decir, en las soluciones débiles la conductibilidad equivalente deja de depender de la concentración. Designemos este valor constante de la conductibilidad equivalente por Λ_∞, entonces de la fórmula (6a) obtenemos que:

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty},$$

de aquí que el grado de disociación α se pueda determinar en función de las conductibilidades equivalentes a la concentración dada y cuando la concentración es muy débil.

El valor Λ_∞ está directamente relacionado con la suma de movilidades de los iones. Efectivamente, de la (6) tenemos

$$\Lambda_\infty = F(u_+^0 + u_-^0).$$

De aquí, determinando la conductibilidad equivalente de una

concentración muy débil, se puede hallar la suma de movilidades iónicas.

Para determinar las propias movilidades iónicas, hay que saber, además, la relación u_+^0/u_-^0. Esta relación se puede hallar basándose en los siguientes razonamientos y cálculos. El número de iones de cada signo por unidad de volumen n_0 se ha considerado igual para todas las partes del electrólito. Sin embargo, debido a la distinta movilidad de los iones, su número variará con el tiempo de diferente manera en las proximidades del cátodo y en las del ánodo.

Sea una solución tan débil, que la disociación resulte completa ($\alpha=1$) y, por consiguiente, el número de pares de iones por unidad de volumen n_0' es igual al número de moléculas del soluto n_0 por unidad de volumen. Entonces, al principio, junto al cátodo habrá n_0 iones positivos por unidad de volumen (y otros tantos negativos). Al fluir la corriente, los iones positivos empiezan a llegar al cátodo, y los negativos, a alejarse del mismo. Todos los iones positivos que llegan de nuevo al cátodo, se depositan en él, por lo tanto no hay necesidad de tenerlos en cuenta. En lo que se refiere a los iones negativos, en un intervalo de tiempo t, de cada unidad de volumen del espacio que hay junto al cátodo, se alejan $n_0 u_- t$ iones. Debido a ello, otros tantos iones positivos se quedan sin formar par y se depositan en el cátodo.

De esta manera, en el tiempo t, el número de pares de iones en las proximidades del cátodo disminuye en $n_0 u_- t$ pares, y quedarán

$$n_{0t}^{(K)} = n_0 - n_0 u_- t = n_0 (1 - u_- t).$$

Por consiguiente, en el tiempo t, el número de pares de iones junto al cátodo ha variado en la relación

$$\frac{n_{0t}^{(K)}}{n_0} = 1 - u_- t. \qquad (7)$$

De la misma manera obtenemos que en el tiempo t, el número de pares de iones junto al ánodo varía según la relación

$$\frac{n_{0t}^{(A)}}{n_0} = 1 - u_+ t. \qquad (7a)$$

Como la disociación es completa, como se ha supuesto, el número de pares de iones por unidad de volumen es igual al número de moléculas disueltas en la unidad de volumen, y este último número es proporcional a la concentración equivalente η. De aquí que, según la (7):

$$\frac{\eta_t^{(K)}}{\eta_0} = 1 - u_- t, \qquad (8)$$

donde $\eta_t^{(K)}$ es el valor de la concentración equivalente en las proximidades del cátodo al cabo del tiempo t después de empezar la electrólisis, y η_0, el valor inicial de la concentración equivalente. De la (7a) también se deduce que:

$$\frac{\eta_t^{(A)}}{\eta_0} = 1 - u_+ t, \tag{8a}$$

donde $\eta_t^{(A)}$ es el valor de la concentración equivalente en las proximidades del ánodo al cabo del tiempo t después de empezar la electrólisis.

De las ecuaciones (8) y (8a) obtenemos que:

$$\frac{u_+}{u_-} = \frac{\eta_0 - \eta_t^{(A)}}{\eta_0 - \eta_t^{(K)}};$$

y ya que la movilidad de los iones u_+^0 y u_-^0 es proporcional a la velocidad de los mismos, tenemos que

$$\frac{u_+^0}{u_-^0} = \frac{\eta_0 - \eta_t^{(A)}}{\eta_0 - \eta_t^{(K)}}. \tag{9}$$

De la ecuación (9) se ve que examinando el grado de disminución de la concentración de las soluciones junto a los electrodos debido a la electrólisis, se puede hallar la relación de las movilidades iónicas. Utilizando las fórmulas (5) y (9), se pueden determinar las propias movilidades iónicas.

Los valores de las movilidades u_+^0 y u_-^0 de algunos iones se dan en la tabla VII.

Tabla VII

Movilidades iónicas (en cm²/seg·V)

Iones	u^0	Iones	u^0
H	0,003263	OH	0,001802
K	0,000669	Cl	0,000677
Na	0,000450	NO_3	0,000639

En la tabla VII se ve que para intensidades del campo prácticamente asequibles (E del orden de varios voltios por cm), las velocidades de los iones son muy pequeñas sin llegar a superar unas milésimas de centímetro por segundo.

En las soluciones concentradas, la movilidad iónica es menor que en las débiles. En las soluciones concentradas no se puede despre

www.elsolucionario.org

ciar la influencia del campo formado por los demás iones y limitarse solamente a considerar el campo exterior.

El movimiento de los iones se puede demostrar directamente utilizando iones que tiñan las soluciones. En un tubo en forma de U con dos electrodos de platino, *K* y *A* (fig. 146), se vierten dos soluciones diferentes de igual densidad: debajo, una solución de permanganato potásico ($KMnO_4$), que posee un intenso color violeta, y arriba, una solución incolora de nitrato potásico (KNO_3). Al hacer pasar una corriente a través del tubo, la superficie fronteriza de la solución teñida de los iones MnO_4 se desplaza sensiblemente hacia el ánodo.

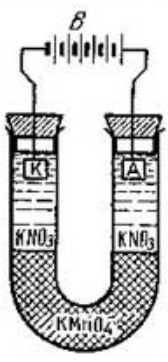


Fig. 146. Observación de la movilidad de los iones.

§ 179. Polarización de los electrodos. Supongamos que en un electrólito cualquiera se han introducido dos electrodos metálicos iguales, por ejemplo, dos placas de platino en una solución acuosa de vitriolo azul. Esta combinación, como ya se ha indicado, no crea f.e.m. alguna; la creará cuando introduzcamos en el electrólito dos conductores *diferentes* de primera clase.

Pero hagamos pasar por nuestra solución de vitriolo azul con electrodos de platino, una corriente conectando los electrodos a cualquier manantial exterior de f.e.m., por ejemplo, a una pila. En este caso, en el electrodo de platino que sirve de cátodo, se deposita cobre, y en el del ánodo, el ion SO_4^{--}; este ion entra en reacción con el agua formando ácido sulfúrico (H_2SO_4) y desprendiendo oxígeno en el electrodo.

Como consecuencia de ello se altera la simetría de los electrodos: uno de ellos resultará cubierto de una capa de cobre, y el otro, de una película de oxígeno. En este momento, los electrodos sumergidos en la solución no serán iguales y formarán una pila, con su f.e.m. $\mathscr{E}$, denominada *pila de polarización*.

Si la desconectamos de la fuente exterior de f.e.m. y cerramos el circuito con una resistencia cualquiera, la pila nos dará una corriente que fluirá hasta que no se restablezca el equilibrio de los electrodos, es decir, hasta que no se descargue la pila debido a las reacciones en sentido inverso que se producen en la misma.

Una alteración análoga de la simetría primitiva que tienen los electrodos del mismo material, se efectuará cada vez en la electrólisis de soluciones. El cambio que se produce en los electrodos en este caso, se denomina *polarización de los electrodos*, y la f.e.m. que se crea, f.e.m. *de polarización*. En la realidad, la polarización no siempre se desarrolla de la manera inversa indicada: después de

lescargar la pila, el estado inicial puede que no se haya restablecido ›or completo.

La existencia de una f.e.m. de polarización nos conduce a una ierie de importantes conclusiones.

En primer lugar podemos examinar la cuestión de cómo se puede ıplicar la ley de Ohm a los electrólitos.

Al pasar una corriente por un conductor de primera clase, la ntensidad I de la corriente, la diferencia de potencial V_1-V_2 en los extremos del conductor y su resistencia R se relacionan, según

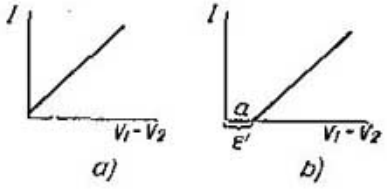


Fig. 147. Dependencia entre la intensidad de la corriente I y la diferencia de potencial: a) conductor de primera clase, b) conductor de segunda clase (electrólito).

a ley de Ohm, de la manera siguiente:

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}, \tag{1}$$

le donde la relación entre la intensidad de la corriente y la diferen- ;ia de potencial, gráficamente se representará por una recta que pase ›or el origen de coordenadas (fig. 147,*a*).

Al pasar una corriente por un electrólito, la diferencia de poten- ;ial de los electrodos V_1-V_2 (que consideramos hechos del mismo material) solamente en el primer momento será igual al producto IR; al cabo de un intervalo de tiempo, debido a la polarización de os electrodos, para mantener la misma intensidad I de la corriente ıabrá que aplicarle una diferencia de potencial

$$V_1-V_2=IR+\mathcal{E}'. \tag{2}$$

En correspondencia con ello, la dependencia entre la intensidad I le la corriente y la diferencia de potencial V_1-V_2 se expresará con la ecuación:

$$I=\frac{V_1-V_2}{R}-\frac{\mathcal{E}'}{R}, \tag{3}$$

es decir, gráficamente no se representará con una recta que pase por el origen de coordenadas, como en el caso de la ley de Ohm habitual expresada por la (1), sino con una recta que corta al eje de abscisas en el punto a de coordenada igual a $\mathcal{E}'$ (fig. 147,*b*).

El trabajo realizado por la corriente que pasa por el electrólito durante un tiempo t, según la ecuación (2), será

$$A = I\ (V_1 - V_2)\, t = I^2 Rt + \mathscr{E}' It, \qquad (4)$$

pero I^2Rt es la cantidad de calor Q desprendida del electrólito, de donde

$$A = Q + \mathscr{E}' It \qquad (5)$$

es decir, además del trabajo invertido en el desprendimiento del calor Q, *en la electrólisis se realiza otro trabajo complementario* $A' = \mathscr{E}' It$.

La corriente eléctrica no produce la descomposición del electrólito. El soluto se disocia en iones en el proceso de disolución. Al pasar la corriente solamente se depositan iones en los electrodos. No obstante, ya en el § 164 hemos visto que entre el conductor sumergido en el electrólito y el mismo electrólito surge una diferencia de potencial, debida a la cual sobre los iones próximos al electrodo actúan fuerzas eléctricas. Para depositarse en el electrodo, los iones deben vencer cierta barrera potencial. Precisamente para salvar esta barrera potencial se invierte el trabajo $A' = \mathscr{E}' It$. El trabajo invertido en el desprendimiento del calor de Joule-Lenz $Q = I^2Rt$, se puede hacer lo pequeño que se quiera; para ello solamente hay que hacer muy pequeña la resistencia R, lo cual se puede conseguir utilizando grandes electrodos y colocándolos muy cerca uno de otro. Pero no se puede prescindir por completo del trabajo A': su valor lo determina la composición del electrólito y la sustancia de que se hacen los electrodos. La magnitud $\mathscr{E}'$ es igual a la f.e.m. de polarización solamente en los casos cuando la polarización de los electrodos es reversible. Sin embargo, en la mayoría de los casos esta magnitud es mayor que la f.e.m. de polarización. Para que empiece el proceso de precipitación de los iones dados en el electrodo, se necesita cierta "sobretensión". Esta sobretensión puede llegar a ser de varias décimas de voltio. Así, en el caso de la polarización reversible de los electrodos, para comenzar la electrólisis de una solución acuosa de ácido sulfúrico, se necesitaría una diferencia de potencial en los electrodos de 1,22 V; sin embargo, en la realidad, siendo los electrodos de platino puro, la electrólisis (que en este caso conduce a la descomposición del agua) empieza solamente a 1,64 V.

La diferencia de potencial de los electrodos a que empieza la precipitación de los iones dados, se denomina *tensión* (o *potencial*) *de descomposición*. La diferencia de tensiones de descomposición para distintos iones permite separar de una solución que contenga diferentes iones de un mismo signo (por ejemplo, iones Cu^+ y Zn^+), iones de una misma clase. Esta circunstancia es de gran importan-

www.elsolucionario.org

cia en la aplicación técnica de la electrólisis para obtener metales puros.

La segunda consecuencia que se deduce de la existencia de la polarización de los electrodos, que estamos examinando en este párrafo, es el descenso de la f.e.m. de la pila después de empezar a funcionar. Al cerrar el circuito exterior de la pila con una resistencia, por la pila pasa una corriente y se produce la descomposición del electrólito, con lo cual los electrodos se polarizan y se crea una f.e.m. de polarización que disminuye la f.e.m. inicial $\mathcal{E}$ de la pila. Además, los cambios que se producen en la pila, aumentan su resistencia interna. Por ejemplo, cuando se desprenden en uno de los electrodos burbujas de hidrógeno, la resistencia interna de la pila aumenta en mucho.

Para evitar la acción nociva de la f.e.m. de polarización, la pila debe ser una combinación de conductores de primera y de segunda clase que no permita la polarización de los electrodos. En la *pila Daniell* se consigue esto colocando las placas de cobre y de zinc en distintas soluciones separadas con una membrana porosa (fig. 104). Con ello, al funcionar la pila se produce solamente una disolución de la placa de zinc y una sedimentación de cobre en la placa de cobre, lo cual no conduce a ningún cambio de las sustancias de las propias placas. No obstante, la inevitable difusión de las soluciones a través de la membrana porosa, limita el tiempo de funcionamiento de la pila Daniell y la hace poco útil.

En la *pila de Leclanché*, el hidrógeno que se desprende en las proximidades del cátodo, reacciona con el bióxido de manganeso, con lo cual se evita la polarización del electrodo de carbón.

Respecto a la compleja construcción de la pila patrón (§ 167), hay que decir que con esta combinación de electrodos y electrólitos prácticamente se evita la polarización. La fuerza electromotriz de una pila patrón no varía con el tiempo en su funcionamiento.

§ 180. Aplicaciones técnicas de la electrólisis. 1. Acumuladores. Como hemos visto en el § 179, dos electrodos metálicos iguales sumergidos en un electrólito se polarizan al pasar por ellos una corriente y forman una pila que, por cierto tiempo, puede servir de manantial de corriente. De esta manera, construyendo un sistema de dos conductores iguales de primera clase y uno de segunda (electrólito), obtenemos un *acumulador*, es decir, un aparato capaz de acumular energía eléctrica.

No obstante, para que el acumulador resulte prácticamente útil debe satisfacer dos condiciones: a) la polarización de los electrodos debe ser estable, b) los procesos (reacciones) que transcurren en el acumulador deben ser reversibles. La primera condición es necesaria para que el acumulador no se descargue por sí solo cuando no

suministre corriente; la segunda, para que no se produzcan cambios que le hagan inservible en el funcionamiento ulterior.

El primer acumulador técnico estaba compuesto de dos placas de plomo sumergidas en una solución acuosa de ácido sulfúrico (H_2SO_4). Las placas de plomo, reaccionando con el ácido sulfúrico, se cubren de una capa superficial de sulfato de plomo $PbSO_4$. Al hacer pasar una corriente de un generador por un acumulador (carga del acumulador), los iones negativos SO_4^{--} se desplazan hacia el ánodo y transforman el sulfato de plomo en bióxido de plomo (óxido pulga) según la fórmula:

$$PbSO_4 + SO_4^{--} + 2H_2O = PbO_2 + 2H_2SO_4 + 2e.$$

Los iones positivos de hidrógeno se desplazan hacia el cátodo y reducen el sulfato según la fórmula:

$$PbSO_4 + 2H^+ + 2e = Pb + H_2SO_4.$$

De esta manera se crea una marcada asimetría de los electrodos: uno de plomo y el otro de bióxido de plomo. En este momento el acumulador está "cargado" y se convierte en una pila generadora de corriente.

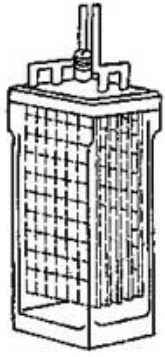


Fig. 148. Acumulador de plomo.

Al ceder la corriente a un circuito exterior, *el acumulador se descarga*, y las reacciones se realizan en sentido inverso. Al final de la descarga, ambas placas resultan cubiertas de una misma capa de sulfato de plomo, y la f.e.m. del acumulador se reduce hasta cero.

El acumulador descrito no es rentable porque las reacciones que se producen solamente atañen a las superficies de las placas, por eso la energía acumulada es insignificante. El acumulador se descarga muy pronto. Para aumentar la *capacidad del acumulador*, es decir, la cantidad de energía retenida, se recurre a diferentes métodos. En los acumuladores actuales de plomo (fig. 148), el electrodo positivo es una placa estriada de plomo, cuya superficie se forma cargándola y descargándola varias veces. El electrodo negativo tiene forma de parrilla de plomo, cuyas celdas se cubren de una pasta de óxido de plomo. Al cargarlo, el óxido de plomo se reduce y se forma plomo. La fuerza electromotriz de un acumulador de éstos, al cargarlo se eleva primeramente hasta 2,1 V, después se conserva durante mucho tiempo constante y al final de la carga se eleva rápidamente hasta 2,7 V. Después de esto, cesan las reacciones en los electrodos y empiezan a desprenderse violentamente burbujas de gas: se dice que el acumulador "hierve". Con ello se termina la cárga del acumulador. En la descarga, el proceso va en sentido inverso:

primeramente la f.e.m. desciende rápidamente desde 2,7 V hasta 2,1 V, después se mantiene mucho tiempo constante. Al final de la descarga, la f.e.m. de nuevo empieza a disminuir. Por lo común no se deja que descienda del valor de 1,85 V, ya que si se descarga más, empieza un proceso irreversible de formación de sulfato de plomo, con lo cual se estropea el acumulador.

Se llama *capacidad de un acumulador* la cantidad de electricidad que suministra al descargarlo desde 2,7 V hasta 1,85 V. Esta capacidad generalmente se mide en *amperios horas* (1 amperio hora = 3 600 culombios).

El *rendimiento* de un acumulador es la relación entre la energía que cede al descargarlo y la energía invertida en su carga. El rendimiento de los acumuladores actuales de plomo llega a ser de 80%.

Según sean las exigencias técnicas, los acumuladores se agrupan en baterías de diferentes dimensiones. Las grandes baterías de acumuladores tienen una capacidad de centenares y millares de amperios horas y suministran una f.e.m. de centenares de voltios. La aplicación técnica de los acumuladores es muy diversa.

En la actualidad, junto a los acumuladores de plomo, se utilizan *acumuladores alcalinos ferro-níquel*. El cátodo de estos acumuladores es de placas de hierro poroso. El ánodo es de hidróxido de níquel [$Ni(OH)_3$]. El electrólito es una solución alcalina (KOH). Los acumuladores ferro-níquel poseen una f.e.m. $\mathcal{E} = 1{,}45$ V; su rendimiento es menor que el de los acumuladores de plomo sin pasar de un 60%; pero son más ligeros que los de plomo, más sencillos en su manejo y capaces de soportar durante breves momentos corrientes muy intensas (los acumuladores de plomo se estropean si las corrientes de descarga son muy intensas).

2. Electrometalurgia. La electrólisis se utiliza para distintos fines en la metalurgia. El más extendido es la obtención de aluminio y de cobre puro.

El cobre obtenido en la fundición de minerales, generalmente contiene azufre (CuS y Cu_2S). De este cobre se hacen los ánodos; el electrólito es una solución de ácido sulfúrico. En este caso, en el cátodo se deposita cobre bastante puro (llamado "cobre electrolítico").

El aluminio utilizado en la técnica moderna se obtiene enteramente de la electrólisis de sus sales fundidas. El electrólito es un fluoruro doble de aluminio y sodio (criolita) con alúmina *). Los electrodos son láminas de carbón. El fluoruro se mantiene fundido debido al calor desprendido al pasar la corriente. Las fábricas de producción de aluminio suelen estar cerca de las centrales hidroe-

*) En la mayoría de los casos, la materia prima para la obtención del aluminio es la *bauxita*, mineral que contiene un 50—60% de alúmina (Al_2O_3).

www.elsolucionario.org

léctricas, que son manantiales de energía eléctrica barata. A través de los crisoles en que se produce la electrólisis, se hace pasar una corriente de decenas de millares de amperios.

Por electrólisis también se obtienen el magnesio, el sodio y otros metales alcalinos.

3. Galvanoplastia. B. Yakobi (Moritz Hermann von Jacobi), académico de la Academia de Ciencias de Petersburgo, fue el primero en utilizar en 1837 la electrólisis para obtener objetos de cobre en relieve de delgadas películas; el proceso descubierto por Yakobi se denominó *galvanoplastia*. Primeramente se hace un modelo de cera o de otro material plástico del objeto que se desea, y se recubre de grafito para comunicarle conductibilidad. Este modelo se utiliza como cátodo en un baño electrolítico de vitriolo azul; el ánodo es una placa de cobre. En el modelo se deposita una película de cobre, cuyo espesor depende de la duración de la electrólisis. Después, la película obtenida se puede separar del modelo.

La electrólisis se utiliza también para cubrir un objeto de material dado con una capa de otro material cualquiera (metal). De esta manera se ha extendido el niquelado electrolítico. La galvanoplastia es de gran importancia en la técnica de preparación de los clisés para los grabados de los libros y de otros impresos.

4. Obtención de delgadas superficies aislantes. Al hacer pasar una corriente entre dos electrodos, uno de aluminio y el otro de plomo, sumergidos en una solución de un borato alcalino, la corriente pasará si el cátodo es de aluminio. Si hacemos el ánodo de aluminio, éste se cubrirá de una película muy delgada aislante de óxidos y la intensidad de la corriente disminuirá hasta cero. La película soporta una diferencia de potencial de 40 V.

La obtención de esta clase de películas se utiliza en la práctica para dos fines: 1º, para *rectificar la corriente alterna* (véase el § 237), y 2º, para la obtención de *condensadores de gran capacidad*. En este último caso, entre las delgadas películas de aluminio se coloca papel impregnado de electrólito. Al hacer pasar la corriente, una de las hojas de aluminio se cubre de una película aislante y de esta manera, esta hoja con el electrólito forma un condensador. Debido al pequeño espesor de la película aislante, la capacidad del condensador resulta muy grande. Prácticamente, estos *condensadores electrolíticos*, siendo de pequeñas dimensiones, pueden alcanzar capacidades de 10^{-2} F.

§ 181. Conducción electrolítica de los sólidos. Las moléculas de las sales se disocian en iones no sólo al disolver las sales, sino también al fundirlas. Como hemos visto en el párrafo anterior, la

electrólisis de las sales fundidas de aluminio, magnesio, sodio y otros metales, se utiliza en gran escala en la industria. La conducción electrolítica de estas sales fundidas, en realidad no se diferencia de la conducción de las soluciones. No obstante, las sales sólidas también revelan poseer conducción electrolítica. Un ejemplo característico de ello es la sal gema.

Como se sabe, los cristales de la sal gema son un modelo de la red cristalina iónica (véase el t. I, § 87). Los iones positivos de sodio y los negativos de cloro se distribuyen según los nudos de la red cúbica. A las temperaturas habituales, la sal gema es un buen aislador; pero a elevadas temperaturas, a partir de los 600° C, conservándose aún en estado sólido (la temperatura de fusión de la sal gema es de 780° C), revela cierta conductibilidad. Cubriendo con láminas metálicas dos caras opuestas del cristal de sal gema, aplicándoles una diferencia de potencial y calentando el cristal en un crisol, se puede observar el paso de corriente eléctrica a través del cristal. Una conducción análoga se observa en los cristales de los haluros de plata, en los de cloruro de plomo, etc.

P. Lukirski, S. Schúkarev y O. Trapéznikova demostraron que al pasar una corriente eléctrica por los cristales sólidos de sal gema, se cumple la ley de Faraday, lo cual es una demostración directa del carácter electrolítico de la conducción.

Esta conducción electrolítica del cristal sólido generalmente produce su destrucción . Así tenemos que en la electrólisis de la sal gema en caliente, en el cátodo se desprende sodio en forma de hilos de color violeta perceptibles a simple vista (la llamada arborescencia), que penetran en el cristal.

La conductibilidad de los cristales aumenta rápidamente con la temperatura. A grandes diferencias de potencial se produce la *perforación*, lo cual conduce a un gran aumento de la intensidad de la corriente. La perforación puede ser debida a un intenso campo eléctrico (de unos 10^6 V/cm), y a un calentamiento local del cristal; en este último caso se denomina perforación térmica. La teoría de la perforación térmica la han elaborado los científicos soviéticos N. Semiónov y V. Fok.

El proceso de desplazamiento de los iones a través de la red cristalina bajo la influencia de un campo eléctrico exterior aún no está del todo aclarado. La hipótesis más sencilla se reduce a considerar que, a elevadas temperaturas, la amplitud de las vibraciones de los iones alrededor de su posición de equilibrio es tan significante que, solicitados por la fuerza eléctrica de un campo exterior, a veces algunos iones cambian de lugar con los vecinos. De otra parte, no obstante, hay que tener en cuenta que la red de cualquier cristal real se diferencia notablemente de la red continua ideal. En el interior del cristal hay muchas grietas microscópicas y otros defectos, los

cuales pueden desempeñar un papel importante en la conductibilidad del cristal.

Más determinado es el carácter electrolítico de la conducción de los cuerpos sólidos como el vidrio, que no poseen estructura cristalina, y más bien se pueden considerar líquidos de gran viscosidad, que sólidos. El vidrio corriente, a la temperatura ordinaria conduce mal la electricidad; pero al calentarlo, se transforma en un conductor relativamente bueno, con la particularidad de que esta conducción tiene carácter electrolítico.

El carácter electrolítico de la conducción del vidrio calentado se puede demostrar fácilmente. La parte inferior de una lámpara eléctrica con filamento de tungsteno (fig. 149), se introduce en una vasija de hierro con nitrato sódico ($NaNO_3$) fundido a la temperatura de unos 300° C. A esta temperatura, el vidrio aún se mantiene bastante sólido y no cede bajo la presión atmosférica. La vasija de hierro se une al polo positivo de un generador y el filamento de tungsteno de la lámpara, al negativo; además, el filamento se caldea alimentado por otro generador de corriente. En estas condiciones, el filamento es un manantial de electrones. Acelerados por el campo eléctrico, estos electrones crean una corriente entre el filamento y el vidrio de la lámpara. Después surge la conducción electrolítica del vidrio calentado y, por último, el circuito se cierra pasando la corriente por el nitrato sódico fundido y por la vasija de hierro. En el vidrio, en dirección hacia el cátodo, se desplazan los iones de sodio, y al cabo de cierto tiempo el interior de la lámpara se cubre de una capa brillante de sodio metálico.

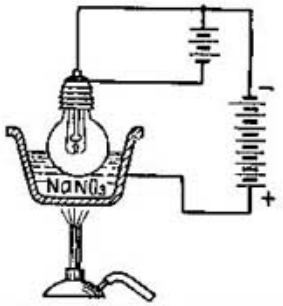


Fig. 149. Observación de la conducción electrolítica del vidrio.

Las observaciones sobre la conducción electrolítica de los cristales permiten determinar la movilidad de los iones. Resulta que en la electrólisis de los haluros de plata sólidos (AgCl, AgBr, AgI), se desplaza solamente el ion positivo de plata, mientras que los de los halógenos permanecen inmóviles. Un fenómeno análogo ocurre en la electrólisis de la sal gema (NaCl), donde a temperaturas no muy elevadas se desplaza solamente el ion Na^+, y a temperaturas más elevadas empieza a desplazarse el ion Cl^-. En la electrólisis del cloruro de plomo ($PbCl_2$) se desplazan solamente los iones de cloro, mientras que los iones del metal permanecen inmóviles en la red cristalina. En el § 154 se ha indicado que ciertos compuestos sólidos, como por ejemplo el Cu_2O (semiconductores), revelan poseer conducción electrónica. Ahora vemos que las sales sólidas (NaCl, AgCl, etc.) poseen conducción iónica. Pero hay sustancias, como el

www.elsolucionario.org

CuI y el Ag_2S, que poseen una conducción mixta: la electricidad en ellos es debida al desplazamiento de iones y de electrones.

§ 182. Paso de la electricidad a través de los gases. Los gases, a las presiones próximas a la atmosférica o mayores, son buenos aisladores. Esto significa que sus moléculas son neutras y que no tienen electrones libres u otros cualesquiera portadores de cargas. No obstante, si en la masa de un gas se crean de cualquier modo, iones (ionización del gas), se hace conductor.

La ionización de un gas se puede provocar térmicamente disociando sus moléculas en una llama, o exponiéndolo a la radiación de los rayos X, de los violeta o de las sustancias radiactivas. Esta conducción se denomina *conducción por agente ionizante*. Además, en los gases (sobre todo en los enra-

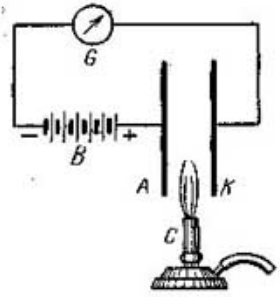


Fig. 150. Conductibilidad del aire en las proximidades de una llama.

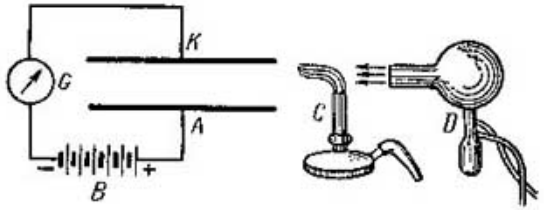


Fig. 151. Arrastre de iones por una corriente de aire.

recidos), se puede mantener la conducción a costa de los iones que se forman en las colisiones de las partículas que acelera el mismo campo eléctrico, origen de la corriente. Esta conducción se denomina *conducción propia*.

La conducción por agente ionizante de los gases se puede demostrar sencillamente. Entre las placas metálicas A y K (fig. 150), con ayuda de la batería B se crea un campo eléctrico de intensidad E. Debido a las buenas propiedades aisladoras del aire, en el circuito $ABGKA$ no se crea corriente y la aguja del galvanómetro G no se inclina. Si entre las placas se coloca la llama de un mechero C, a causa de los iones creados en la llama, el aire que hay entre las placas A y K se hace conductor y el galvanómetro G indica que en el circuito hay corriente.

Se puede demostrar que los iones creados en la llama tienen cierto tiempo (no muy corto) de vida. Para ello se colocan los electrodos A y K horizontalmente y el mechero C a cierta distancia de ellas (fig. 151). En este caso, los iones que se crean en la llama no vienen a parar al espacio que hay entre los electrodos y el aire en

este espacio conserva sus propiedades aisladoras. Pero si con ayuda de un pequeño ventilador D dirigimos la llama hacia este espacio entre los electrodos, entre éstos se crea una corriente. Esto demuestra que parte de los iones, por lo menos, conserva su carga mientras son trasladados por la corriente de aire desde el mechero hasta los electrodos. Según la distancia entre el mechero y los electrodos y según sea la velocidad de la corriente de aire, se puede determinar que la longevidad de los iones es de décimas de segundo.

Las corrientes creadas en las descargas por agentes ionizantes, generalmente son muy débiles, del orden de 10^{-6}—10^{-12} A. Estas corrientes tan débiles se miden generalmente por métodos indirectos, con ayuda del electrómetro de filamento o el de cuadrantes. Se emplean dos métodos de éstos. Uno de ellos se denomina *método de afluencia*. El esquema de este método viene representado en la fig. 152. Entre las placas A y K se ioniza el aire por un método cualquiera y entre ellas se crea una corriente. B es una batería que crea entre las placas un campo que acelera los iones; C y D, las cuchillas del electrómetro de filamento; G, el hilo, cuya deformación (desviación) corresponde al potencial que se le comunica, y B' es la batería que crea esta diferencia de potencial entre las cuchillas del electrómetro. Si el conmutador a tiene la posición indicada en la fig. 152 por la línea de puntos, el hilo del electrómetro estará conectado a tierra Z, su potencial será igual a cero, por lo tanto no se deformará. Si con el conmutador a se desconecta el hilo de la tierra (esta posición del conmutador se representa en la fig. 152 con línea de trazo continuo), las cargas de la placa K afluirán hacia el hilo y éste empezará a deformarse. Supongamos que en el intervalo de tiempo t, cronómetro en mano, el potencial del hilo se ha elevado a V, por lo tanto, la carga Q que se le ha comunicado es

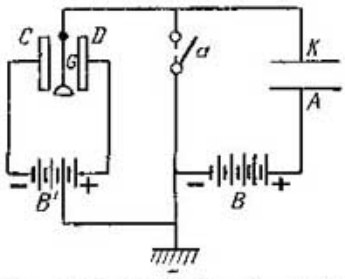


Fig. 152. Medición de corrientes débiles por el método de afluencia.

$$Q = CV,$$

donde C es la capacidad de todo el sistema formado por el electrómetro, las placas A y K y los hilos conductores. La *intensidad media de la corriente* I que fluye en el tiempo t entre las placas A y K, es

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{CV}{t}.$$

Conociendo C y midiendo V y t hallamos la intensidad de la corriente I. Por ejemplo, si la capacidad es $C = 50$ cm $\cong 5{,}5 \cdot 10^{-11}$ F

y el hilo del electrómetro se ha cargado hasta alcanzar el potencial de 0,05 V en 27,5 seg, tendremos que

$$I = \frac{5{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}05}{27{,}5} \text{A} = 10^{-13} \text{A}.$$

Como se ve, este método permite medir corrientes muy débiles, pero tiene un inconveniente, que es el de indicar solamente la intensidad media de la corriente durante el tiempo observado t.

El segundo método se denomina *método de deformación constante*. Consiste en la medición, con ayuda del electrómetro, de la diferencia de potencial de los extremos de una resistencia R muy grande (fig. 153), con la cual se cierra el circuito de las placas A y K (las demás notaciones son las mismas que en la fig. 152). De la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ medida y de la resistencia R, se calcula la intensidad de la corriente I según la ley de Ohm:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}.$$

Por ejemplo, si la resistencia es $R = 100\ \text{M}\Omega = 10^8\ \Omega$ y la diferencia de potencial es $V_1 - V_2 = 0{,}01$ V, la intensidad de la corriente será

$$I = \frac{0{,}01}{10^8} \text{A} = 10^{-10} \text{A}.$$

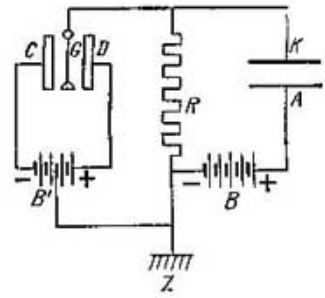


Fig. 153. Medición de corrientes débiles por el método de deformación constante.

Debido a la poca inercia del hilo, este método nos permite medir prácticamente la intensidad de la corriente para el momento dado de tiempo. El inconveniente de este método consiste en la dificultad de realizar la medición exacta de una resistencia muy grande.

La conducción por agente ionizante en los gases a presiones próximas a la atmosférica y mayores, es una conducción iónica.

Si como resultado del proceso de ionización de las moléculas de un gas se desprenden electrones, estos últimos, en la mayoría de los casos, son atraídos inmediatamente por las moléculas y, de esta manera no permanecen libres, sino que forman iones moleculares negativos. Pero si las presiones son pequeñas, los electrones permanecen libres y, en este caso, la conducción del gas es de carácter electrónico.

§ 183. Teoría de la conducción de los gases por agente ionizante. Esta teoría es análoga a la de la conducción en el seno de un electrólito (§ 178).

Supongamos que un agente ionizante, en la unidad de tiempo y en la unidad de volumen del gas crea Δn_0 iones de cada signo. El

www.elsolucionario.org

proceso inverso, *recombinación* de iones, es proporcional al número de iones positivos y negativos por unidad de volumen.

Supongamos que en el momento dado, en la unidad de volumen de un gas hay n_0 iones positivos y otros tantos negativos, entonces, el número de iones que se recombinan por unidad de volumen en la unidad de tiempo será

$$\Delta n_0' = \gamma n_0^2,$$

donde γ es el coeficiente de recombinación.

La condición de equilibrio consiste en la igualdad del número de iones creados de nuevo Δn_0 y el de iones que desaparecen $\Delta n_0'$. Esta condición se escribe de la manera siguiente:

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^2. \tag{1}$$

De aquí que el número de iones (de un signo) n_0 que hay en las condiciones dadas en la unidad de volumen, sea

$$n_0 = \sqrt{\frac{\Delta n_0}{\gamma}}. \tag{2}$$

Supongamos que el gas ionizado se halla entre dos electrodos planos paralelos entre los cuales se crea un campo eléctrico de intensidad E. Bajo la influencia de este campo, los iones se desplazan y crean una corriente. Los iones que alcanzan a llegar a los electrodos, le ceden su carga. Así que, en este caso, la desaparición de iones se produce no sólo a costa de la recombinación en el interior del volumen del mismo gas, sino también a costa de la neutralización de los iones en los electrodos. Los iones alcanzarán los electrodos, además, debido a la difusión; pero en nuestro estudio ulterior despreciaremos este efecto.

Sea I la intensidad de la corriente entre los electrodos; entonces, en el tiempo t se trasladará una carga $Q=It$, y, por consiguiente, el número de iones de un mismo signo que alcance el correspondiente electrodo y le ceda su carga, en el tiempo t, será It/q, y en la unidad de tiempo, será I/q, dondo q es la carga de un ion. Sea S el área de cada una de las placas de los electrodos y l, la distancia entre los mismos. En este caso, el volumen del gas comprendido entre las placas será igual a Sl y, por consiguiente, como resultado del paso de la corriente, el número de iones que se escapan por unidad de tiempo de la unidad de volumen del gas será igual a

$$\Delta n_0'' = \frac{I}{qSl}.$$

Observando que I/S es igual a la densidad de corriente i, esta última ecuación la escribiremos de la siguiente manera:

$$\Delta n_0'' = \frac{i}{ql}.$$

Si hay corriente, la condición de equilibrio no se expresará por la ecuación (1), sino por la necesidad de que el número de iones nuevamente formados Δn_0 sea igual al número total de iones desaparecidos $\Delta n_0' + \Delta n_0''$, de donde

$$\Delta n_0 = \gamma n_0^2 + \frac{i}{ql}. \tag{3}$$

Veamos dos casos límites. Supongamos en primer lugar que la densidad de la corriente es tan pequeña que

$$\frac{i}{ql} \ll \gamma n_0^2, \tag{4}$$

es decir, que el número de iones arrastrados por la corriente se pueda despreciar por ser pequeño en comparación con el de los que desaparecen debido a la recombinación. En este caso volvemos de nuevo a la ecuación (1) y a la (2), que es una consecuencia de la primera, donde vemos que el número de iones n_0 por unidad de volumen de gas es constante. Sea u_+ la velocidad de los iones positivos y u_- la de los negativos. En la unidad de tiempo, al cátodo llegarán $n_0 u_+ S$ iones positivos. Al mismo tiempo, del cátodo saldrán $n_0 u_- S$ iones negativos, con lo cual, en las proximidades del cátodo quedan $n_0 u_- S$ iones positivos no pares. Debido a ello, el número total de iones positivos que se depositan por unidad de tiempo en el cátodo, será de $n_0 (u_+ + u_-) S$; otros tantos iones negativos se depositarán en el ánodo en la unidad de tiempo. Por consiguiente, para la densidad de corriente i, tenemos que:

$$i = q n_0 (u_+ + u_-). \tag{5}$$

Razonando análogamente a como lo hemos hecho al examinar el movimiento de los iones en el electrólito (§ 178), podemos considerar que la velocidad del movimiento uniforme de los iones es proporcional a la intensidad del campo E:

$$u_+ = u_+^0 E, \quad u_- = u_-^0 E;$$

donde las magnitudes u_+^0 y u_-^0 son las *movilidades de los iones gaseosos*, y numéricamente son iguales a las velocidades de los iones cuando la intensidad del campo es igual a la unidad. Colocando en la (5) los valores de las velocidades de los iones u_+ y u_- en función de las movilidades, obtenemos que

$$i = q n_0 (u_+^0 + u_-^0) E. \tag{6}$$

Como las magnitudes q, u_+^0 y $u^0{}_-$ son constantes a las condiciones dadas del experimento, y n_0 también la consideramos constante, si la densidad de la corriente es muy pequeña; resulta que toda la

magnitud $\sigma = qn_0 (u_+^0 + u_-^0)$ también será constante y, por consiguiente, la ecuación (6) expresará la ley de Ohm:

$$i = \sigma E,$$

donde σ es la conductibilidad del gas. Recalquemos otra vez que la ley de Ohm para la conducción del gas por agente ionizante es justa solamente, si la densidad de la corriente i es muy pequeña. El criterio de qué densidad de corriente i se puede considerar suficientemente pequeña lo da la desigualdad (4). Más adelante daremos a esta desigualdad otra definición.

Veamos ahora el segundo caso límite, cuando la densidad de la corriente i es tan grande, que todo el decremento de iones venga determinado, de hecho, por su neutralización en los electrodos, mientras que el decremento debido a la recombinación se pueda despreciar, es decir, cuando

$$\gamma n_0^2 \ll \frac{i}{ql}.$$

Entonces, la ecuación (3) adquirirá la forma:

$$\Delta n_0 = \frac{i}{ql}. \tag{7}$$

Llamando i_s a la densidad de la corriente que satisface la ecuación (7), tenemos que

$$i_s = \Delta n_0 ql. \tag{8}$$

De la ecuación (8) se deduce que la densidad de la corriente i_s no depende de la intensidad del campo E ni, por consiguiente, de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ de los electrodos. La densidad i_s de la corriente es la máxima posible para las condiciones dadas (de Δn_0, q y l) y se denomina *densidad de la corriente de saturación*. De la ecuación (8) se saca una conclusión que puede parecer algo inesperada, a saber, que la densidad de la corriente de saturación i_s es tanto mayor, cuanto mayor sea l, es decir, cuanto más distanciados estén los electrodos. Pero esta conclusión es justa, si la ionización se realiza en todo el espacio que hay entre los electrodos y, por consiguiente, en un espacio tanto mayor, cuanto mayor sea la distancia entre los electrodos l. Así tenemos que si l es muy grande, el número total de iones que se crean, es mayor, a lo cual se debe el aumento de la densidad de la corriente de saturación i_s.

Para los casos comprendidos entre los dos casos límites examinados, el aumento de la intensidad de la corriente I con la diferencia de potencial es más lento que el exigido por la ley de Ohm. Resumiendo podemos decir que en la descarga por agente ionizante en gases, *si la intensidad de la corriente I es mucho menor que la de la*

www.elsolucionario.org

corriente de saturación I_s se cumple la ley de Ohm: la intensidad de la corriente I aumenta proporcionalmente a la diferencia de potencial V_1-V_2 de los electrodos; si es grande la diferencia de potencial V_1-V_2, la ley de Ohm no se cumple y la corriente adquiere el valor de saturación. El carácter general de dependencia entre la intensidad de la corriente I y la diferencia de potencial V_1-V_2 aplicada a los electrodos viene representado gráficamente por la curva *abc* de la

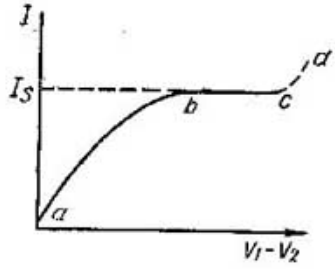


Fig. 154. Dependencia entre la intensidad de la corriente I y la diferencia de potencial V_1-V_2 en el caso de conducción por agente ionizante.

fig. 154. Si la diferencia de potencial V_1-V_2 es muy grande, se produce una chispa (perforación) y la intensidad de la corriente aumenta bruscamente (línea de puntos *cd* de la curva). La existencia de una corriente de saturación en la conducción de los gases por agente ionizante la estableció A. Stoliétov, el cual observó, a través de un gas a poca presión, la descarga surgida debido a los electrones emitidos por el cátodo al ionizarlo con rayos ultravioleta.

Examinemos, además, la distribución de la caída de potencial entre electrodos planos paralelos cuando entre éstos hay un gas ionizado.

Si no hay ionización, según lo dicho en el § 128, la intensidad E del campo en todos los puntos que hay entre los electrodos, es constante y el potencial V disminuirá uniformemente al pasar del electrodo positivo al negativo. Trazando el eje OX perpendicularmente a los electrodos y situando el origen de coordenadas en el plano del electrodo positivo, tenemos que la distribución del potencial V en el espacio entre los electrodos vendrá representada por la recta V_1V_2 (fig. 155).

Si la ionización es uniforme en todo el espacio comprendido entre los electrodos, es decir, cuando en cada unidad de volumen hay la misma cantidad de iones positivos y negativos, el gas, en cualquier volumen grande en comparación con las dimensiones moleculares, será neutro y la distribución macroscópica del potencial seguirá siendo rectilínea. No ocurrirá lo mismo, si hay corriente. En este caso, en las proximidades del ánodo habrá un exceso de iones negativos, y en las proximidades del cátodo, un exceso de iones positivos. En los electrodos se crean unas densidades volumétricas de carga ρ, cuya distribución se representa por la curva I en la fig. 156. La presencia de densidades volumétricas de carga varía la intensidad del campo E, la cual ya no será constante en todo el espacio entre los electrodos.

Según lo dicho en el § 132, la intensidad del campo E está relacionada con la densidad de las cargas mediante la ecuación:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=4\pi\rho,$$

que, para el caso dado cuando E solamente depende de la coordenada x_1, adquiere la forma:

$$\frac{dE}{dx}=4\pi\rho. \qquad (9)$$

En el espacio alejado de los electrodos (región ab de la fig. 156), donde $\rho=0$, según la ecuación (9), la derivada de E respecto a la coordenada es igual a cero, es decir, la propia intensidad del campo E es constante. En las proximidades de los electrodos, donde ρ es diferente de cero, también será distinta de cero la derivada dE/dx; de lo cual se deduce que la intensidad del campo E varía con la

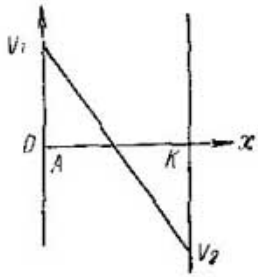


Fig. 155. Distribución del potencial V entre los electrodos cuando no hay ionización.

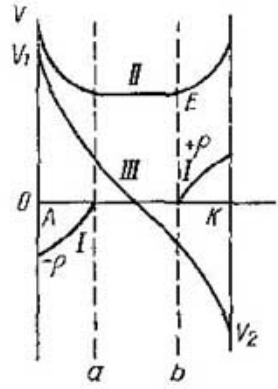


Fig. 156. Distribución entre los electrodos: *I*, de las densidades volumétricas de carga ρ; *II*, de la intensidad del campo E; *III*, del potencial.

coordenada x. Como en las proximidades del ánodo ρ es negativa, según la (9) resultará también negativa dE/dx, es decir, E disminuirá a medida que nos alejemos del ánodo. En las proximidades del cátodo ρ es positiva y aquí aumentará E. En definitiva tenemos la distribución de la intensidad del campo E en el espacio entre los electrodos representada por la curva *II* de la fig. 156.

Por último, examinemos la distribución del potencial V. El potencial V está relacionado con la intensidad del campo mediante la ecuación $E=-\frac{dV}{dn}$ (véase el § 131), de donde, como en el caso que examinamos la normal n coincide con el eje OX,

$$-\frac{dV}{dx}=E.$$

De aquí obtenemos que, en la región ab en que no hay densidades volumétricas de carga y E es constante, será constante también la derivada dV/dx, es decir,

habrá una caída uniforme de potencial. En las proximidades de los electrodos, donde E es mayor que en los lugares alejados de los mismos, la caída de potencial será mayor. La variación general del potencial en el espacio entre los electrodos viene representada por la curva *III* de la fig. 156.

§ 184. Determinación experimental de los coeficientes de recombinación y de movilidad de los iones gaseosos. El coeficiente de recombinación γ y el de movilidad de los iones u^0 se pueden determinar experimentalmente de varias maneras.

Veamos los métodos más directos para determinarlos.

Los coeficientes de recombinación γ para diferentes gases fueron medidos por primera vez al determinar el número de iones de un chorro de gas a diferentes distancias de donde se produce la ionización.

Al cesar la acción del agente ionizante, el número de iones n_0 por unidad de volumen empieza a disminuir con el tiempo debido a su recombinación. Sea n el número de iones por unidad de volumen en el momento t de tiempo dado. Si llamamos $-dn$ al número de iones que desaparecen debido a la recombinación en un pequeño intervalo de tiempo dt, el número de iones que desaparecen por unidad de tiempo será $-\frac{dn}{dt}$; pero, según la definición del coeficiente de recombinación, este número de iones deberá ser igual a γn^2, donde γ es el coeficiente de recombinación:

$$\frac{dn}{dt} = -\gamma n^2 \text{ o } \gamma dt = -\frac{dn}{n^2}. \qquad (1)$$

Contemos el tiempo t a partir del momento en que cesa la acción del agente ionizante. Entonces, para obtener en forma explícita la dependencia entre el número de iones n y el tiempo t, hay que integrar la expresión (1) en los límites desde $t=0$ hasta determinado momento t:

$$\int_0^t \gamma dt = -\int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n^2},$$

donde n_0 es el número de iones por unidad de volumen en el momento en que ha cesado la acción del agente ionizante, y n, el correspondiente al cabo del intervalo t. Integrando obtenemos:

$$\gamma t = \frac{1}{n} - \frac{1}{n_0}, \qquad (2)$$

de donde hallamos que

$$n = \frac{n_0}{1 + \gamma n_0 t}. \qquad (3)$$

La ecuación (3) expresa la ley del decremento del número de iones n con el tiempo después de cesar la acción del agente ionizante.

www.elsolucionario.org

Las mediciones experimentales para determinar el número de iones en el chorro de un gas a diferentes distancias de la región donde se produce la ionización, se basan en la ecuación (2). En cierto volumen limitado se produce una ionización. A través de este volumen se hace pasar un chorro de gas. A la distancia d del lugar de ionización se coloca el electrodo conectado a uno de los polos de una batería, cuyo otro polo está conectado a tierra. Debido al campo eléctrico que surge en las proximidades del electrodo, a éste van a parar iones de un mismo signo. Si el campo es bastante intenso, el número de iones que en la unidad de tiempo van a parar al electrodo, es igual al número de iones contenidos en el volumen de gas que pasa junto al electrodo por unidad de tiempo, es decir, es igual a nSv, donde S es el área del electrodo y v, la velocidad del chorro. De resultas de ello, al electrodo se le comunicará una carga $Q=nSvq$, donde q es la carga de un ion.

Las mediciones se efectúan a dos distancias diferentes d_1 y d_2. Supongamos que a la distancia d_1 se ha medido la carga

$$Q_1 = n_1 Svq,$$

y a la distancia d_2, la carga

$$Q_2 = n_2 Svq.$$

Según la fórmula (2)

$$\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_0} = \gamma t_1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_0} = \gamma t_2,$$

donde t_1 y t_2 son los intervalos de tiempo necesarios al chorro de gas para desplazarse de la región de ionización a los respectivos lugares de las posiciones primera y segunda del electrodo.

De aquí tenemos que

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \gamma (t_2 - t_1), \quad \text{pero} \quad t_2 - t_1 = \frac{d_2 - d_1}{v},$$

donde v es la velocidad del chorro. Por consiguiente,

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \gamma \frac{d_2 - d_1}{v}.$$

Sustituyendo n_2 y n_1 por sus valores en función de Q_1 y Q_2, hallamos que

$$\left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}\right) Svq = \gamma \frac{d_2 - d_1}{v},$$

de donde obtenemos que

$$\gamma = Sq \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}\right) \frac{v_2}{d_2 - d_1}. \qquad (4)$$

Midiendo Q_1, Q_2 y v, y conociendo S, q y d_2-d_1, por la fórmula (4) hallamos el coeficiente de recombinación γ.

El coeficiente de recombinación γ se determina de la relación $\gamma=\frac{\Delta n_0'}{n_0^2}$, donde $\Delta_0' n$ es el número de iones que desaparecen por unidad de volumen en la unidad de tiempo, y n_0, el número de iones por unidad de volumen. Por consiguiente, la dimensión de γ será L^3T^{-1} y se puede medir en $cm^3 seg^{-1}$. Los valores de γ para diferentes gases se dan en la tabla VIII.

Tabla VIII

Coeficiente de recombinación (en $cm^3 \cdot seg^{-1}$) a la presión de 1 atm y a la temperatura de 18° C

Gas	$\gamma \cdot 10^6$
Aire	1,67
Oxígeno	1,61
Hidrógeno	1,44
Oxido de carbono Co	0,87

El coeficiente γ depende muy poco de la presión, disminuyendo solamente a presiones muy bajas. Con el aumento de la temperatura, γ disminuye.

Para tener idea del orden de las magnitudes con que hay que operar en la conducción por agente ionizante y en la ionización de los gases, resolvamos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 1. Entre dos electrodos planos de área $S=100$ cm² cada uno y que se hallan a la distancia $l=5$ cm uno de otro, se observa, al ionizar el gas mediante los rayos X, una corriente de saturación $I_s=10^{-7}$ A.

Determinar el número de pares de iones Δn_0 creados por los rayos X en 1 cm³ durante 1 seg, y el mayor número posible de pares de iones n_0 en 1 cm³. Los iones creados se consideran monovalentes.

Solución. La densidad de la corriente de saturación i_s será

$$i_s=\frac{I_s}{S}=\frac{10^{-7}}{10^2}\text{A/cm}^2=10^{-9}\text{ A/cm}^2.$$

La carga q de un ion (monovalente) es igual a $1{,}6\cdot10^{-19}$ C, de donde, según la fórmula (8) del § 183, tenemos que

$$\Delta n_0=\frac{i_s}{ql}=\frac{10^{-9}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5}\text{ cm}^{-3}\cdot\text{seg}^{-1}=1{,}25\cdot10^9\text{ cm}^{-3}\cdot\text{seg}^{-1}.$$

El mayor número posible de pares de iones n_0 en 1 cm³ lo hallamos por la fórmula (2) del § 183:

$$n_0=\sqrt{\frac{\Delta n_0}{\gamma}}.$$

Tomando, en correspondencia con la tabla VIII, para el aire $\gamma = 1{,}67 \cdot 10^{-6}$ cm$^3 \cdot$seg^{-1}, tenemos que

$$n_0 = \sqrt{\frac{1{,}25 \cdot 10^9}{1{,}67 \cdot 10^{-6}}}\ \text{cm}^{-3} \cong 2{,}7 \cdot 10^7\ \text{cm}^{-3}.$$

Como a la presión atmosférica en 1 cm^3 hay $2{,}7 \cdot 10^{19}$ moléculas de gas, en nuestro ejemplo, los rayos X son capaces de ionizar una 10^{-12} (billonésima) parte de todas las moléculas. Esta ionización es muy pequeña en comparación con el grado de ionización de los electrólitos, donde en las soluciones débiles se disocian en iones casi todas las moléculas del soluto.

Ejemplo 2. En el aire atmosférico, en las proximidades de la superficie terrestre, debido a la radiactividad del suelo y a la radiación cósmica, por término medio se crean 5 pares de iones por cm^3 en 1 seg. Determinar la corriente de saturación que se obtiene debida a esta ionización natural del aire entre dos electrodos planos de área $S = 100$ cm^2 cada uno, situados a la distancia $l = 5$ cm uno de otro.

Solución. Según la fórmula (8) del § 183:

$$I_s = i_s S = \Delta n_0 q l S.$$

Considerando que los iones que se crean llevan una carga de $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C, obtenemos que

$$I_s = 5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^2\ \text{A} = 4 \cdot 10^{-16}\ \text{A}.$$

De esta manera resulta que el aire atmosférico posee, una sensible conducción natural por agente ionizante, aunque muy débil.

Ejemplo 3. Determinar en cuánto tiempo, en el aire ionizado por rayos X y después de cesar la acción de los rayos, el número de pares de iones disminuye dos veces debido a la recombinación.

El número inicial de iones se considera que es $n_0 = 10^6$ cm^{-3}.

Solución. Suponiendo en la fórmula (3)

$$n = \frac{n_0}{1 + \gamma n_0 t}$$

que el número de iones es $n = \frac{1}{2} n_0$, obtenemos la ecuación que determina el intervalo de tiempo $t = \tau$, durante el cual el número de iones disminuye dos veces debido a la recombinación:

$$\frac{1}{2} n_0 = \frac{n_0}{1 + \gamma n_0 \tau}, \text{ de donde } \tau = \frac{1}{\gamma n_0}.$$

Colocando aquí los valores de $n_0 = 10^6$ cm^{-3} y de $\gamma = 1{,}67 \cdot 10^{-6}$ cm$^3 \cdot$seg^{-1}, obtenemos que

$$\tau = \frac{1}{10^6 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-6}}\ \text{seg} = 0{,}6\text{seg}.$$

Así tenemos que al cabo de 0,6 seg en el gas quedará la mitad del número de iones que había al principio.

Ejemplo 4. Según las condiciones del ejemplo 1, determinar el diámetro eficaz de los iones.

Solución. Recordamos que se denomina diámetro eficaz el de las partículas que determina la longitud de su recorrido libre o el número de colisiones que sufren las partículas en la unidad de tiempo. Este número de colisiones se calcula considerando esferas rígidas a las partículas que chocan.

www.elsolucionario.org

Según el ejemplo 1, en 1 cm³ de gas se crean $\Delta n_0 = 1{,}25 \cdot 10^9$ pares de iones por segundo. En las condiciones de equilibrio, otros tantos pares de iones deben desaparecer de 1 cm³ por segundo como consecuencia de la recombinación. Supongamos que los iones se neutralizan al chocar unos con otros.

Según lo dicho en el § 53 del t. I, la molécula sufre, como término medio, en la unidad de tiempo un número de colisiones igual a

$$\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \pi\sigma^2 \bar{v}\, \bar{n}_0,$$

donde σ es el diámetro eficaz de la molécula, $\bar{v}$, la velocidad media del movimiento térmico de la molécula, n_0, el número de moléculas por unidad de volumen. Aplicando esta fórmula en la determinación del número de colisiones de los iones entre sí, deberemos considerar que n_0 es el número de pares de iones por unidad de volumen. El número total de colisiones que sufren todos los iones comprendidos en una unidad de volumen, será:

$$Z = \bar{z} n_0 = \sqrt{2} \cdot \pi\sigma^2 \bar{v}\, n_0^2.$$

Por la suposición establecida de que el número Z debe ser igual al número de pares de iones recombinados $\Delta n_0'$, tenemos que

$$\Delta n_0' = \sqrt{2}\, \pi\sigma^2 \cdot \bar{v}\, n_0^2,$$

de donde

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Delta n_0'}{\sqrt{2} \cdot \pi\, \bar{v}\, n_0^2}}. \qquad (5)$$

La velocidad del movimiento térmico de los iones es igual a la velocidad del movimiento térmico de las moléculas, es decir, para el aire a la temperatura de la habitación, $\bar{v} \cong 5 \cdot 10^4$ cm/seg. Colocando este valor de $\bar{v}$ en la (5) y suponiendo, en correspondencia con los datos del ejemplo 1, que $\Delta n_0' = 1{,}25 \cdot 10^9$ cm^{-3}·seg^{-1} y $n_0 = 2{,}7 \cdot 10$ cm^{-3}, obtenemos que

$$\sigma = \sqrt{\frac{1{,}25 \cdot 10^9}{1{,}41 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot (2{,}7 \cdot 10^2)^2}}\ \text{cm} \cong 2{,}8 \cdot 10^{-8}\text{cm}.$$

Los diámetros eficaces de las moléculas neutras son magnitudes del orden de $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm; así tenemos que los diámetros eficaces de los iones son aproximadamente 100 veces mayores. Esto es fácil de explicar: al poseer cargas de distinto signo, los iones se atraen recíprocamente por las fuerzas electrostáticas, lo cual acarrea un aumento del número de colisiones entre ellos y, por consiguiente, un aumento de sus diámetros eficaces.

Examinemos un método sencillo de determinación de la movilidad de los iones deteniéndolos con un chorro de gas. En el espacio entre las mallas A_1 y A_2, el gas se somete a una ionización por un agente ionizante exterior cualquiera. Si la malla A_1 está cargada negativamente y la A_2, positivamente, los iones negativos se desplazarán en dirección a la malla A_2 a una velocidad de $u_- = u_-^0 E$, donde u_-^0 es la movilidad de los iones y E, la intensidad del campo entre las mallas. La carga que llevan los iones a la malla A_2 se revela con ayuda del electrómetro. Si ahora empezamos a insuflar gas a través de la malla A_2, en dirección a la A_1, a la velocidad v (como

indican las flechas de la fig. 157), la velocidad de desplazamiento de los iones en dirección a la malla A_2 será $u^0_- E - v$. A medida que aumente la velocidad v de insuflación del gas, la de desplazamiento de los iones se hará menor. Cuando $u^0_- E - v$ sea igual a cero, los iones negativos dejarán de alcanzar la malla A_2 y el electrómetro cesará su carga. Así se puede establecer el momento en que se cumpla la relación $u^0_- E = v$. Y de aquí se determina la movilidad de los iones negativos u^0_- en función de v y de E.

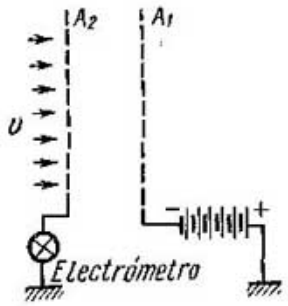


Fig. 157. Esquema de un método muy simple de determinación de la movilidad de los iones.

Variando los signos de las cargas de las mallas A_1 y A_2 se puede determinar exactamente de la misma manera la movilidad de los iones positivos u^0_+.

Los resultados de las mediciones de las movilidades de diferentes iones a la presión del gas igual a una atmósfera se dan en la tabla IX.

La movilidad de los iones en amplios límites es inversamente proporcional a la presión p. La movilidad de los iones positivos no depende de manera sensible de la intensidad del campo E. La movilidad de los iones negativos tampoco depende de E, si los valores de E no son muy elevados; pero a valores grandes de E esta dependencia aumenta con el aumento de E. Así tenemos que, para valores no muy grandes de E, es justa la suposición hecha en el § 183 de la proporcionalidad de la velocidad de los iones respecto a la intensidad del campo.

Tabla IX

Movilidad de los iones (en cm²/seg·V) a la presión de p = 1 atm y a la temperatura de 18° C

Gas	u^0_+	u^0_-	$\frac{u^0_-}{u^0_+}$
Hidrógeno	5,91	8,26	1,4
Oxígeno	1,29	1,79	1,4
Nitrógeno	1,27	1,84	1,4
CO	1,10	1,14	1,0
Cloro	0,65	0,51	0,8

Hay que señalar que la movilidad de los iones, sobre todo de los negativos, depende en alto grado de las impurezas del gas. Una

insignificante cantidad de impurezas, por ejemplo, de oxígeno, varía la movilidad de los iones negativos en decenas, e incluso centenares, de veces. Así, para el helio a la presión de 1 atm, con pequeñas impurezas de oxígeno, $u_-^0=5{,}09$ cm²/seg·V y $u_-^0=6{,}31$ cm²/seg·V. En el helio absolutamente puro, la movilidad de los iones positivos u_+^0 casi no varía, mientras que la de los iones negativos u_-^0 alcanza la enorme magnitud de 500 cm²/seg·V. Esto se explica porque en el helio, en el proceso de ionización, surgen electrones libres, cuya movilidad es muy grande. Si hay impurezas de oxígeno, aunque sea en muy pequeña cantidad, los electrones se unen a las moléculas neutras de oxígeno y forman iones moleculares negativos con su relativamente pequeña movilidad.

Otro método de determinación de la movilidad de los iones consiste en lo siguiente. El gas se ioniza en las proximidades de la superficie del electrodo plano A_1 (fig. 158). Entre los electrodos paralelos A_1 y A_2 se crea un campo que varía periódicamente con el tiempo, de intensidad $E=E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$, donde t es el tiempo, T, el período, y E_0, una magnitud constante. El electrodo A_2 está conectado con el electrómetro B. Veamos cómo se comportan los iones de un mismo signo de mayor movilidad; supongamos que son los negativos. En cada momento dado poseerán la velocidad $u_-=u_-^0 E$. Como la intensidad del campo E varía con el tiempo, también variará la velocidad u_-. Supongamos que en el primer semiperíodo, es decir, en el intervalo de tiempo desde $t=0$ hasta $t=\frac{T}{2}$, el campo E acelera los iones negativos en dirección al electrodo A_2; entonces, en el semiperíodo siguiente los desplazará en sentido contrario, hacia el electrodo A_1. En el intervalo de tiempo desde $t=0$ hasta $t=\frac{T}{2}$, los iones recorrerán el trayecto:

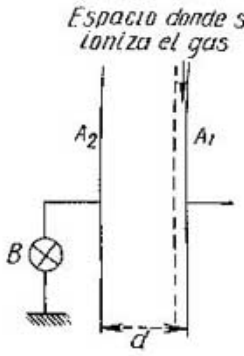


Fig. 158. Esquema del método de determinación de la movilidad de los iones.

$$s=\int_0^{T/2} u_-^0 E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t\,dt = \frac{T}{\pi} u_-^0 E_0.$$

Si s es menor que la distancia d entre los electrodos, los iones creados en las proximidades del electrodo A_1 no llegarán al electrodo A_2 y el electrómetro B conectado con este electrodo no registrará ninguna desviación. Variando el período T se puede conseguir que se verifique la condición de que $s=d$, en que las cargas lleguen al electrodo A_2, lo cual se revela por la desviación del electrómetro. Entonces

$$d=\frac{T}{\pi} u_-^0 E_0,$$

de donde, conocidas las magnitudes T, d y E_0, se halla la movilidad u_-^0 buscada.

Si el período T se hace mayor aún, al electrodo A_2 empezarán a llegar también (en el segundo semiperíodo) los iones positivos, que, según lo supuesto,

www.elsolucionario.org

son más lentos. En este caso, la desviación del electrómetro disminuye. De esta manera se puede hallar, además, la movilidad de los iones del otro signo.

Veamos un ejemplo numérico que determine la función que desempeña la movilidad de los iones.

Ejemplo. Determinar la conductibilidad σ del aire ionizado por rayos X de manera que en 1 cm^3 de aire haya, en las condiciones de equilibrio, $n_0 = 10^7$ pares de iones. La carga de los electrones se considera elemental.

Solución. Según la fórmula (6) del § 183 tenemos que

$$\sigma = qn_0 (u_+^0 + u_-^0).$$

Expresando la carga q en culombios, n_0, en cm^{-3} y u_+^0 y u_-^0, en $cm^2/seg \cdot V$, obtendremos el valor de σ en $\Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$. Considerando que el aire está constituido principalmente de nitrógeno, hallamos que, según la tabla IX, la suma de las movilidades de los iones es

$$u_+^0 + u_-^0 = 1{,}27 + 1{,}84 = 3{,}11 \ cm^2/seg \cdot V.$$

Y conociendo los valores de $n_0 = 10^7 \ cm^{-3}$ y de $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$, hallamos que

$$\sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \cdot 10^7 \cdot 3{,}11 \ \Omega^{-1} \cdot cm^{-1} \cong 5 \cdot 10^{-12} \ \Omega^{-1} \cdot cm^{-1}.$$

Es interesante comparar este resultado con el de la conductibilidad de los metales. Para el cobre, según los datos de la tabla IV de la pág. 136 $\sigma = 6{,}4 \cdot 10^5 \ \Omega^{-1} \cdot cm^{-1}$, de donde se ve que la conductibilidad del aire ionizado, en las condiciones del ejemplo aducido, aproximadamente es 10^{17} veces menor que la del cobre.

La conductibilidad de los electrólitos depende de su composición y concentración. Como ejemplo calculemos la conductibilidad del electrólito obtenido al disolver 2,92 g de sal común, NaCl, en 1 litro de agua.

En el § 85 del t. I se determinó, basándose en la presión osmótica, que en estas condiciones el 0,44 de todas las moléculas de NaCl disueltas se disociaban en iones. Esto significa que el número de pares de iones será el de 0,44 del número de moléculas disueltas. Como el peso molecular de NaCl es igual a 58, el número de moléculas disueltas por unidad de volumen será

$$n_0 = \frac{2{,}92 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{58 \cdot 1000} \ cm^{-3} \cong 3 \cdot 10^{19} \ cm^{-3},$$

de donde el número de pares de iones n_0' por unidad de volumen será

$$n_0' = 0{,}44 \cdot 3 \cdot 10^{19} \ cm^{-3} \cong 1{,}3 \cdot 10^{19} \ cm^{-3}.$$

La conductibilidad σ del electrólito la determinamos utilizando la fórmula (5) del § 178:

$$\sigma = F\eta\alpha (u_+^0 + u_-^0) = n_0' q (u_+^0 + u_-^0).$$

La suma de las movilidades de los iones Na^+ y Cl^- en el electrólito, según la tabla VII de la pág. 241, es

$$u_+^0 + u_-^0 = 0{,}000450 + 0{,}000677 \cong 1{,}1 \cdot 10^{-3} \ cm^2/seg. \ V,$$

de donde

$$\sigma = 1{,}3 \cdot 10^{19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-3} \ \Omega^{-1} \cdot cm^{-1} \cong 2{,}3 \cdot 10^{-3} \ \Omega^{-1} \cdot cm^{-1}.$$

Así tenemos que la conductibilidad del electrólito dado es aproximadamente 10^9 veces mayor que la conductibilidad del aire ionizado de nuestro ejemplo. Esta conductibilidad relativamente grande del electrólito se explica por la gran cantidad de iones por unidad de volumen: en 1 cm^3 del electrólito hay aproximada-

mente 10^{12} veces más iones que en 1 cm^3 de aire ionizado por rayos X; sin embargo, la movilidad de los iones del electrólito es mil veces menor que la de los iones gaseosos.

§ 185. Paso de la corriente electrónica a través del vacío. Como caso límite de conducción por agente ionizante se puede considerar la corriente electrónica a través del vacío, es decir, a través de un espacio en que la presión de los residuos de gas es tan pequeña, que la longitud del recorrido libre medio de los electrones es mayor que la distancia entre los electrodos. En el § 170 se ha visto que la corriente electrónica a través del vacío se puede crear con ayuda de un manantial de electrones como lo es la superficie caldeada de un metal.

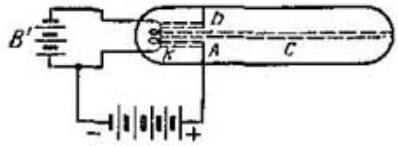


Fig. 159. Obtención del rayo catódico.

La corriente puramente electrónica obtenida en este caso entre el cátodo caliente y el ánodo no cumple la ley de Ohm. Como se ha indicado (pág. 208), para las corrientes de poca intensidad I en comparación con la corriente de saturación I_s, se cumple la fórmula de Boguslavski—Langmuir (véase la deducción en el § 186):

$$I = \alpha (V_1 - V_2)^{3/2}, \qquad (1)$$

según la cual, la intensidad I de la corriente aumenta proporcionalmente a la diferencia de potencial elevada a 3/2. La causa de esta dependencia entre I y $V_1 - V_2$ consiste en la formación de una nube electrónica entre los electrodos. A grandes diferencias de potencial, la corriente alcanza el valor de saturación, que viene determinado por el número n de electrones emitidos por el cátodo en la unidad de tiempo.

Utilizando un cátodo incandescente se puede obtener un flujo de electrones que se desplazan en línea recta. Colocando el ánodo A con un pequeño orificio b (fig. 159) cerca del cátodo K, obtenemos en el espacio C un haz de electrones denominado *rayo catódico*. Este haz electrónico es fácil de revelar por el centelleo (luminiscencia) que produce al incidir contra una serie de cuerpos sólidos, como el vidrio de uranio, la wilemita, el sulfuro de zinc, etc.

Los rayos catódicos fueron observados por primera vez ya a mediados del siglo XIX, pero solamente a principios de nuestro siglo se estableció sin duda alguna que son un flujo de partículas elementales negativas: electrones.

Al desplazarse sin colisiones el electrón solicitado por un campo eléctrico, sobre él actúa una fuerza $f=eE$, donde e es la carga del electrón y E, la intensidad del campo. En este caso, todo el trabajo del campo, $A=e\ (V_1-V_2)$, donde V_1-V_2 es la diferencia de potencial de los puntos inicial y final del trayecto del electrón, se invierte en el aumento de su energía cinética E_c. Si la velocidad inicial del electrón era igual a cero, nos da que

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = e\,(V_1 - V_2). \qquad (2)$$

Como ya se ha indicado en el § 168, la energía del electrón se ha convenido en medirla en unidades especiales de energía denominadas electrón-voltio (abreviadamente eV). Un electrón-voltio es igual a la energía cinética adquirida por el electrón al recorrer un trayecto, cuyos extremos poseen una diferencia de potencial de 1 V.

Como se ha indicado,

$$1\ \text{eV} \doteq 1{,}601 \cdot 10^{-12}\ \text{erg}.$$

En muchos cálculos es conveniente utilizar una unidad N veces mayor, donde N es el número de Avogadro. Esta unidad es la energía por un mol de sustancia y que se puede denominar eV/mol o $\text{eV} \cdot \text{mol}^{-1}$. Está claro que

$$1\ \text{eV/mol} = 1{,}601 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}023 \cdot 10^{23}\ \text{erg/mol} = 9{,}643 \cdot 10^{11}\ \text{erg/mol} = 23055\ \text{cal/mol}.$$

De la ecuación (2) es fácil determinar la velocidad v adquirida por el electrón al recorrer un trayecto, cuyos extremos poseen una diferencia de potencial de V_1-V_2 (la velocidad inicial se supone igual a cero):

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}}\sqrt{V_1 - V_2}. \qquad (3)$$

Colocando en esta ecuación los valores numéricos de la carga e y de la masa m del electrón obtenemos que

$$v\ (\text{cm/seg}) = 5{,}930 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{(V_1 - V_2)\ (V)}. \qquad (3a)$$

Así tenemos que *la velocidad del electrón es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de potencial de los extremos del trayecto recorrido por el electrón*. Al recorrer un trayecto, cuyos extremos poseen una diferencia de potencial de 1 V, el electrón adquiere una velocidad de $5{,}93 \cdot 10^7$ cm/seg.

La fórmula (3) es justa mientras la velocidad del electrón sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz. Cuando el valor de la velocidad del electrón se aproxima al de la luz c, hay que tener en cuenta el aumento de la masa del electrón en correspondencia

www.elsolucionario.org

Tabla X

Velocidad v del electrón que ha recorrido un trayecto, cuyos extremos poseen una diferencia de potencial de $V_1 - V_2$

$V_1 - V_2$, en V	v, en $\frac{cm}{seg}$	$\beta = \frac{v}{c}$
10^2	$5{,}93 \cdot 10^8$	0,0198
10^3	$1{,}88 \cdot 10^9$	0,0626
10^4	$5{,}85 \cdot 10^9$	0,195
10^5	$1{,}64 \cdot 10^{10}$	0,548
$5 \cdot 10^5$	$2{,}59 \cdot 10^{10}$	0,863
10^6	$2{,}82 \cdot 10^{10}$	0,9411

con la teoría de la relatividad (véase el § 218 y también el § 31 del t. I). En la tabla X se dan las velocidades del electrón que ha recorrido un trayecto, cuyos extremos poseen una diferencia de potencial de $V_1 - V_2$, teniendo en cuenta la dependencia entre la masa y la velocidad según el principio de la relatividad. En la tercera columna se da la relación β entre la velocidad v del electrón y la velocidad c de la luz.

Como se ve de los datos de la tabla X, cuando $V_1 - V_2 = 100$ V la velocidad del electrón prácticamente se puede considerar que coincide con la que da la fórmula (3a); sin embargo, cuando la diferencia de potencial es $V_1 - V_2 = 10^6$ V, la velocidad real del electrón es igual a $2{,}82 \cdot 10^{10}$ cm/seg, mientras que por la fórmula (3a), que no tiene en cuenta la teoría de la relatividad, daría para v el valor de $5{,}93 \cdot 10^{10}$ cm/seg, es decir, un valor mayor que el de la velocidad c de la luz, lo cual es imposible.

Los experimentos descritos del haz de electrones nos conducen a concebir los electrones como partículas de carga y masa determinadas que se desplazan según trayectorias determinadas. No obstante, en el § 31 del t. I, al hablar de los límites entre los cuales se puede aplicar la mecánica clásica, se indicó que a las partículas elementales (electrones, protones, etc. individuales) no se pueden aplicar los conceptos aplicables a las "partículas" habituales de la mecánica clásica. La partícula elemental no es una "partícula" en el sentido habitual de la palabra y no se le puede aplicar el concepto de trayectoria. Las partículas elementales se subordinan al principio de incertidumbre, según el cual cada partícula no puede ser al mismo tiempo caracterizada por las coordenadas y por el vector velocidad determinados con la exactitud que se quiera, sino que solamente se puede hacer con cierta imprecisión; así, por ejemplo, la coordenada

x y la componente v_x de la velocidad, se pueden determinar simultáneamente sólo con las imprecisiones Δx y Δv_x que cumplen la condición

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geqslant \frac{h}{m}, \qquad (4)$$

donde m es la masa de la partícula y $h = 6{,}624 \cdot 10^{-27}$ erg.seg, una constante denominada *constante de Planck*.

Después veremos (véase el t. III) que experimentos más rigurosos con los haces de electrones nos llevan precisamente a la relación (4) y entonces nos detendremos a aclarar con más detalle su sentido físico. Ahora solamente señalaremos que ciertos físicos burgueses sacan falsas conclusiones idealistas considerando que de la relación entre Δx y Δv_x, al parecer se desprende que el conocimiento de las partículas elementales es limitado y hay que renunciar a la posibilidad de describir su comportamiento en el espacio y en el tiempo. Lo que en realidad ocurre es que esta relación indica solamente *el límite de aplicación a las partículas elementales de los conceptos de la mecánica clásica*; con lo cual resulta posible aclarar en qué casos se puede operar aproximadamente con el concepto de los electrones como "partículas" de la mecánica clásica.

Es fácil ver que en todos los casos que hemos examinado, el concepto de "haz" de electrones concuerda con la relación (4).

Para ello debemos recordar el ejemplo aducido en el § 31 del t. I. Si la anchura del haz es $\Delta x \cong 10^{-2}$ cm (que en los experimentos descritos no se fija el haz con mayor exactitud), según la relación (4) tendremos que

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m \cdot \Delta x} \cong \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-2}} \text{ cm/seg} \cong 7 \cdot 10^2 \text{ cm/seg}.$$

Pero en un potencial de aceleración de 1 V solamente (en la realidad, en los tubos para obtener haces de electrones, los potenciales de aceleración son mucho mayores), la velocidad del electrón, según la fórmula (3a), es $v \cong 5{,}9 \cdot 10^7$ cm/seg y, por consiguiente, el valor de Δv_x que exige la relación (4), es aproximadamente el 0,001% de la propia velocidad, es decir, está muy por fuera de los límites de la posible exactitud del experimento. De esto se deduce que, en los experimentos descritos, lo mismo que en muchos otros que veremos en este tomo, el electrón se puede considerar una "partícula" habitual.

§ 186. Deducción de la fórmula de Boguslavski — Langmuir. Fluctuación de la intensidad de la corriente. Supongamos, para simplificar, que tenemos dos electrodos planos infinitamente grandes y paralelos (fig. 160). Sea d la distancia entre ellos. Consideremos que el electrodo de la izquierda es el cátodo y su potencial es igual a cero: $V_k = 0$. El potencial del de la derecha (ánodo) será V_a. El cátodo es una fuente de electrones.

Los electrones acelerados por el campo se desplazan de un electrodo a otro ormando una corriente.

Tracemos el eje OX perpendicularmente a los electrodos. Debido a la ituación simétrica de los electrodos, la densidad volumétrica de carga ρ creada or la nube electrónica, solamente dependerá de la coordenada x; las superficies quipotenciales serán paralelas a los electrodos, y los vectores de intensidad del ampo $\mathbf{E}$ tendrán la dirección del eje OX.

El valor de la densidad de la corriente i será igual al de la carga transportada n la unidad de tiempo a través de una superficie unidad.

En el régimen permanente, la densidad de la corriente i es constante respecto al tiempo y tiene el mismo valor para todos los de la coordenada x.

La relación entre la densidad volumétrica de las cargas ρ y el potencial V viene expresada por la fórmula (3) del § 132:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho. \qquad (1)$$

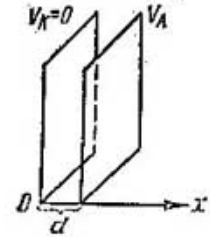


Fig. 160. Representación gráfica para deducir la fórmula de Boguslavski — Langmuir

En el caso que examinamos, el potencial V varía solamente en la dirección perpendicular a los planos de los electrodos, es decir, solamente según el eje OX; por eso, sólo la derivada de V respecto a la coordenada x es diferente de cero, y la ecuación (1) se transformará en:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-4\pi\rho. \qquad (2)$$

En el caso de emisión térmica, las velocidades a que se desprenden los electrones del cátodo se deben al efecto térmico, y son muy pequeñas en comparacion con las adquiridas por los electrones bajo la influencia de los habituales campos eléctricos exteriores. Por eso, aproximadamente consideraremos que las velocidades iniciales de los electrones son iguales a cero. Entonces, los electrones que alcancen entre los electrodos el punto de potencial V, poseerán una velocidad v determinada por la fórmula:

$$\frac{mv^2}{2}=eV. \qquad (3)$$

La densidad i de la corriente se determina en función de la densidad volumétrica de la carga ρ y de la velocidad de los electrones según la ecuación.

$$i=-\rho v. \qquad (4)$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha lleva el signo menos porque la dirección del vector i se compara con la del movimiento de las cargas positivas.

De las fórmulas (2), (3) y (4) hallamos que

$$\frac{d^2V}{dx^2}=4\pi i\sqrt{\frac{m}{2e}}\cdot V^{-1/2}.$$

Multiplicando la parte derecha e izquierda de esta igualdad por $\frac{dV}{dx}dx$, obtendremos que

$$\frac{d^2V}{dx^2}\cdot\frac{dV}{dx}dx=4\pi i\sqrt{\frac{m}{2e}}\cdot V^{-1/2}\cdot\frac{dV}{dx}dx \qquad (5)$$

www.elsolucionario.org

Integrando la ecuación (5) entre los límites 0 y x, tendremos que

$$\int_0^x \frac{d^2V}{dx^2} \cdot \frac{dV}{dx}\, dx = 4\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}} \int_0^x V^{-1/2} \cdot \frac{dV}{dx}\, dx. \qquad (6)$$

Según las condiciones del problema, cuando $x=0$, tendremos también que $V=0$; de la misma manera tendremos que considerar que cuando $x=0$, se efectuará la igualdad $\frac{dV}{dx}=0$.

Esta última condición se desprende de que en las proximidades del cátodo se forma una nube electrónica a la cual van a parar los electrones del cátodo procedentes solamente de la difusión. Por consiguiente, la intensidad del campo junto al cátodo será $E=0$, de donde se deduce que

$$\frac{dV}{dx}=0.$$

Es estas condiciones y como resultado de la integración de la ecuación (6) obtenemos que

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 16\pi i \sqrt{\frac{m}{2e}} \cdot V^{1/2} \text{ o } \frac{dV}{V^{1/4}} = 4\sqrt{\pi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{2e}} \cdot dx.$$

Integrando esta ecuación entre los límites de variación de x desde 0 hasta d:

$$\int_0^{V_A} \frac{dV}{V^{1/4}} = 4\sqrt{\pi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{2e}} \cdot \int_0^d dx.$$

Hemos tomado 0 y V_A como límites de integración de la parte izquierda de la igualdad, porque $V=0$ cuando $x=0$, y $V=V_A$ cuando $x=d$. La integración nos da:

$$\frac{4}{3} V_A^{3/4} = 4\sqrt{\pi i} \cdot \sqrt[4]{\frac{m}{2e}} \cdot d. \qquad (7)$$

Despejando i obtenemos que

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{d^2} \cdot V_A^{3/2}.$$

Para determinar la intensidad I de la corriente hay que multiplicar la densidad i de la misma por el área de la superficie S que emite los electrones:

$$I = iS.$$

Observando, además que en nuestras notaciones el V_A coincide con la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre los electrodos, obtenemos de la (7):

$$I = \frac{S\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{d^2} (V_1 - V_2)^{3/2}.$$

Suponiendo que el factor

$$\frac{S\sqrt{2}}{9\pi} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{1}{d^2} = \alpha,$$

donde α es una constante para las dimensiones y situación dadas de los electrodos, hallamos que

$$I=\alpha(V_1-V_2)^{3/2},$$

que coincide con la fórmula (3) de la pág. 217.

Si la corriente electrónica es muy débil, por ser pequeño el valor medio del número de electrones n que llegan al ánodo en la unidad de tiempo, las *fluctuaciones de la intensidad I de la corriente* se deben hacer sentir. Estas fluctuaciones de la intensidad de la corriente son análogas a las fluctuaciones de la presión del gas, de su densidad, etc., que hemos estudiado en el t. I. Son debidas a la naturaleza "automática" intermitente de las cargas eléctricas, es decir, a la existencia de electrones.

Dividamos el tiempo de observación en iguales intervalos pequeños Δt; entonces, $\overline{n}_{\Delta t}$ es la cantidad media de electrones que llega al ánodo en el intervalo Δt. En los intervalos de tiempo Δt_1, Δt_2,...., Δt_k..., por separado, debido a la irregularidad del desprendimiento de electrones del cátodo, la cantidad de éstos $n_{\Delta t_k}$ que alcanzan el ánodo, será algo distinta de este valor medio $\overline{n}_{\Delta t}$:

$$\begin{aligned}
n_{\Delta t_1} &= \overline{n}_{\Delta t}+\delta_1 n\\
n_{\Delta t_2} &= \overline{n}_{\Delta t}+\delta_2 n\\
&\cdots\cdots\cdots\\
n_{\Delta t_k} &= \overline{n}_{\Delta t}+\delta_k n\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

En correspondencia con esto, las intensidades de las corrientes $I_k=n_{\Delta t_k}\cdot\frac{e}{\Delta t_k}$ (donde e es la carga del electrón) observadas como valor medio de la intensidad de la corriente en el intervalo dado de tiempo Δt_k, serán algo distintas del valor medio:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \overline{I}_{\Delta t}+\delta_1 I\\
I_2 &= \overline{I}_{\Delta t}+\delta_2 I\\
&\cdots\cdots\cdots\\
I_k &= \overline{I}_{\Delta t}+\delta_k I\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Aquí $\overline{I}_{\Delta t}=\overline{n}_{\Delta t}\cdot\frac{e}{\Delta t}$ es el valor medio de la intensidad de la corriente de todos los intervalos de tiempo.

El correspondiente cálculo estadístico demuestra que la desviación cuadrática media de la intensidad de la corriente $\overline{\delta_k I^2}$ es

$$\overline{\delta_k I^2}=\frac{\overline{I}_{\Delta t}\cdot e}{\Delta t}. \tag{8}$$

Esta desviación será tanto menor, cuanto mayor sea el intervalo de tiempo Δt de la observación. Esto está claro ya que en los grandes intervalos de tiempo se nivelan mejor las irregularidades de la intensidad de la corriente originadas por la variación casual del número de electrones desprendidos del cátodo. Además, la desviación $\overline{\delta_k I^2}$ depende de la magnitud de la carga e del electrón. Esta consecuencia también es comprensible: si, por ejemplo, la carga e del electrón fuese mayor que la que tiene en realidad, el número de electrones desprendidos, siendo

la misma la intensidad de la corriente, sería menor y, por consiguiente, las desviaciones casuales del valor medio de la intensidad de la corriente se notarían más.

Esta "trepidación" de la intensidad de la corriente se denomina efecto de granalla por el parecido que tiene el haz de electrones con la granalla.

Las oscilaciones de fluctuación se pueden descomponer en componentes armónicas. Debido a lo caóticas que son, se pueden descomponer solamente en una cantidad infinita de componentes armónicas de toda clase de frecuencias y posibles, es decir, descomponer en un *espectro continuo* (véase el t. I). Si se observan las fluctuaciones con ayuda de un micrófono, aquéllas originan en éste un ruido peculiar.

Estas fluctuaciones de la corriente se denominan *ruido (o efecto) de Schottky*.

En el efecto de granalla, hasta un período del orden aproximadamente igual al tiempo invertido por los electrones en recorrer el tubo catódico ($\sim 10^{-8}$ seg), la amplitud de las componentes armónicas es igual para todas las frecuencias. Si el tubo catódico (véase la fig. 137) se considera un circuito de resistencia R y temperatura T, el valor cuadrático medio de la amplitud de la fluctuación de la diferencia de potencial originada en los electrodos del tubo es

$$\overline{\delta V^2} = 4kTR\Delta\nu, \tag{9}$$

donde k es la constante de Boltzmann y $\Delta\nu$ la anchura del intervalo de frecuencias señalado. El valor cuadrático medio de la amplitud de las fluctuaciones de la corriente anódica de un tubo $\overline{\delta I_a^2}$ es

$$\overline{\delta I_a^2} = 4kT\frac{\Delta\nu}{R}. \tag{10}$$

En el funcionamiento del tubo, si no hay cargas de espacio, esta última fórmula se puede escribir así:

$$\overline{\delta I_a^2} = 2eI_a\Delta\nu. \tag{10a}$$

Estas oscilaciones se producen porque el número de electrones desprendidos del cátodo caldeado fluctúa constantemente debido a la irregularidad del movimiento térmico. Su amplitud depende solamente de la temperatura y disminuirá con el descenso de ésta. Las fluctuaciones de la intensidad de la corriente determinan la exactitud de las mediciones eléctricas. La magnitud de la corriente medida debe ser mayor que la de su fluctuación.

Junto a estas fluctuaciones, en el tubo catódico puede haber variaciones de la corriente de emisión debidas a la variación de la actividad de las diferentes partes de la superficie del cátodo. Estas variaciones que conducen a oscilaciones de menor frecuencia de la intensidad de la corriente anódica ($\nu \approx 10^{-3}$ seg^{-1}) las descubrió Johnson y se denominan "centelleo" o "parpadeo" (efecto de centelleo, de parpadeo o fluctuante).

Resaltando con ayuda de un circuito oscilante de resonancia (resonador) una de las componentes armónicas de la fluctuación de la intensidad de la corriente, se puede medir el valor cuadrático medio de su amplitud. La comparación del valor medido δI_a^2 con el calculado por la fórmula (10a) nos permite determinar la carga del electrón e. Las mediciones efectuadas de esta manera han dado para e un valor que coincide, dentro de los límites de exactitud de los experimentos ($\sim 1\%$), con el de la carga del electrón hallado por otros métodos.

Las fluctuaciones de la intensidad de la corriente no surgen solamente en los tubos electrónicos, donde la corriente es debida al transporte de electrones libres; sino también en cualquier conductor de corriente (metales, semiconductores, electrólitos).

www.elsolucionario.org

§ 187. Recorrido libre de los electrones en un gas. Al desplazarse por un medio gaseoso, los electrones chocan con los átomos y las moléculas. El recorrido libre medio se puede determinar razonando de la misma manera que se hizo al determinar el recorrido libre medio de una molécula.

En el § 53 del t. I se dedujo que el recorrido libre medio de una molécula era

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n_0}, \qquad (1)$$

donde n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen y σ, el diámetro eficaz de la molécula. Rigurosamente hablando, σ es la suma de los radios eficaces r y r' de las moléculas que chocan: $\sigma = r + r'$. Recordemos, por último, que la $\sqrt{2}$ en el denominador es debida a considerar que se mueven todas las moléculas, tanto las que producen la colisión, como las que la sufren. Para determinar el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ del electrón debemos tener en cuenta dos circunstancias: en primer lugar, las dimensiones del electrón son mucho menores que las de las moléculas o de los átomos, por consiguiente, en la expresión del diámetro eficaz $\sigma = r + r'$ se puede despreciar el radio r' del electrón por su pequeñez en comparación con el r de la molécula; en segundo lugar, la velocidad del electrón, por su pequeña masa, es mucho mayor que la de la molécula, por eso no hay necesidad de conservar la $\sqrt{2}$ en el denominador de la fórmula (1).

Por lo tanto, para el recorrido libre medio de los electrones obtenemos que

$$\bar{\lambda}_e = \frac{1}{\pi r^2 n_0}, \qquad (2)$$

donde r es el radio eficaz de las moléculas del gas en que se desplazan los electrones.

El recorrido libre medio de los electrones $\bar{\lambda}_e$, lo mismo que el recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$, *es inversamente proporcional a la presión p del gas.*

Como en la fórmula (1), para las moléculas del gas dado (es decir, cuando $r = r'$), el diámetro eficaz es $\sigma = 2r$, comparando las fórmulas (1) y (2) tenemos que

$$\bar{\lambda}_e = 4\sqrt{2} \cdot \bar{\lambda} \cong 5{,}6\bar{\lambda},$$

es decir, *el recorrido libre medio de los electrones es aproximadamente 5,6 veces mayor que el recorrido libre medio de las moléculas del gas* a la misma presión.

El valor numérico de los recorridos libres medios de los electrones $\bar{\lambda}_e$ para diferentes gases y a distintas presiones se da en la tabla XI.

Tabla XI

Recorrido libre medio de los electrones $\overline{\lambda}_e$ (en cm) a 0° C

Gas	Presión		
	1 mm Hg	10^{-3} mm Hg	10^{-4} mm Hg
He	$7{,}4 \cdot 10^{-2}$	7,4	740
Ne	$6{,}6 \cdot 10^{-2}$	6,6	660
Ar	$4{,}4 \cdot 10^{-2}$	4,4	440
H_2	$7{,}5 \cdot 10^{-2}$	7,6	750
N_2	$3{,}6 \cdot 10^{-2}$	3,6	360
O_2	$4{,}1 \cdot 10^{-2}$	4,1	410

Como se ve de los datos de la tabla XI, a la presión de 10^{-4} mm Hg, que se consigue fácilmente en las modernas bombas de vacío, los recorridos libres medios de los electrones llegan a ser de varios metros. Con ello se explica que haces de electrones no dispersados y bien delimitados se puedan obtener fácilmente en recipientes de dimensiones de varias decenas de centímetros de longitud.

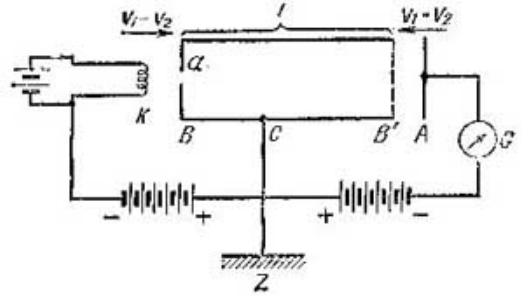


Fig. 161. Esquema de método de determinación del recorrido libre medio de los electrones.

Experimentalmente, el recorrido libre medio de los electrones se puede determinar por un método, cuya idea básica coincide en principio con la del experimento para determinar el recorrido libre medio de las moléculas mediante un haz de moléculas (véase el t. I, § 54). El esquema de este método viene representado en la fig. 161: K es el cátodo caliente, manantial de electrones; B, el ánodo con un orificio a. Todas las partes del instrumento se hallan en un recipiente a baja presión. Del cátodo K, el ánodo B se sitúa a una distancia menor que el recorrido libre medio de los electrones. Entre el ánodo y el cátodo se aplica una diferencia de potencial

V_1—V_2 que acelera los electrones, gracias a lo cual, a los electrones se les comunica una velocidad determinada. Al pasar por el orificio a, los electrones forman un haz que se desplaza por el interior del cilindro metálico C, que tiene el mismo potencial que el ánodo B. El cilindro C termina con una malla B'. Así, en el interior del cilindro C no hay campo y los electrones se desplazan a velocidad constante. Después de atravesar la malla B', los electrones van a parar al electrodo A y le ceden su carga. La longitud del cilindro C es mayor que el recorrido libre medio de los electrones, mientras que el electrodo A está de la malla B' a una distancia mucho menor que $\overline{\lambda}_e$.

Algunos electrones del haz experimentan colisiones con moléculas en el interior del cilindro C, con lo cual se desvían y van a parar a la parte interna del cilindro C o se dirigen oblicuamente a la malla B'. Entre el electrodo A y la malla B' se aplica una diferencia de potencial V_1—V_2 que frena los electrones y que es igual a la diferencia de potencial V_1—V_2 que los acelera entre el cátodo K y el ánodo B. Entonces, solamente los electrones que se desplazan perpendicularmente a la malla B', es decir, los que no han sufrido colisiones, alcanzarán el electrodo A y crearán una corriente I medida por el galvanómetro G.

El electrodo A y la malla B' son móviles, de manera que se pueda variar la distancia l hasta el ánodo B.

Según la fórmula aducida en el t. I, § 54, el número de partículas n de un haz que recorren el camino l sin colisiones es

$$n = n_0 e^{-l/\overline{\lambda}},$$

donde n_0 es el número inicial de partículas del haz y $\overline{\lambda}$ su recorrido libre medio.

Esta misma fórmula se puede aplicar al haz de electrones y nos dará el número n de electrones que alcanzan el electrodo A en la unidad de tiempo.

Como la intensidad I de la corriente es proporcional al número de electrones n, tendremos que

$$I = I_0 e^{-l/\overline{\lambda}_e}.$$

Midamos la intensidad I de la corriente para dos valores distintos de l siendo la presión del gas y la intensidad inicial I_0 de la corriente las mismas. Entonces

$$I_1 = I_0 e^{-l_1/\overline{\lambda}_e}, \quad I_2 = I_0 e^{-l_2/\overline{\lambda}_e}, \text{ de donde } \frac{I_1}{I_2} = e^{-(l_1-l_2)/\overline{\lambda}_e}.$$

De la última fórmula obtenemos que el recorrido libre medio $\overline{\lambda}_e$ del electrón es

$$\overline{\lambda}_e = \frac{l_2 - l_1}{\ln I_1/I_2}.$$

www.elsolucionario.org

De esta manera se determina $\overline{\lambda}_e$, ya que las distancias l_1 y l_2 y las intensidades I_1 e I_2 de la corriente se pueden medir directamente.

Los datos experimentales confirman el valor hallado teóricamente del recorrido libre medio de los electrones. No obstante hay que señalar que el recorrido libre medio de los electrones depende de la velocidad de los electrones. En la mayoría de los gases, para los electrones lentos, este recorrido es menor que el determinado por la teoría cinética de los gases según el recorrido libre medio de las moléculas; pero a grandes velocidades, su valor se aproxima al determinado por la teoría cinética de los gases.

Ya hemos indicado repetidas veces que la idea formada de que las moléculas geseosas al chocar se comporten en su acción recíproca como esferas elásticas, es muy simplista.

Las moléculas son sistemas complejos de partículas cargadas que interaccionan hallándose distanciadas, y no solamente cuando entran en contacto directo. En grado mayor ocurre esto mismo en las colisiones de los electrones con las moléculas y átomos. La interacción del electrón con una molécula o con un átomo empieza a distancias mucho mayores que las dimiensiones reales del átomo o de la molécula, y las fuerzas de interacción aumentan a medida que disminuye la distancia entre ellos. De esto se deduce claramente que el diámetro eficaz de la molécula debe depender de la velocidad del electrón en movimiento y, el determinado al chocar con un electrón puede ser diferente del diámetro eficaz determinado al chocar las moléculas unas con otras.

En la teoría de las colisiones de los electrones con las moléculas, frecuentemente se tiene en cuenta la sección total de todas las moléculas contenidas en 1 cm^3 a 0° C y a la presión de 1 mm Hg.

Esta sección total S es

$$S = \pi r^2 n_0,$$

donde r es el radio de la molécula y n_0, el número de moléculas en 1 cm^3 a 0° C y a la presión de 1 mm Hg.

Determinando el r según el recorrido libre de los electrones $\overline{\lambda}_e$, obtenemos, por ejemplo, para el hidrógeno (H_2) en un potencial acelerador de 25 V, una sección $S = 20$ cm^2/cm^3. Según lo dicho, S depende de la velocidad de los electrones.

En la fig. 162 se representan los valores de S obtenidos experimentalmente para el H_2 y el N_2. El eje de abscisas representa los valores de las raíces cuadradas de los potenciales aceleradores, es decir, magnitudes proporcionales a las velocidades v de los electrones. A la derecha se dan los valores de S calculados basándose en la teoría cinética de los gases según el recorrido libre medio de las moléculas. Como se ve, para el hidrógeno y a pequeñas velocidades de los electrones, la sección eficaz de las moléculas supera en más de dos veces la calculada por la teoría cinética de los gases; a grandes velocidades, las secciones calculadas, tanto según el recorrido libre de los electrones, como según los datos de la teoría cinética de los gases, coinciden prácticamente.

Para los gases inertes He, Ne, Ar, Kr, Xe, se ha observado que las secciones eficaces de los átomos a pequeñas velocidades de los electrones, son muy pequeñas, después aumentan alcanzando el máximo cuando los potenciales aceleradores son de varios voltios, y luego disminuyen. Para los electrones de muy pequeñas velocidades ($V_1 - V_2 = 1$ V), la sección eficaz es mucho menor que la determinada según la teoría cinética de los gases. Parece que los átomos son "transparentes" para los electrones: éstos los atraviesan sin desviarse. Este efecto descubier-

to por Ramsauer solamente se puede explicar basándose en la mecánica cuántica.

En la fig. 163 se representan las secciones eficaces S de los átomos de He y de Ne en función de la velocidad de los electrones que chocan. En la parte de la derecha se dan, como antes, las secciones eficaces determinadas según la teoría cinética de los gases.

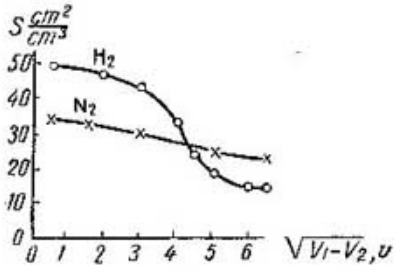


Fig. 162. Dependencia entre la sección eficaz S de las moléculas de H_2 y N_2 contenidas en 1 cm^3 a la temperatura de 0° C y a la presión de 1 mm Hg, y la velocidad de los electrones.

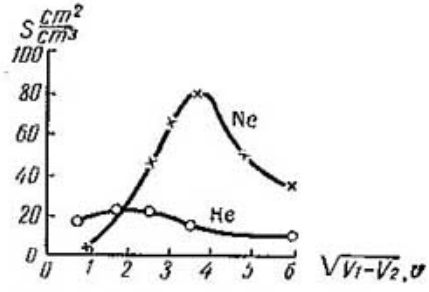


Fig. 163. Dependencia entre la sección eficaz de los átomos de He y Ne contenidos en 1 cm^3 a la temperatura de 0° C y a la presión de 1 mm Hg, y la velocidad de los electrones.

§ 188. Colisiones de los electrones con los átomos y con las moléculas. A pequeñas velocidades, las colisiones de los electrones con los átomos y con las moléculas tienen un *carácter elástico*. Debido a que la masa m del electrón es mucho menor que la masa M del átomo o de la molécula, en el choque elástico, el electrón casi no varía la magnitud de su velocidad: ésta varía solamente de dirección. El electrón "rebota" elásticamente del átomo o de la molécula. En correspondencia con ello, la cantidad de energía cedida por el electrón a la molécula en el choque elástico, también será una pequeña parte de la energía cinética inicial.

Como la velocidad v del electrón es mucho mayor que la velocidad de las moléculas, podemos considerar a éstas inmóviles. Entonces, aplicando al choque central del electrón las fórmulas deducidas en el § 28 del t. I para el choque elástico de las esferas, obtenemos que, después de la colisión, la molécula adquiere la velocidad

$$v' = \frac{2mv}{m+M},$$

donde v es la velocidad del electrón antes del choque.

Despreciando la masa m del electrón en el denominador por ser pequeña en comparación con la masa M del átomo o de la molécula,

obtendremos aproximadamente que

$$v' = \frac{2mv}{M}.$$

La energía cinética adquirida por el átomo o por la molécula será

$$\Delta E_c = \frac{Mv'^2}{2} = \frac{4m}{M}\,\frac{mv^2}{2}.$$

Esta misma cantidad de energía cinética es la que pierde el electrón. Observando que $\frac{mv^2}{2}$ es la energía cinética inicial E_c del electrón, tenemos que

$$\Delta E_c = \frac{4m}{M} E_c.$$

En el choque no central, la pérdida de energía será menor. *Como término medio* podemos considerar que en el choque elástico con un átomo o con una molécula, el electrón pierde una cantidad de energía igual a

$$\Delta \bar{E}_c = \varkappa E_c. \qquad (1)$$

donde

$$\varkappa = \frac{2m}{M}. \qquad (1a)$$

La magnitud $\varkappa$ es muy pequeña. Así, para el caso de los choques clásticos de electrones con los átomos de neón, $\varkappa = 5{,}45 \cdot 10^{-5}$, y para los choques con los átomos de argón, $\varkappa = 2{,}76 \cdot 10^{-5}$.

De esta manera, en el choque elástico con átomos o moléculas, el electrón pierde, como término medio, varias cienmilésimas de su energía inicial.

Al aumentar la velocidad del electrón empiezan a producirse choques inelásticos, en los cuales el electrón puede ceder por completo su energía cinética al átomo o a la molécula con que choca. La energía cedida se invierte bien en la *excitación del átomo (de la molécula)*, *bien en su ionización*, es decir, *en arrancarle uno o varios electrones*. Cuando la energía se invierte en la excitación del átomo, después se transforma o en energía de radiación, o en calor.

En este capítulo estudiaremos solamente los choques inelásticos que producen ionización, considerando en este caso que la ionización es elemental, es decir, que el átomo o la molécula en el choque con el electrón pierden solamente uno de sus electrones y, por consiguiente, se transforman en un ion positivo monovalente.

Llamemos E_i a la energía necesaria para la ionización. Entonces, para que el electrón pueda ionizar al átomo, su energía cinética

www.elsolucionario.org

no debe ser menor que E_i. Como la energía cinética del electrón es

$$\frac{mv^2}{2} = e(V_1 - V_2),$$

donde $V_1 - V_2$ es la diferencia de potencial que acelera al electrón, *la mínima diferencia de potencial del campo necesaria para la ionización de aceleración de los electrones* se determina por la relación:

$$e(V_1 - V_2)_i = \frac{mv_i^2}{2} = E_i. \qquad (2)$$

La diferencia de potencial $(V_1 - V_2)$ se denomina *potencial de ionización* del átomo o de la molécula dados.

La *energía de ionización* E_i generalmente se expresa en electrón-voltios (eV).

Hay numerosos métodos experimentales para determinar los potenciales de ionización. La necesidad de distinguir estas diferencias de potencial de las que producen excitación en el átomo o en la molécula, representa cierta dificultad en la determinación de las primeras. Nosotros examinaremos solamente un simple método, que consiste en lo siguiente: en un tubo catódico (fig. 137), entre el cátodo incandescente K y el ánodo A se crea una corriente electrónica. En el tubo hay una pequeña cantidad de gas, de modo que el recorrido libre del electrón es algo menor que la distancia l entre el cátodo y el ánodo.

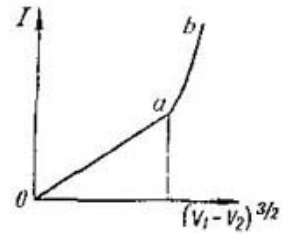


Fig. 164. Gráfico representativo de la dependencia entre la intensidad de la corriente I y la magnitud $(V_1 - V_2)^{3/2}$. Obsérvese la discontinuidad originada por la ionización.

Mientras los choques de los electrones con las moléculas del gas son elásticos, la corriente es puramente electrónica y su intensidad I viene determinada por la fórmula de Bogustavski-Lengmuir (véase el §186):

$$I = \alpha (V_1 - V_2)^{3/2}.$$

Por eso, si tomamos en el eje de abscisas los valores de $(V_1 - V_2)^{3/2}$, la dependencia gráfica entre la intensidad I de la corriente y $(V_1 - V_2)^{3/2}$ vendrá representada por la recta Oa de la fig. 164. Sin embargo, en cuanto la velocidad de los electrones sea lo suficientemente elevada para ionizar el gas del tubo, en el volumen del tubo se crearán nuevos electrones y iones positivos, y la intensidad I de la corriente aumentará bruscamente (rama ab de la curva de la fig. 164). La diferencia de potencial a que la línea de dependencia entre la intensidad I de la corriente y $(V_1 - V_2)^{3/2}$ se quiebra, es el potencial de ionización.

Tabla XII

Potenciales de ionización (en V)

Átomos o moléculas	$(V_1 - V_2)_j$
Hidrógeno, H	13,54
Helio, He	24,47
Neón, Ne	21,47
Argón, Ar	15,69
Mercurio, Hg	10,38
Sodio, Na	5,12
Potasio, K	4,32
Cesio, Cs	3,87
Hidrógeno molecular, H_2	15,4
Nitrógeno molecular, N_2	15,8

En la tabla XII se dan los potenciales de ionización de algunos átomos y moléculas.

Si la velocidad del electrón es mayor que la necesaria para la ionización, en el choque cederá solamente la energía necesaria para la ionización y continuará desplazándose después del choque con

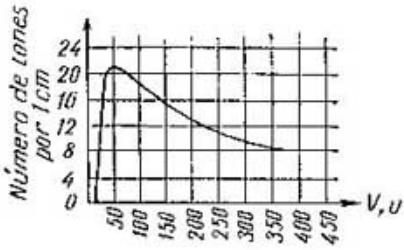


Fig. 165. Dependencia entre el número de iones creados de mercurio (Hg^+) y la velocidad de los electrones.

la energía cinética restante. No todas las colisiones producen ionización. A grandes velocidades, la probabilidad de ionización se hace menor; el electrón "logra" pasar junto al átomo sin ionizarlo. En la fig. 165 se representa la curva del número de iones positivos de mercurio (Hg^+) creados por los electrones a distintas velocidades en el recorrido de 1 cm siendo la presión del vapor de mercurio igual a 1 mm Hg. Como se ve la probabilidad de ionización alcanza el máximo cuando el campo acelerador tiene una diferencia de potencial de 50 V (el potencial de ionización del mercurio es igual a 10,4 V); si los potenciales aceleradores son mayores, la probabilidad de ionización disminuye. De la fig. 165 se deduce que en el má-

ximo de la curva, el electrón crea unos 20 iones de Hg^+ en 1 cm de recorrido. Como en estas condiciones sufre, en el recorrido de 1 cm, unas 57 colisiones, se desprende que sólo el $\frac{20}{57}$ de las colisiones (es decir, el 35% del total) conducen a la ionización. A las demás velocidades, el porcentaje de colisiones que producen ionización, será inferior.

Hasta ahora hemos hablado solamente de ionización por choque de electrones. Pero puede haber también ionización por choque de iones. En la actualidad se ha establecido que los iones producen una ionización perceptible solamente cuando las energías son muy elevadas, así que, en todos los casos de conducción a travis del gas que a nosotros nos interesan, la ionización por iones sólo desempeña un papel secundario.

Además del esquema descrito en la pág. 281 para determinar los potenciales de ionización, se utilizan otros esquemas diferentes. Franck y Hertz fueron los primeros que en 1913 efectuaron la determinación de potenciales de ionización con la siguiente instalación (fig. 166). Un filamento incandescente AA' de platino en un recipiente cerrado servía de fuente de electrones. El electrómetro E permitía revelar las cargas que iban a parar al electrodo CC'. Entre el filamento incandescente y el electrodo CC' se ponía una malla BB'. El electrodo CC' y la malla BB' tambien eran de platino para evitar que se produjeran diferencias de potencial de contactor. Todo el espacio del interior del recipiente se llenaba del gas o del vapor a experimentar con una presión baja. Entre el filamento AA' y la malla BB' se aplicaba una diferencia de potencial $V_A - V_B$ que aceleraba los electrones. Entre la malla BB' y el electrodo CC' se aplicaba un potencial retardador $V_B - V_C$.

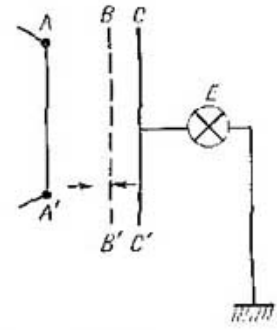


Fig. 166. Esquema del método de Franck y Hertz de determinación de los potenciales de ionización.

Si el valor de $V_B - V_C$ es mayor que el de $V_A - V_B$, los electrones, al ir a atravesar la malla serán rechazados y no irán a parar al electrodo CC'. Pero si la velocidad de los electrones adquirida bajo la influencia de la diferencia de potencial $V_A - V_B$ es lo suficientemente elevada para que los electrones, al chocar con los átomos entre BB' y CC' puedan ionizarlos, se formarán iones positivos. Estos iones serán acelerados por la diferencia de potencial $V_B - V_C$ y, al alcanzar al electrodo CC', le cederán la carga positiva, lo cual señalará el electrómetro E. Así se puede establecer la diferencia de potencial $V_A - V_B$ a que aparece la primera carga positiva en el electrodo CC'. Esta diferencia de potencial será la que determine el potencial de ionización de los átomos experimentados.

El método de Franck y Hertz tiene un inconveniente importante: en el electrodo CC' puede surgir una carga positiva no sólo en el caso de ionización de los átomos por electrones, sino también al excitarlos. Como veremos después (véase el t. III), al pasar el átomo excitado a su estado normal irradiará luz. Si esta radiación corresponde a la región ultravioleta del espectro, al incidir sobre el electrodo CC' le puede arrancar electrones (esta emisión de electrones por acción de la luz se denomina también *efecto fotoeléctrico*, véase el t. III).

www.elsolucionario.org

Debido a la pérdida de los electrones negativos, el propio electrodo CC' se carg positivamente, lo cual será registrado en el electrómetro E.

Para poder diferenciar la excitación de los átomos, debida a las colisione de los electrones, de su ionización, se utilizó el siguiente método: Entre e filamento incandescente AA' y el electrodo CC' se colocan dos mallas, BB' y DD (fig. 167). Entre el filamento y la malla BB' se aplica también una diferencia d potencial $V_A - V_B$ que acelera los electrones, y entre las mallas BB' y DD', un diferencia de potencial $V_B - V_D$ que los retarda. Por último, entre la mall DD' y el electrodo CC' se crea un débil campo, cuya dirección se puede cambiar voluntad. Si los electrones desprendidos del filament incandescente producen una ionización en el espaci comprendido entre las mallas BB' y DD', los ione positivos creados alcanzarán al electrodo CC' y le cede rán su carga positiva, independientemente de la direc ción del débil campo complementario entre la mall DD' y el electrodo CC'. Efectivamente, si este camp tiene la misma dirección que el comprendido entre la mallas BB' y DD', acelerará más aún los iones e dirección al electrodo CC'; si va en sentido contrario debido a que el valor de la diferencia de potencia entre DD' y CC' es menor que $V_B - V_D$, no será sufi ciente para retener a los iones.

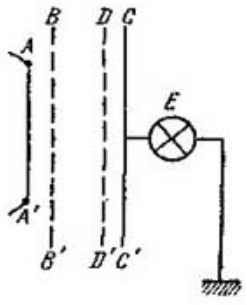


Fig. 167. Esquema del método de determinación de los potenciales de ionización.

Veamos ahora el caso cuando los electrones, a chocar con los átomos en el espacio comprendid entre las mallas BB' y DD', solamente los exitan. Los átomos excitados irradian luz que arranca elec trones de las mallas BB' y DD' y del electrodo CC'. Si la dirección del campo complementario entre la malla DD' y el electrodo CC' es la misma que la del campo entre las mallas BB' y DD' (en cuyo caso los iones positivos se acelerarán en dirección a CC'), los electrones serán repelidos del electrodo CC' y éste adquirirá una carga positiva. Si a este campo complementario le damos un sentido contrario, los fotoelectrones arrancados del CC' volverán a caer sobre éste; también incidirán sobre él los electrones de la malla DD', con lo cual el electrodo CC' adquirirá una carga negativa. De esta manera, variando la dirección del campo complementario se puede distinguir el caso de ionización del de excitación de los átomos.

Los experimentos llevados a cabo con vapor de mercurio han dado la posibilidad de establecer la existencia de tres diferencias de potencial, en las cuales se efectuaban choques inelásticos: 4,9 V, 6,7 V y 10,4 V. Estos potenciales se han denominado potenciales *críticos* o *resonantes*. Los dos primeros producen una excitación de los átomos de mercurio, el último, una ionización.

§ 189. Movilidad de los electrones en el gas a baja presión. Al examinar la movilidad de los electrones en los electrólitos, lo mismo que en los gases a presiones no muy bajas, admitíamos la existencia de fuerzas de rozamiento de valor proporcional a las velocidades de los iones. Esto era posible gracias al pequeño recorrido libre de los iones. En el caso de desplazamiento de electrones en un gas hace falta un análisis más detallado del fenómeno.

Para simplificar nos limitaremos solamente al examen de los choques elásticos de los electrones con los átomos del gas. En este caso, como se deduce de la fórmula (1) del § 188, el valor de la velocidad del electrón después del choque casi no varía, mientras que la dirección de esta velocidad puede variar de cualquier manera: el electrón puede desviarse a un lado o ser repelido hacia atrás. Si la intensidad del campo es E, en los intervalos entre choque y choque el elec-

rón tiene una aceleración constante

$$w = \frac{eE}{m} \tag{1}$$

y, por consiguiente, se desplazará según un segmento de parábola. Toda su trayectoria entre los átomos del gas, habiendo un campo eléctrico, tendrá la forma representada en la fig. 168.

Examinemos con más detalle la trayectoria del electrón entre dos colisiones consecutivas. La dirección y sentido del vector intensidad del campo E vienen indicados con una flecha en la fig. 169. Sea v la velocidad del electrón inmediatamente después del choque con el átomo A y que forme con E el ángulo φ. Consideremos que la velocidad complementaria adquirida por el electrón bajo la influencia de la intensidad del campo E en su carrera entre dos choques, es pequeña en comparación con la velocidad v.

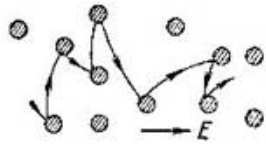


Fig. 168. Trayectoria del electrón entre los átomos de un gas

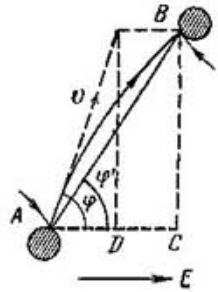


Fig. 169. Gráfico para determinar la trayectoria del electrón entre dos colisiones.

Entonces, el recorrido del electrón representada por el arco $\overset{\frown}{AB}$ no se diferenciará mucho del recorrido libre $\lambda = AB$ que habría realizado al desplazarse entre los átomos A y B de no haber campo eléctrico. Llamemos φ' al ángulo entre AB y la dirección del vector intensidad del campo E.

Durante el intervalo de tiempo τ entre dos choques, la fuerza eléctrica realiza un trabajo

$$dA = eE\lambda \cos\varphi'.$$

Para muchas colisiones, como término medio este trabajo será:

$$\overline{dA} = eE\overline{\lambda}\ \overline{\cos\varphi'}. \tag{2}$$

En el choque, el electrón pierde, según la fórmula (1) del § 188, una cantidad de energía igual a $\varkappa \frac{mv^2}{2}$.

El equilibrio se conseguirá cuando el trabajo medio $\overline{dA}$ realizado por la fuerza eléctrica entre dos choques sea igual a la pérdida media de energía del electrón en el choque

$$\overline{dA} = \varkappa \frac{\overline{mv^2}}{2};$$

sustituyendo $\overline{dA}$ por su valor según la (2), obtenemos la condición de movimiento del estado estacionario

$$eE\overline{\lambda}\ \overline{\cos\varphi'} = \varkappa \frac{\overline{mv^2}}{2}. \tag{3}$$

De la fig. 169 se deduce que

$$\cos\varphi' = \frac{AC}{AB} = \frac{AD \perp DC}{AB},$$

pero $AD = v\tau\cos\varphi$ y $DC = \frac{1}{2} w\tau^2$, donde w es la aceleración determinada de la ecuación (1). Por consiguiente,

$$\cos\varphi' = \frac{v\tau\cos\varphi + \frac{1}{2} w\tau^2}{AB} = \frac{v\tau\cos\varphi + \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\tau^2}{\lambda},$$

de donde el valor medio de $\overline{\cos\varphi'}$ será

$$\overline{\cos\varphi'} = \frac{\overline{v}\,\overline{\tau}\,\overline{\cos\varphi} + \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\overline{\tau^2}}{\lambda}.$$

Pero nosotros consideramos que cualquiera dirección de movimiento del electron después del choque tiene la misma probabilidad. El electrón puede desviarse en un ángulo φ cualquiera después de chocar con el átomo, entonces tendremos que $\overline{\cos\varphi} = 0$ y

$$\overline{\cos\varphi'} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m\overline{\lambda}}\overline{\tau^2}.$$

El tiempo medio $\overline{\tau}$ entre dos choques será

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{\lambda}}{\overline{v}}, \qquad (4)$$

de donde

$$\overline{\cos\varphi'} = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\cdot\frac{\overline{\lambda}}{\overline{v^2}}.$$

Aquí $\overline{v^2}$ es el cuadrado de la velocidad media, mientras que en la fórmula (3) tenemos la velocidad cuadrática media. No obstante, teniendo en cuenta el carácter aproximado de nuestros cálculos, no diferenciaremos estos valores medios. Entonces, sustituyendo en la (3) el $\overline{\cos\varphi'}$ por su valor y despejando $\overline{v}$, hallamos que

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{e\overline{\lambda}}{m\sqrt{\varkappa}}}\cdot\sqrt{E}. \qquad (5)$$

De esta manera, la velocidad media del *movimiento desordenado* del electrón por entre los átomos de un gas es proporcional a $\sqrt{E}$.

Hallemos ahora la velocidad u del electrón *en la dirección del campo*. En la fig. 169 se ve que

$$u = \frac{AC}{\tau} = v\cos\varphi + \frac{1}{2} w\tau.$$

El valor medio de esta velocidad será

$$\overline{u} = \overline{v}\cdot\overline{\cos\varphi} + \frac{1}{2} w\overline{\tau}.$$

Observando que, como antes, el $\overline{\cos\varphi} = 0$ y sustituyendo w y $\overline{\tau}$ por sus valores

www.elsolucionario.org

según las ecuaciones (1) y (4), hallamos que

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e\bar{\lambda}}{m\bar{v}} \cdot E.$$

Por último, colocando en esta ecuación el valor de $\bar{v}$ según la (5), obtenemos que

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e\bar{\lambda}\sqrt{\varkappa}}{m}} \cdot \sqrt{E}. \qquad (6)$$

De esto se ve que la velocidad $\bar{u}$ de desplazamiento del electrón según la dirección del campo es proporcional a $\sqrt{E}$. Determinando la movilidad del electrón como una magnitud igual a $u^0 = \frac{\bar{u}}{E}$, hallamos que

$$u^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e\bar{\lambda}\sqrt{\varkappa}}{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E}}; \qquad (7)$$

así, *la movilidad del electrón en un gas depende de la intensidad del campo*, pero es inversamente proporcional a $\sqrt{E}$. En correspondencia con ello, para la conducción electrónica de los gases no se cumple la ley de Ohm. En la realidad, la ley de Ohm no se cumple, además, por una serie se otras causas.

Nosotros hemos examinado solamente los choques elásticos, por eso las fórmulas deducidas sólo son aplicables cuando las intensidades E son pequeñas. Para los gases inertes (Ne, Ar, etc.), si $E=1$ V/cm, los valores de $\bar{v}$ y $\bar{u}$ calculados por las fórmulas (5) y (6) concuerdan bien con los valores de estas magnitudes calculados por otros métodos. A la presión de $p=1$ mm Hg, siendo $E=1$ V/cm, obtenemos que

$$\bar{v} = 1{,}25 \cdot 10^8 \text{ cm/seg}, \quad \bar{u} = 4{,}63 \cdot 10^5 \text{ cm/seg}.$$

En el movimiento desordenado del electrón entre los átomos, la velocidad $\bar{v}$, que adquiere el electrón solicitado por un campo eléctrico de intensidad $E=1$V/cm es grande en comparación con la velocidad térmica de su movimiento en un gas sin campo eléctrico a la temperatura habitual.

Si no hay campo eléctrico, la energía media del movimiento térmico de los electrones es la misma que la energía media del movimiento térmico de las moléculas:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta.

De aquí que

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

A la temperatura $T=300°$ K, tenemos que

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{9 \cdot 10^{-28}}} \text{ cm/seg} \cong 3{,}74 \cdot 10^6 \text{ cm/seg},$$

es decir, aproximadamente 30 veces menor que el valor aducido de $\bar{v}$.

La velocidad media $\bar{u}$ de desplazamiento del electrón según el campo es mucho menor que su velocidad total media $\bar{v}$. Debido a esto, el recorrido total l

del electrón será también grande en comparación con el desplazamiento l_E del electrón según la dirección del campo; está claro que

$$\frac{l}{l_E} = \frac{\overline{v}}{u}.$$

Utilizando las fórmulas (5) y (6), escribamos esta ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{l}{l_E} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}};$$

para el neón $\frac{l}{l_E} = 271$, y para el argón, $\frac{l}{l_E} = 381$; así, el recorrido total del electrón es centenares de veces mayor que su desplazamiento según el campo.

§ 190. Conducción de los gases sin agente ionizante. En el § 188 se ha visto que, a velocidades bastante elevadas de los electrones, cuando al chocar originan una ionización, la intensidad de la corriente en el gas aumenta considerablemente, ya que aumenta el número de partículas cargadas, cuyo transporte crea la corriente. Veamos ahora este proceso con más detalle.

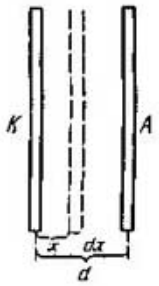


Fig. 170. Representación gráfica para el cálculo de la intensidad de la corriente entre electrodos planos en la conducción sin agente ionizante.

Para simplificar supongamos que la corriente surge entre dos electrodos planos paralelos K y A, y que el cátodo K es la fuente de electrones (fig. 170). Sea n_0 el número de electrones que se desprenden del cátodo en la unidad de tiempo. Sea también, una capa de espesor dx paralela a los electrodos y a la distancia x del cátodo. El número de electrones que llegan a esta capa lo llamaremos n.

Entonces, en el interior de la capa, debido a la ionización por choque de electrones, se forman nuevos electrones, cuyo número es

$$dn = \alpha n\, dx,$$

donde α es el coeficiente de ionización. Escribiendo esta ecuación de la manera siguiente

$$\frac{dn}{n} = \alpha\, dx,$$

e integrando, obtenemos que

$$\ln n = \alpha x + C. \qquad (1)$$

La constante C se determina de la condición de que a $x = 0$, es decir, junto al mismo cátodo, $n = n_0$, de donde

$$\ln n_0 = C.$$

Utilizando este valor de C, de la (1) obtenemos que

$$\ln \frac{n}{n_0} = \alpha x,$$

o

$$n = n_0 e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Al deducir esta fórmula hemos despreciado el fenómeno de recombinación. Si d es la distancia entre los electrodos, la cantidad de electrones que llegan al ánodo será n_d

$$n_d = n_0 e^{\alpha d}. \tag{2a}$$

De no haber ionización en el volumen del gas, al ánodo llegarían en el mejor de los casos n_0 electrones y, por consiguiente, la intensidad I_s de la corriente de saturación, sería igual a

$$I_s = n_0 q, \tag{3}$$

donde q es la carga del electrón.

Si hay ionización, al ánodo llegarán n_d electrones y la intensidad de la corriente, según (2a), será

$$I = n_d q = n_0 e^{\alpha d} \cdot q. \tag{4}$$

De las ecuaciones (4) y (3) obtenemos que

$$I = I_s e^{\alpha d}. \tag{4a}$$

De esta manera tenemos que la corriente aumenta $e^{\alpha d}$ veces.

Si, por ejemplo, hacemos $d=5$ cm y admitimos que el electrón emitido por el cátodo, en el recorrido de 1 cm crea por término medio dos electrones nuevos, tendremos que $\alpha=2$ cm^{-1}e

$$I = I_s \cdot e^{2 \cdot 5} \sim 2{,}2 \cdot 10^4 I_s,$$

es decir, la intensidad de la corriente ha aumentado decenas de millares de veces. Este cálculo demuestra que, habiendo ionización por choque de electrones, la conducción, fundamentalmente no es debida a los electrones que de fuera vienen a la región de la descarga, sino a los que se crean en la misma región de descarga. Para mantener la corriente es suficiente que del exterior llegue un número relativamente pequeño de electrones o de otras partículas cargadas. La fuente de estos electrones primarios generalmente es el electrodo negativo (cátodo), del que se arrancan electrones al incidir en él iones positivos procedentes de la región de la descarga, o se le hace emitir electrones caldeándolo fuertemente, o, por último, bajo la influencia de la radiación (efecto fotoeléctrico). En todos estos casos el electrodo emite electrones bajo la acción de los procesos que tienen lugar en la misma descarga y, de esta manera, la descarga se

www.elsolucionario.org

mantiene independientemente: éste es el caso de conducción de los gases sin agente ionizante.

Veamos algunos casos típicos de conducción de los gases sin agente ionizante.

1. Descarga luminiscente. Esta clase de descargas se observa en los gases a bajas presiones (del orden de 1 mm Hg). Se puede observar fácilmente en un tubo largo de vidrio con dos electrodos en

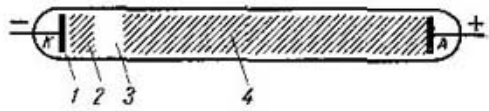


Fig. 171. Descarga luminiscente: 1) primer espacio obscuro; 2) luminosidad negativa; 3) espacio obscuro de Faraday; 4) columna positiva.

sus extremos (fig. 171), si se aplica a los electrodos una diferencia de potencial de varios centenares de voltios. Bajo la acción de la corriente que pasa por el tubo, el gas se ilumina, distinguiendo en este caso las siguientes zonas de luminosidad: a) zona de luminosidad débil junto al mismo cátodo denominada primer espacio obscuro; b) zona de luminosidad denominada luminiscencia (luminosidad) negativa; c) segunda zona de luminosidad débil denominada espacio obscuro *de Faraday*; d) zona de luminosidad intensa, denominada columna positiva. La columna positiva puede abarcar una parte considerable del tubo.

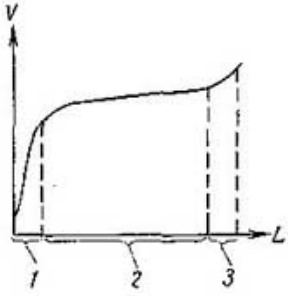


Fig. 172. Caída de tensión a lo largo del tubo de descarga: 1) caída de tensión catódica; 2) columna positiva; 3) caída de tensión anódica.

La caída de tensión se produce irregularmente a lo largo del tubo. La magnitud máxima de la caída de tensión corresponde al primer espacio obscuro que se denomina caída de tensión catódica (fig. 172); después, casi a lo largo de todo el tubo se produce una caída de tensión muy insignificante (de orden de 1—2 V/cm), y solamente junto al ánodo se observa un nuevo salto, caída de tensión anódica.

La magnitud de la caída de tensión catódica principalmente viene determinada por el material del cátodo y naturaleza del gas.

A pequeñas intensidades de corriente, la luminosidad negativa envuelve solamente una parte de la superficie del cátodo y la magnitud de la caída catódica no depende ni de la intensidad de la corrien-

te, ni de la presión del gas (en cierto intervalo de variación de la presión); esta magnitud de la caída catódica se denomina *normal*.

El valor de la caída de tensión catódica normal para diferentes materiales del cátodo y distintos gases se da en la tabla XIII.

Tabla XIII

Caída de tensión catódica normal (en V)

Material del cátodo	Gas					
	N_2	H_2	He	Ne	Ar	Hg
Na	178	185	80	75	—	—
Cu	208	214	177	220	131	447
Al	179	171	141	120	100	245
Fe	215	198	153	150	131	389
Ni	197	211	158	140	131	275

Al aumentar la intensidad de la corriente (disminuyendo la resistencia exterior), aumenta también proporcionalmente la superficie del cátodo cubierta por la luminosidad, de manera que la densidad de la corriente junto a la superficie del cátodo permanece constante. Después de que todo el cátodo ha sido abarcado por la luminosidad, el aumento ulterior de la intensidad de la corriente depende del aumento de la caída de tensión catódica y, por consiguiente, de la diferencia de potencial entre los electrodos. Así tenemos que a la descarga luminiscente no se le puede aplicar de ningún modo la ley de Ohm.

Para corrientes muy intensas, cuando se observa un calentamiento del cátodo, se puede producir incluso la llamada característica de caída (del arco), que consiste en que la diferencia de potencial de los electrodos disminuye con el aumento de la intensidad de la corriente que pasa por el tubo.

Para que la descarga empiece (cebado o encendido del arco) se necesita una diferencia de potencial un poco mayor que la caída de tensión catódica.

Los procesos que tienen lugar en el tubo se pueden representar esquemáticamente de la siguiente manera. Al aplicar a los electrodos una diferencia de potencial suficientemente elevada, en el tubo se crea un campo que acelera a los iones y electrones libres que, aunque en pequeña cantidad, siempre hay en un gas. Los electrones, en su recorrido, ionizan los átomos del gas y crean nuevos iones, lo cual conduce, de acuerdo con la teoría, a una brusca elevación de la corriente. Después, la caída de tensión catódica desempeña una función muy importante. Esta caída de tensión se concentra en un

espacio de longitud del orden del recorrido libre de los electrones. En este espacio, los electrones adquieren la velocidad suficiente para que sus choques empiecen a ser de carácter inelástico. En esta misma zona, los iones positivos se aceleran en dirección hacia el cátodo y, chocando con él, le arrancan nuevos electrones de su superficie, con lo cual aumenta la conducción del gas.

En la zona correspondiente a la columna positiva, la concentración de iones positivos y electrones es la misma; pero debido a la mayor movilidad de los electrones, la conducción del gas se debe casi exclusivamente a los electrones. El grado de ionización en la zona de la columna positiva puede ser muy elevado; así, por ejemplo, si se hace una descarga en el vapor de mercurio a la presión de 0,05 mm Hg, el número de electrones por unidad de volumen puede alcanzar la cifra de 10^{13} cm^{-3}. Como en estas condiciones el número de átomos por unidad de volumen es igual aproximadamente a $2 \cdot 10^{15}$ cm^{-3}, se deduce que la 1/200 parte de todos los átomos de mercurio se ha ionizado.

El gas altamente ionizado, siendo igual el número de electrones que el de iones positivos por unidad de volumen, es un medio cuasineutro denominado *plasma*. En el plasma, los electrones principalmente están dotados de un movimiento desordenado y sólo se aproximan hacia el ánodo a una velocidad relativamente pequeña (compárense los cálculos de la pág. 284).

Las mediciones realizadas con ayuda de un método especial denominado *método de sonda*, han demostrado que las velocidades de este movimiento desordenado de electrones se someten a la distrubición de Maxwell, siendo relativamente grandes las energías cinéticas medias, oscilando, según la naturaleza del gas y las condiciones de descarga, de 2 eV a 10 eV, aproximadamente. Utilizando la ecuación

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

podemos determinar la temperatura T correspondiente a la energía media dada del movimiento de los electrones. Para $\frac{m\bar{v}^2}{2} = 1$ eV obtenemos que

$$T = \frac{2}{3k} \cdot \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-16}} °K = 7\,735° K.$$

Por consiguiente, a las energías medias de los electrones comprendidas entre 2 eV y 10 eV, les corresponderán temperaturas desde 15 000° K hasta 70 000° K. La temperatura del propio gas en que se efectúa la descarga, será mucho menor y puede no ser mayor de varios centenares de grados. Así tenemos que el plasma es una especie de mezcla de dos gases, atómico y electrónico, cada uno de los cuales por separado se halla en equilibrio y se caracteriza por su propia temperatura; mientras que el intercambio de energía entre ambos gases, a pesar de que mutuamente penetran uno en el otro, es tan pequeño, que sus temperaturas no se equilibran y siguen siendo altamente distintas.

2. Arco eléctrico. Un interés especial presenta el caso de conducción a través de un gas sin agente ionizante a presiones aproxima-

www.elsolucionario.org

damente iguales a la atmosférica o mayores. El primero que observó este tipo de descarga fue V. Petrov, profesor de la Academia de medicina y cirujía de Petersburgo, y en 1803 se denominó *arco eléctrico*. Unos años después Davy también estudió este fenómeno y lo denominó *arco voltaico* en honor de Volta, uno de los primeros investigadores de los fenómenos eléctricos.

El arco eléctrico se forma poniendo en contacto y separando después dos electrodos generalmente de carbón. El arco entre los electrodos de carbón se forma a una diferencia de potencial de 30—40 V, y la intensidad de la corriente puede llegar a ser de muchas decenas de amperios. Ambos electrodos se calientan extremadamente (hasta alcanzar la temperatura de 3 000° C, y, a presiones elevadas, llega incluso a ser de 6 000°C). A la presión atmosférica se calienta más el electrodo positivo, en el cual se forma un hoyo denominado *cráter*. No obstante, para que se forme el arco sólo hace falta que en el cátodo haya una zona incandescente, mancha catódica, que es el manantial de electrones. El ánodo puede permanecer frío. V. Mitkévich, en 1905 fue el primero en aclarar la importancia del cátodo incandescente como fuente de electrones que mantienen la descarga.

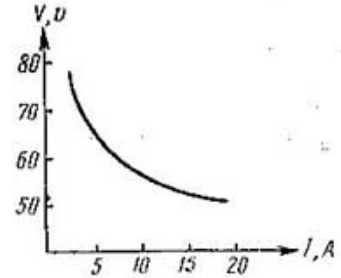


Fig. 173. Característica de caída de la descarga de arco.

La descarga de arco posee una *característica de caída*: con el aumento de la intensidad de la corriente (a costa de la disminución de la resistencia exterior) disminuye la diferencia de potencial entre los electrodos (fig. 173).

P. Yáblochkov (Jablochkoff) fue el primero en aplicar el arco eléctrico en el alumbrado de las calles. En la actualidad, el arco eléctrico se utiliza principalmente en los reflectores y en los aparatos de proyección (cine). El arco entre dos electrodos metálicos se utiliza para el calentamiento local del metal (soldadura eléctrica, que fue aplicada en la práctica por los ingenieros N. Slaviánov y N. Benardos).

En la actualidad, para el alumbrado y en la práctica de laboratorio se utilizan también arcos eléctricos en gases o en vapores a baja presión. El manantial de electrones primarios en estos arcos también son cátodos incandescentes, que se calientan a costa de los procesos que se desarrollan en la misma descarga, o por un generador de corriente exterior ("cátodos de caldeo").

3. Chispa. La chispa eléctrica surge entre dos electrodos fríos con una gran diferencia de potencial. La descarga es de carácter

oscilatorio complejo. Al aumentar la intensidad de la corriente, si se caldean los electrodos, la chispa se transforma en arco.

El comienzo de la chispa eléctrica se puede considerar como una descarga eléctrica disruptiva, como una creciente avalancha de iones en el gas, con lo cual éste se hace conductor. La diferencia de potencial que causa la disrupción, depende del material de los electrodos, de la naturaleza y presión del gas y, además, de las dimensiones y forma de los electrodos y de la distancia entre ellos. Para los electrodos en punta, la diferencia de potencial de disrupción es menor.

En el caso de que los electrodos sean grandes y planos, dado el material de los mismos y el gas, la tensión disruptiva depende solamente del producto pd, donde p es la presión del gas y d la distancia entre los electrodos. Así, la tensión disruptiva a la presión atmosférica y a la distancia de 5 cm entre los electrodos, es la misma que a la presión de 0,5 atm y a la distancia de 10 cm entre los electrodos.

La distancia entre los electrodos a que surge la disrupción a la tensión dada, se denomina *distancia disruptiva* o *distancia explosiva* (de la chispa).

En la tabla XIV se dan las distancias disruptivas de una serie de casos particulares.

Tabla XIV

Distancia disruptiva (en milímetros) en el aire a la presión atmosférica

Diferencia de potencial (en V)	Distancia entre los electrodos de forma:		
	puntiaguda	esférica de 5 cm de diámetro	plana
20 000	15,5	5,8	6,1
40 000	45,5	13	13,7
100 000	220	45	36,7
200 000	410	262	75,3
300 000	600	530	114

4. Efluvio (eléctrico). Un tipo especial de descarga es el llamado efluvio (eléctrico), que se produce a presiones relativamente elevadas (como la atmosférica), cuando el campo en el espacio de disrupción es muy irregular debido al pequeño radio de curvatura de uno o de los dos electrodos. La ionización y fluorescencia del gas tienen lugar en una estrecha capa cerca de los electrodos; en el resto de la parte del gas la conducción es debida al movimiento de iones de ambos signos. En la transmisión de corriente de alta tensión por hilos conductores, el efluvio eléctrico es un fenómeno perturbador de gran importancia.

SEXTA PARTE

FENOMENOS ELECTROMAGNETICOS

CAPITULO XVIII

Campo magnético

§ 191. El campo magnético y su característica. De la misma manera que en el espacio que rodea a una carga eléctrica se forma un campo electrostático de determinadas propiedades físicas, en el espacio que rodea a los conductores recorridos por una corriente eléctrica, se crea un campo especial denominado *campo magnético*. La presencia de un campo electrostático se revela por la acción de las fuerzas sobre los cuerpos cargados que se introducen en este campo. El campo magnético se revela por las fuerzas que actúan sobre los conductores introducidos en él y por los cuales fluye una corriente. Así tenemos que dos conductores paralelos por los cuales fluyen corrientes en una misma dirección y sentido, se atraen mutuamente (fig. 174). Este hecho se explica de la siguiente manera: cada una de las corrientes crea un campo magnético en el espacio que la rodea, y este campo actúa sobre el conductor recorrido por la otra corriente. El carácter de la acción de un campo magnético sobre un conductor recorrido por una corriente depende de la forma del conductor, de la posición que ocupe y de la dirección de la corriente que lo recorre. Por eso, para caracterizar el campo magnético hay que examinar la acción que éste ejerce sobre un conductor recorrido por una corriente bien definida. Por ahora consideraremos que los conductores recorridos por corrientes se hallan en el vacío.

www.elsolucionario.org

En electrostática, para el estudio de las propiedades del campo electrostático hemos utilizado el concepto de carga puntual, es decir, de una carga concentrada en un cuerpo, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia de las cargas que crean el campo (véase el § 124). Para el estudio de las propiedades del campo magnético utilicemos la acción que ejerce éste *sobre un contorno plano cerrado recorrido por una corriente.* A este contorno lo llamaremos

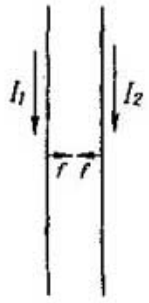


Fig. 174. Atracción recíproca de dos conductores paralelos recorridos por corrientes de un mismo sentido.

Fig. 175. Cuadro con corriente.

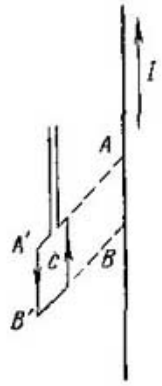


Fig. 176. El cuadro, que gira libremente, se coloca en el plano $AA'BB'$ que pasa por el conductor.

cuadro. Las dimensiones de este contorno deben ser pequeñas en comparación con la distancia que lo separa de los conductores con corriente que crean el campo. Prácticamente, para mantener en el cuadro una corriente continua hay que suministrársela mediante unos conductores cualesquiera. El campo magnético actuará también sobre estos conductores. Para evitar esta acción, los hilos conductores se colocan juntos, con lo cual la acción total del campo magnético sobre ellos será igual a cero (por la dependencia que hay entre la dirección de las fuerzas magnéticas y la de la corriente, que se indica más abajo). Este cuadro, suspedido de un hilo fino y capaz de revelar una deformación de torsión (fig. 175), lo utilizaremos para investigar las propiedades del campo magnético.

La experiencia demuestra que este cuadro rectangular colocado cerca de conductores recorridos por corrientes gira de una manera determinada. *El campo magnético ejerce sobre el cuadro una acción orientadora.*

Sea, por ejemplo, un conductor recto y largo (fig. 176), por el cual fluye una corriente I. El cuadro C colocado cerca de este con-

conductor. En este caso la orientación del cuadro dependerá también de la dirección de la corriente que lo recorre: si cambiamos el sentido de la corriente que fluye por el cuadro, éste realizará un giro de 180 .*)

La acción orientadora del campo sobre el cuadro se puede utilizar ante todo para caracterizar la *dirección del campo magnético*. Para ello tracemos la normal al plano del cuadro. *El sentido positivo de la normal se elige de manera que, mirando desde el extremo de la normal, la corriente del cuadro fluya en el sentido contrario de las agujas del reloj.*

En otras palabras, consideraremos positivo el sentido de la normal que coincida con el de avance del sacacorchos, cuya manilla gira según la corriente que fluye por el cuadro (fig. 177).

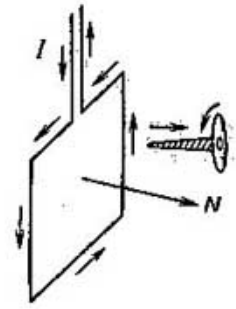


Fig. 177. Sentido positivo de la normal al cuadro con corriente.

De resultas de la acción del campo magnético sobre el cuadro con corriente, éste estará orientado de manera determinada **) en cada caso dado, y su normal tendrá un sentido determinado. Está claro que el hecho de esta determinada orientación del cuadro en un campo magnético nos indica que el propio campo tiene un sentido determinado. *En el lugar en que está el cuadro, el sentido del campo magnético se considera el que coincide con la normal positiva del cuadro.* Así, según la orientación del cuadro se puede determinar unívocamente el sentido del campo magnético.

Además, podemos utilizar el mismo cuadro para determinar la característica cuantitativa del campo magnético.

El hecho de que el cuadro sufra la acción orientadora del campo, indica que *sobre el cuadro situado en un campo magnético actúa un par de fuerzas.****) La magnitud de este par de fuerzas se puede medir considerando la torsión del hilo del que está suspendido el cuadro. La experiencia demuestra que la magnitud del momento M de este par depende tanto de la intensidad y disposición de las corrientes que crean el campo magnético, como de las propiedades del mismo

*) Después veremos que sobre un cuadro en un campo magnético actúa un par de fuerzas que desaparece cuando el cuadro adquiere una orientación determinada. Por eso, en general, el cuadro puede oscilar alrededor de su posición de equilibrio en el campo magnético. No obstante, si hay fuerzas de rozamiento, estas oscilaciones se amortiguan rápidamente.

**) Además de esta orientación del cuadro, puede haber una orientación en que la normal vaya en sentido contrario; pero la posición del cuadro correspondiente a esta segunda orientación es inestable.

***) En un campo variable, sobre el cuadro actúa además una fuerza (véase el § 197) que, no obstante, no analizaremos por ahora.

cuadro: de sus dimensiones, orientación e intensidad de la corriente que fluye por él.

Detengámonos antes que nada en las propiedades del propio cuadro. Para ello mantendremos invariables la posición e intensidades de las corrientes que crean el campo magnético. Sea un cuadro determinado con una corriente de intensidad también determinada. Cuando la normal del cuadro está orientada según el campo magnético, el momento del par de fuerzas que actúa sobre el cuadro es igual a cero. *El momento del par de fuerzas adquiere el valor máximo cuando la normal del cuadro está orientada perpendicularmente a la dirección del campo.* Por eso consideraremos que, en todos los casos cuando queramos utilizar el cuadro para determinar cuantitativamente la característica del campo magnético, lo debemos disponer de manera que su normal sea perpendicular a la dirección del campo. A continuación es fácil determinar experimentalmente que el momento M del par de fuerzas es proporcional a la intensidad I de la corriente que fluye por el cuadro. Por último, la experiencia demuestra que para distintos cuadros planos el momento M es proporcional al área S del cuadro, independientemente de su forma (el cuadro puede ser rectangular, circular, elíptico, etc.):

$$M \sim IS. \tag{1}$$

La magnitud proporcional al producto de la intensidad I de la corriente del cuadro por su área S se denomina *momento magnético del cuadro* p_m:

$$p_m \sim IS. \tag{2}$$

En un punto dado del campo magnético, sobre todos los cuadros de un mismo momento magnético p_m actúan iguales pares de fuerzas M.

Si un mismo cuadro de determinado momento magnético lo colocamos en distintos puntos del campo magnético, observaremos que sobre el cuadro actuarán diferentes momentos de fuerzas M. Por ejemplo, cuanto más cerca del conductor recorrido por la corriente que crea el campo, coloquemos el cuadro, tanto mayor será el momento de las fuerzas que actúan sobre él. Este hecho se puede utilizar para caracterizar cuantitativamente el campo magnético, a saber, considerando que el momento M de las fuerzas que actúan sobre el cuadro de momento magnético p_m dado, es tanto mayor, cuanto mayor sea la *excitación magnética* H (*intensidad del campo magnético*) en el lugar en que está el cuadro:

$$M \sim H.$$

Ligando esta conclusión con la relación (1) obtenemos que el momento de un par de fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido

www.elsolucionario.org

por una corriente y que se halla en un campo magnético, es proporcional al momento magnético del cuadro p_m y a la excitación magnética H en el lugar en que se halla el cuadro:

$$M \sim p_m H. \tag{3}$$

Nosotros utilizaremos esta relación para medir, con ayuda del cuadro, la excitación magnética H. De la (3) y de la (2) tenemos que

$$H \sim \frac{M}{p_m} \sim \frac{M}{IS}. \tag{4}$$

En la última expresión, para pasar del signo de proporcionalidad al de igualdad, hay que introducir el coeficiente de proporcionalidad k, obteniendo que

$$H = k\frac{M}{IS}. \tag{4a}$$

El valor numérico del coeficiente de proporcionalidad k depende del sistema elegido de unidades de H, M, I y S. Después de haber elegido determinado valor numérico de k, podemos medir, basándonos en la ecuación (4a), la excitación magnética H en función del momento M de fuerzas que actúan sobre el cuadro de momento magnético conocido p_m. Sobre las unidades en que se mide la excitación magnética H se hablará en el § 195.

Como el campo magnético viene caracterizado también por la dirección y sentido y por el valor numérico de la excitación, la excitación magnética **H** será una *magnitud vectorial*. Resumiendo lo dicho tenemos que la dirección y sentido del vector de excitación magnética H en cada punto dado del campo magnético vienen determinados por la dirección y sentido de la normal positiva al cuadro recorrido por una corriente y que adquiere una posición de equilibrio estable en el campo magnético. La magnitud de la excitación viene determinada, según la ecuación (4a), por el momento del par de fuerzas que actúan sobre el cuadro, a condición de que la normal al cuadro sea perpendicular a la dirección del vector H.

Ahora podemos concretar la cuestión de las dimensiones del cuadro. Está claro que en el caso de un campo variable, el momento de fuerzas que actúan sobre el cuadro, medirá el valor medio de la excitación magnética dentro de los límites del cuadro. Para medir la excitación magnética en el punto dado, *las dimensiones del cuadro deben ser tan pequeñas, que dentro de los límites del cuadro se pueda considerar el campo uniforme.*

§ 192. Representación gráfica de la excitación magnética. De manera análoga a como en electrostática examinamos el método

ráfico de la característica del campo electrostático con ayuda de as líneas de fuerza, para caracterizar el campo magnético introlucimos el concepto de líneas de fuerza del campo magnético. *Por ínea de fuerza del campo magnético tomaremos la línea, cuya tangente n cada uno de sus puntos coincide en dirección y sentido con el vector le excitación* **H** *en el punto dado* (fig. 178). Consideremos que la lirección de las líneas de fuerza del campo magnético coincide en odas las zonas con la del vector de excitación magnética **H**.

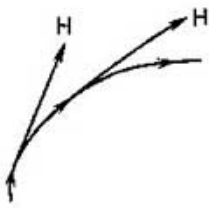


Fig. 178. Línea de fuerza del campo magnético.

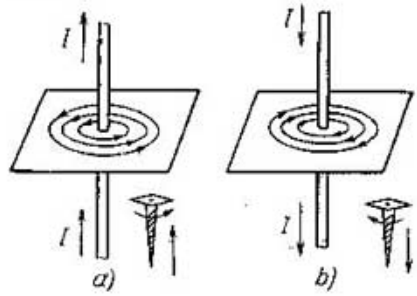


Fig. 179. Dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo magnético de una corriente rectilínea.

Utilizando un cuadro con corriente podemos determinar, según el método descrito en el párrafo anterior, el aspecto de las líneas de fuerza del campo magnético para diferentes casos particulares.

En el caso de una corriente rectilínea y larga (una corriente que recorre un conductor rectilíneo), como hemos visto, el cuadro se orienta según el plano por el que pasa la corriente. Por consiguiente, la normal al cuadro se orientará perpendicularmente al radio vector que une el conductor recorrido por la corriente, con el lugar donde esté el cuadro. De esto se deduce que en el caso de un conductor largo recorrido por una corriente, las líneas de fuerza del campo magnético tienen forma de circunferencias que se hallan en los planos perpendiculares al conductor de centro en el lugar por donde pasa la corriente. La dirección de las líneas de fuerza del campo magnético se indica en la fig. 179 *a* y *b*. El sentido lo determina *la regla del sacacorchos: si el movimiento de traslación del sacacorchos coincide con el de la corriente, el sentido de giro de su manilla nos dará el de las líneas de fuerza del campo magnético.*

Con ayuda de un cuadro se pueden analizar los campos magnéticos de las corrientes de cualquier forma. Sea, por ejemplo una corriente que recorre un conductor circular. En este caso, las líneas de fuerza del campo magnético en el plano perpendicular al contorno de la corriente serán las curvas representadas en la fig. 180. Estas

líneas también serán curvas cerradas, o curvas que tienden a cerrarse en su prolongación.

Un sistema de corrientes que pasan por espiras circulares paralelas de eje rectilíneo común, se denomina *solenoide*.

El solenoide generalmente es un conductor arrollado sobre una superficie cilíndrica y recorrido por una corriente. Al examinar el campo magnético de un solenoide obtenemos el cuadro representado en la fig. 181. En la parte media del interior del solenoide, las líneas de fuerza del campo magnético son un sistema de rectas

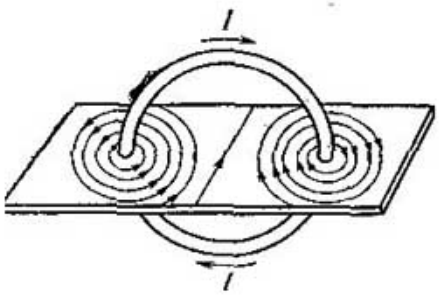


Fig. 180. Dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo magnético de una corriente circular.

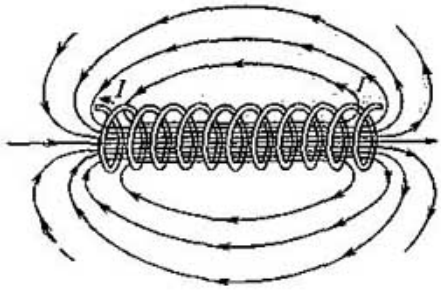


Fig. 181. Dirección y sentido de las líneas de fuerza del campo magnético de un solenoide.

paralelas al eje del solenoide que, a medida que se acercan a los extremos del solenoide, se transforman en curvas divergentes que se cierran o tienden a cerrarse en el espacio exterior. Las líneas de fuerza del campo magnético de un solenoide en su parte exterior se parecen a las líneas de fuerza del campo de un dipolo (véase la fig. 17, *b*). Pero la dirección de las líneas de fuerza del campo magnético en el interior del solenoide ininterrumpidamente pasa a ser la dirección de las líneas de fuerza fuera del solenoide; mientras que las líneas de fuerza del campo del dipolo cambian de dirección en las cargas del dipolo. En el espacio exterior al solenoide, el campo magnético tiene cierto valor perceptible solamente en las proximidades de los extremos del solenoide, y al alejarse de los extremos se debilita rápidamente. Fuera del solenoide y en su parte media, el campo magnético es muy débil. Cuanto más largo sea el solenoide, con mayor intensidad se expresarán estas particularidades del campo. *En la parte interior del solenoide, el campo se puede considerar homogéneo.* Esta homogeneidad se altera en cierto grado solamente cerca de los extremos del solenoide.

Un sistema de espiras iguales recorridas por una corriente y cuyos centros están en una circunferencia, forma el *toroide* (fig. 182).

www.elsolucionario.org

El campo magnético de un toroide se concentra solamente en su parte interior; sobre un cuadro recorrido por una corriente colocado en la parte exterior no actúa ninguna fuerza.

Si la longitud del toroide es grande en comparación con su sección transversal, el campo en el interior del mismo se puede considerar también homogéneo.

La experiencia demuestra que el solenoide se orienta en un campo magnético de la misma manera que el cuadro recorrido por una

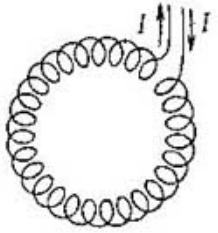


Fig. 182. Toroide.

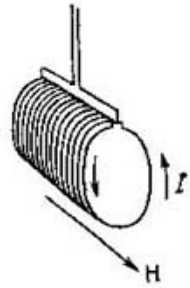


Fig. 183. Orientación de un solenoide en un campo magnético exterior.

corriente. En este caso, si se mira al solenoide en sentido contrario a las líneas de fuerza del campo magnético, veremos que la corriente del solenoide va en sentido contrario a las agujas del reloj (fig. 183). El momento M de las fuerzas que actúan sobre el solenoide que consta de n espiras, será, naturalmente, n veces mayor que el momento que actúa sobre una espira. Así, por analogía con la fórmula (4a) del § 191, se puede escribir que si el eje del solenoide es perpendicular a las líneas de fuerza del campo magnético, sobre él actuará un par de fuerzas de momento

$$M = \frac{1}{k} nIS \cdot H. \qquad (1)$$

Momento magnético de un solenoide se denomina la magnitud p_s, que es n veces mayor que el momento magnético de una espira:

$$p_s \sim nIS, \qquad (2)$$

donde I es la intensidad de la corriente que fluye por el solenoide y S, el área de su sección transversal.

El examen de las líneas de fuerza del campo magnético creado por corrientes demuestra que son *líneas cerradas. Las líneas de fuerza de un campo magnético siempre encierran en su interior al conductor por donde fluye la corriente.* La forma cerrada de las líneas de fuer-

a del campo magnético es la diferencia característica que las listingue de las líneas de fuerza del campo electrostático. Este hecho ndica que entre los campos magnético y electrostático no hay gran-les analogías. La naturaleza de estos campos es distinta.

El campo electrostático, cuyas líneas de fuerza empiezan en unas argas y terminan en otras o se pierden en el infinito, es un *campo otencial*. A cada punto de este campo se le puede atribuir deter-ninado valor unívoco de potencial. El campo magnético se caracte-iza por la forma cerrada de sus líneas de fuerza. Este campo se lenomina *campo solenoidal*. Como veremos después (véase el § 198), i los puntos del campo magnético no se les puede atribuir un valor inívoco de potencial, como se hace respecto al campo electrostático.

Las líneas de fuerza de excitación magnética H, indicando la lirección de la excitación en cada punto del campo, no determinan, in datos complementarios, la magnitud de la excitación. Si con-enimos, de manera análoga a como se ha hecho en electrostática, n equiparar la densidad del trazado de líneas de fuerza magnéticas on el valor numérico de la excitación, el cuadro que presentan las íneas de fuerza del campo magnético, caracterizará al campo mag-nético cuantitativamente. Cualquier campo se puede considerar niforme en una zona suficientemente pequeña. En una zona de éstas, ea una superficie elemental ΔS_0 perpendicular a las líneas de fuerza lel campo magnético de dicha zona. Convengamos en trazar por sta superficie ΔS_0 un número ΔN de líneas de fuerza, que la rela-ión entre este número y la magnitud del área ΔS_0 sea igual a la xcitación en la zona dada del campo:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S_0} = H.$$

El número de líneas de fuerza que pasa por cualquier superficie ΔS, es igual al número de líneas de fuerza que atraviesa a la proyec-ión ΔS_0 de la superficie ΔS, proyección perpendicular a las líneas le fuerza (fig. 184). De aquí que el número de líneas de fuerza ΔN que atraviesan la superficie ΔS, sea

$$\Delta N = H \Delta S \cos \alpha, \tag{3}$$

donde α es el ángulo entre la dirección de las líneas de fuerza y la normal a la superficie ΔS. Como $H \cos \alpha = H_n$, donde H_n es la proyección del vector de excitación magnética **H** sobre la normal al elemento de superficie ΔS, la ecuación (3) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Delta N = H_n \Delta S. \tag{3a}$$

La ecuación (3a) determina el *flujo magnético elemental* ΔN que pasa a través de la superficie elemental ΔS. Está claro que el signo del

flujo ΔN dependerá del de H_n. El signo de H_n a su vez viene determinado por la elección del sentido de la normal. Si el elemento ΔS pertenece a una superficie cerrada, se ha convenido en tomar como sentido positivo de la normal, el *exterior* respecto al volumen limitado por la superficie dada (compárese con lo dicho en la pág. 32).

El flujo total N que atraviesa una superficie finita viene determinado por la suma algebraica de los flujos elementales que atraviesan todos los elementos ΔS que forman la superficie S dada:

$$N = \sum \Delta N = \sum H_n \Delta S. \qquad (4)$$

Si la superficie S es cerrada, el número de líneas de fuerza magnéticas que entran en el volumen limitado por la superficie, es

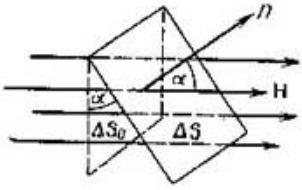


Fig. 184. Líneas de fuerza de un campo magnético que pasan a través de una superficie elemental ΔS inclinada.

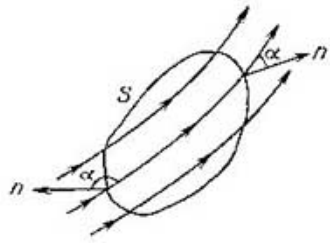


Fig. 185. Flujo de las líneas de fuerza del campo magnético a través de una superficie cerrada.

igual al número de líneas de fuerza que salen de este volumen, ya que las líneas de fuerza de un campo magnético son siempre curvas cerradas. En este caso, las líneas de fuerza entrantes forman un ángulo obtuso con la dirección de la normal exterior (fig. 185) y crean un flujo negativo; mientras que las líneas de fuerza salientes forman un ángulo agudo con la normal exterior y crean un flujo positivo. De esta manera estos dos flujos se compensan mutuamente y llegamos a la conclusión de que *el flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero.*

De nuevo se refleja aquí la diferencia esencial entre los campos magnético y electrostático. El flujo total de las líneas de fuerza del campo eléctrico E puede ser diferente de cero, como se deduce del teorema de Ostrogradski — Gauss (§ 126).

Utilizando las notaciones del cálculo integral sustituimos, en la ecuación (4), la suma por la integral y obtenemos para el flujo magnético N que atraviesa la superficie S:

$$N = \int_S H_n dS, \qquad (4a)$$

donde la integral se extiende a toda la superficie S.

www.elsolucionario.org

El flujo magnético a través de una superficie cerrada, como se ha indicado, es igual a cero; por consiguiente, si la integral (4a) la extendemos a una *superficie cerrada*, tendremos que

$$\int_S H_n dS = 0. \tag{5}$$

Sea V el volumen limitado por la superficie que examinamos, entonces (compárese con lo dicho en la pág. 144, § 156) al reducir el volumen y, por lo tanto, la superficie hasta transformarlo en un punto, tendremos que

$$\lim_{V \to 0} \left(\frac{1}{V} \int_S H_n dS \right) = \operatorname{div} \mathbf{H}.$$

Como $\int_S H_n dS$ siempre es igual a cero, tendremos que

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Así tenemos que *en el vacío, en cualquier punto del espacio, la divergencia del vector de excitación magnética* **H** *es igual a cero.*

En electrostática, como se ha indicado en el § 132, tenemos que

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

donde ρ es la densidad de carga espacial en el punto dado. Solamente en los lugares donde la densidad de carga espacial eléctrica es $\rho = 0$, la divergencia del vector de intensidad del campo electrostático **E** es igual a cero. Mientras que en todos los lugares donde la densidad de carga espacial eléctrica ρ no es igual a cero, la divergencia del vector **E** tampoco es igual a cero. Como, según lo dicho, la divergencia del vector **H** en el vacío siempre es igual a cero, se deduce que en la zona de fenómenos magnéticos no hay nada análogo a las cargas eléctricas.

§ 193. Determinación del campo magnético de las corrientes. Como se ha indicado, la excitación magnética **H** en cualquier punto del espacio depende de la forma de los conductores por donde fluye la corriente, de las intensidades de las corrientes y de la situación de los puntos a examinar respecto a estos conductores. Experimentalmente, la dirección y magnitud de la excitación magnética **H** se pueden determinar en función del momento M de fuerzas que actúan sobre el cuadro de momento magnético p_m dado.

Como simple ejemplo podemos elegir un conductor recto y muy largo y determinar la excitación magnética H a una distancia r del mismo.

Ante todo determinemos experimentalmente, con ayuda de un cuadro, qué dependencia hay entre la excitación magnética H, por un lado, y la intensidad de la corriente I que fluye por el conductor, y la distancia r al conductor de otro lado. El campo magnético creado por la corriente que fluye por el conductor recto y largo, es variable; pero si las dimensiones del cuadro son pequeñas en comparación con la distancia r, el campo dentro de los límites del cuadro se puede considerar uniforme. Como se ha indicado en la

pág. 296 el cuadro cerca del conductor recto y largo gira orientándose de manera que su normal sea perpendicular a la recta r trazada desde la parte más cercana del conductor hasta el cuadro. Si la corriente I (fig. 186, *a*) fluye por el conductor de arriba hacia abajo, la normal N al cuadro será perpendicular al plano del dibujo con el extremo positivo dirigido hacia el lector. Para mantener esta normal en la dirección de r (fig. 186, *b*) hay que aplicar al cuadro un momento M de fuerzas que, según lo dicho, sea proporcional a

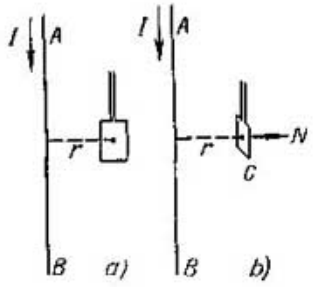


Fig. 186. Determinación de la excitación magnética con ayuda de un cuadro.

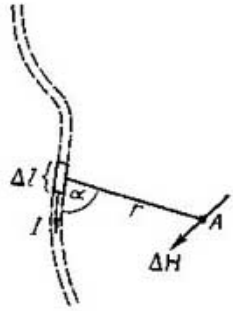


Fig. 187. El elemento de corriente Δl crea en el punto A una excitación magnética ΔH perpendicular al plano que contiene el elemento Δl y el radio vector r.

la excitación magnética H. Midiendo el momento M de fuerzas, siendo constante el momento magnético del cuadro p_m, es fácil ver ante todo que este momento es proporcional a la intensidad I de la corriente del conductor AB. De esto se deduce que la excitación magnética H es proporcional a la intensidad I de la corriente que crea el campo:

$$H \sim I.$$

En segundo lugar, colocando el cuadro a diferentes distancias r del conductor, se puede observar que el momento M es inversamente proporcional a la distancia r del conductor, de lo cual se deduce que la excitación magnética H es inversamente proporcional a r:

$$H \sim \frac{1}{r}.$$

La razón inversa de la excitación magnética de una corriente rectilínea respecto a la distancia al conductor la aclararon Biot y Savart en 1820. Sin embargo, esta dependencia tiene lugar solamente en el caso particular de un conductor rectilíneo y largo. En cada caso particular, la dependencia de la excitación magnética respecto a

posición general de los conductores recorridos por corrientes, será otra. La única propiedad común es la proporcionalidad de la excitación magnética H en el punto dado respecto a la intensidad I de la corriente que crea el campo.

La excitación magnética H creada por la corriente que fluye por un conductor, viene determinada por la acción de todas las porciones de este conductor. Las distintas porciones originan excitaciones elementales ΔH, y la excitación observada H es la suma vectorial de todas las elementales. Esto, naturalmente, condujo a intentar establecer una ley que relacionase la porción elemental de la corriente con la excitación magnética correspondiente a esta porción de corriente. Experimentalmente no podemos aislar una porción de corriente, por lo tanto no podemos medir directamente el campo creado por un elemento de corriente. Solamente se puede medir la excitación magnética total creada por todos los elementos de la corriente en el punto dado del espacio. No obstante, Laplace consiguió hallar, generalizando los datos experimentales, una ley elemental que, aplicada a las porciones de un contorno de forma arbitraria, permitía calcular, en todos los casos, el valor de la excitación magnética resultante y que coincidía con las mediciones experimentales. Esta ley se ha convenido denominarla *ley de Biot-Savart-Laplace.*

Esta ley consiste en lo siguiente: un elemento Δl del contorno por donde fluye una corriente de intensidad I, crea en un punto arbitrariamente elegido A (fig. 187) un campo magnético de excitación ΔH igual a

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2}, \qquad (1)$$

donde r es la distancia desde la porción elemental del conductor Δl hasta el punto A; α, el ángulo que forma el radio vector r desde la porción elemental del conductor hasta el punto A, con el elemento Δl, y k', un coeficiente de proporcionalidad. El vector ΔH es perpendicular al plano que contiene el elemento Δl y el radio vector r; la dirección y sentido de ΔH vienen determinados por la regla del sacacorchos: el sentido de giro de la manilla del sacacorchos coincidirá con el de ΔH, si el movimiento de traslación del sacacorchos coincide con el sentido de la corriente I en el elemento del contorno Δl.

Según lo dicho, la fórmula (1) de Biot-Savart-Laplace no nos da toda la excitación magnética H creada por la corriente dada en el punto A, sino solamente la parte creada por el elemento Δl del contorno. *La excitación total* H *es la suma vectorial de todos los vectores elementales* ΔH *creados por todos los elementos en que mentalmente se ha dividido el contorno de la corriente.* La coincidencia

www.elsolucionario.org

de los resultados obtenidos según la fórmula (1) para diferentes contornos de corriente, con los datos experimentales es una confirmación de su veracidad.

Para determinar el sentido y la magnitud de ΔH, la fórmula (1) se puede escribir en forma vectorial:

$$\Delta H = k' \frac{I\,[\Delta l \times r]}{r^3}, \qquad (1a)$$

donde $[\Delta l \times r]$ es el producto vectorial de los vectores Δl y r.

Al elemento Δl de longitud del conductor se le atribuye el mismo sentido que el de la corriente. El radio vector r se traza desde el elemento Δl del conductor hasta el punto A en que se calcula la excitación. La excitación magnética total H del punto A viene determinada por la suma geométrica de todas las excitaciones elementales ΔH:

$$H = \sum \Delta H.$$

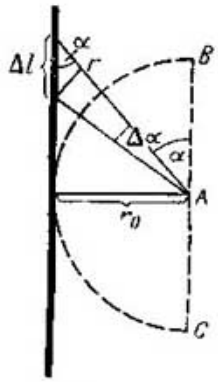


Fig. 188. Representación gráfica para calcular la excitación magnética de una corriente rectilínea.

De la ley elemental (1) se deduce que la excitación magnética H de una corriente que fluye por un conductor rectilíneo y largo, es proporcional a I/r. Efectivamente, determinemos la excitación magnética H del punto A a la distancia r_0 de un conductor rectilíneo muy largo (fig. 188) como la suma de las excitaciones elementales creadas por los distintos elementos del conductor. Según la fórmula de Biot-Savart-Laplace (1), el elemento Δl del conductor de la corriente crea en el punto A una excitación

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2},$$

donde r es la distancia del elemento Δl al punto A. ΔH es perpendicular al plano del dibujo y, si la corriente va de arriba hacia abajo, ΔH va dirigido hacia el lector.

De esta manera, tenemos que las excitaciones ΔH de todos los elementos Δl tendrán el mismo sentido y la excitación total H vendrá expresada por la suma algebraica:

$$H = \sum k' \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2}.$$

En la fig. 188 tenemos que

$$\Delta l = \frac{r \cdot \Delta \alpha}{\operatorname{sen} \alpha},$$

de donde

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r \operatorname{sen} \alpha},$$

pero r sen $\alpha = r_0$ y, por consiguiente,

$$\frac{\Delta l}{r^2} = \frac{\Delta \alpha}{r_0},$$

después de lo cual, la ecuación de H adquiere la forma:

$$H = \sum k' \frac{I \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta \alpha}{r_0}. \qquad (2)$$

Suponiendo que los elementos Δl en que nosotros mentalmente hemos dividido el conductor, son infinitamente pequeños, nos dará que el ángulo $\Delta \alpha$ también será infinitamente pequeño, por lo tanto, la suma de la ecuación (2) debe ser sustituida por la integral:

$$H = \int k' \frac{I \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha}{r_0}.$$

Hay que integrar según todos los valores de α empezando de $\alpha = 0$, que corresponde a los elementos dl superiores más alejados, hasta $\alpha = \pi$, que corresponde a los elementos dl inferiores más alejados. Por consiguiente, los límites de la integración serán 0 y π. Observando, además, que I y r_0, como magnitudes constantes, se pueden sacar del signo de la integral, obtenemos que

$$H = k' \frac{I}{r_0} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha = k' \frac{I}{r_0} \left[-\cos \alpha \right]_0^{\pi} = k' \frac{2I}{r_0}. \qquad (3)$$

Así, de la ley de Biot-Savart-Laplace se deduce realmente que la excitación magnética H creada por una corriente que fluye por un conductor rectilíneo infinitamente largo, es proporcional a I/r_0, donde r_0 es la distancia del punto en que se mide la excitación, al conductor.

§ 194. Campo magnético de un conductor circular y de un solenoide recorridos por una corriente. Veamos unos cuantos ejemplos de aplicación de la ley de Biot-Savart-Laplace.

1. Excitación magnética en el centro de una corriente circular. Sea un contorno en forma de circunferencia de radio R por el cual, según las agujas del reloj, fluye una corriente de intensidad I (fig. 189). Cualquier elemento del contorno circular Δl se halla a una misma distancia $r = R$ del centro. Además, para cualquier elemento Δl, el radio vector **R** será perpendicular a Δl, de donde el ángulo será $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y, por consiguiente, sen $\alpha = 1$. De aquí que, según la fórmula (1) del § 193, la excitación magnética ΔH creada en el centro

de la circunferencia por el elemento Δl, sea

$$\Delta H = k' \frac{I \Delta l}{R^2}.$$

El sentido de ΔH viene determinado por la regla del sacacorchos: ΔH es perpendicular al plano de la circunferencia y, si el sentido de la corriente es el de las agujas del reloj, ΔH irá en el sentido en que se aleje del lector. Así tenemos que todos los elementos Δl del contorno circular de la corriente crean en el centro excitaciones ΔH de una misma dirección y sentido y la excitación magnética total H, en este caso, será la suma *algebraica* de ΔH:

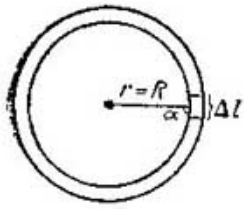


Fig. 189. Representación gráfica para calcular la excitación magnética en el centro de una corriente circular.

$$H = \sum \Delta H = \sum k' \frac{I \Delta l}{R^2}.$$

La intensidad I de la corriente, el radio R y el coeficiente k' de proporcionalidad, como magnitudes constantes pueden sacarse fuera del signo de suma, de donde

$$H = k' \frac{1}{R^2} \sum \Delta l,$$

pero $\Sigma \Delta l$ es la suma de todos los elementos en que se ha dividido el contorno circular de radio R, es decir, $\Sigma \Delta l$ es igual a la longitud de una circunferencia de radio R, de donde $\Sigma \Delta l = 2\pi R$ y

$$H = k' \frac{2\pi I}{R}. \qquad (1)$$

La relación entre las direcciones de **H** e I se da en la fig. 190.

2. Excitación magnética en el eje de una corriente circular. Llamaremos eje de una corriente circular a la perpendicular trazada por el centro de la circunferencia del contorno. Determinemos la excitación en el punto A situado a la distancia d del plano del contorno (fig. 191). Sea R el radio del contorno circular y r la distancia del punto A a los elementos Δl. Veamos qué excitaciones $\Delta \mathbf{H}_1$ y $\Delta \mathbf{H}_2$ crean dos elementos Δl_1 y Δl_2 diametralmente opuestos del contorno. Como el ángulo α entre r y Δl es igual a $\pi/2$ (por ser el ángulo formado entre la generatriz del cono y el elemento de circunferencia de la base), según la fórmula (1) del § 193 tendremos respectivamente que

$$\Delta H_1 = k' \frac{I \Delta l_1}{r_1^2}, \qquad \Delta H_2 = k' \frac{I \Delta l_2}{r_2^2}.$$

Eligiendo iguales a Δl las longitudes de los elementos Δl_1 y $l_2 \Delta$

www.elsolucionario.org

y observando que $r_1 = r_2$, obtenemos que

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 = k' \frac{I \Delta l}{r^2}, \qquad (2)$$

donde $r = r_1 = r_2$. Así tenemos que los valores numéricos de ΔH_1 y ΔH_2 son iguales; pero tienen distinta dirección: ΔH_1 es perpendicular a r_1 y al elemento Δl_1, y ΔH_2 es perpendicular a r_2 y al elemento Δl_2. El sentido de ΔH_1 y ΔH_2 se determina por la regla del sacacorchos (véase la fig. 191). La suma geométrica ΔH de los vectores ΔH_1 y ΔH_2 irá dirigida según el eje de la corriente circular y numéricamente será igual a la suma de sus proyecciones sobre el eje OA

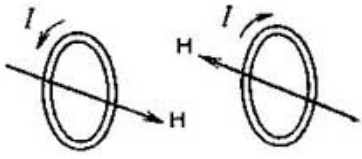


Fig. 190. Dirección y sentido de la excitación magnética H en el centro de una corriente circular.

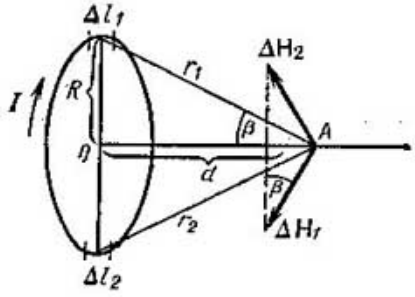


Fig. 191. Representación gráfica para calcular la excitación magnética en el eje de una corriente circular.

$$\Delta H = \Delta H_1 \operatorname{sen} \beta + \Delta H_2 \operatorname{sen} \beta.$$

Observando que, en la fig. 191, $\operatorname{sen} \beta = \frac{R}{r}$, y sustituyendo ΔH_1 y ΔH_2 por sus valores según la (2), otenemos que

$$\Delta H = k' 2 \frac{I \Delta l}{r^2} \cdot \frac{R}{r} = k' \frac{2 I \Delta l R}{r^3}.$$

Dividiendo todo el contorno circular de la corriente en los indicados pares de elementos Δl, nos da que la excitación magnética resultante H va dirigida según el eje y numéricamente es igual a la *suma algebraica* de las magnitudes ΔH:

$$H = \sum k' \frac{2 I \Delta l \cdot R}{r^3} = k' \frac{I R}{r^3} \cdot 2 \sum \Delta l.$$

La suma de todos los elementos $2 \Sigma \Delta l$ es igual a la longitud del contorno circular de la corriente $2\pi R$, por lo tanto

$$H = k' \frac{2\pi R^2 I}{r^3}.$$

En la fig. 191 vemos que $r^2 = R^2 + d^2$, de donde

$$H = k' \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + d^2)^{3/2}}. \qquad (3)$$

El sentido de **H**, según el eje, será aquél en que mirando a lo largo del eje según el sentido de **H**, veamos fluir la corriente según las agujas del reloj.

Para el punto situado en el centro de la corriente circular, tenemos que $d=0$ y la fórmula (3) nos da:

$$H = k' \frac{2\pi I}{R},$$

es decir, pasa a ser la fórmula (1), como era de esperar.

Para grandes distancias d en comparación con el radio R de la corriente circular, se puede despreciar la magnitud R del denominador de la fórmula (3), y aproximadamente tendremos que

$$H \cong k' \frac{2\pi R^2 I}{d^3},$$

es decir, H varía en razón inversa al cubo de la distancia d.

3. Excitación magnética en el eje de un solenoide. El solenoide como ya se ha indicado, es un conductor arrollado a una superficie cilíndrica. Si las espiras del solenoide se colocan inmediatamente unas junto a otras, el solenoide será equivalente a un sistema de corrientes circulares de radios iguales y de eje común. De esto se deduce que la excitación magnética en el eje de un solenoide se puede obtener sumando las excitaciones creadas por las distintas corrientes circulares.

El cálculo correspondiente (véase el texto de letra de cuerpo menor) nos da que

$$H = k' 4\pi n I, \qquad (4)$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide e I la intensidad de la corriente.

Si se considera un pequeño elemento longitudinal dl del solenoide, tendremos en él ndl espiras. Llamando I a la intensidad de la corriente de cada espira, la porción dl del solenoide se puede considerar recorrida por una corriente circular de intensidad $In\,dl$. La excitación magnética en un punto A del eje del solenoide creada por esta porción, según la fórmula (3), es igual a

$$dH = k' \frac{2\pi I R^2 \cdot n}{(R^2 + l^2)^{3/2}} dl, \qquad (5)$$

donde l es la distancia, según el eje, de la porción dl del solenoide al punto A. Teniendo en cuenta el ángulo β entre el eje del solenoide y el radio vector trazado

lesde el punto dado a la porción dl (fig. 192), obtenemos que

$$l = R \operatorname{ctg} \beta, \text{ de donde } dl = -R \frac{d\beta}{\operatorname{sen}^2 \beta};$$

además

$$R^2 + l^2 = \frac{R^2}{\operatorname{sen}^2 \beta};$$

colocando los valores de $|dl|$ y de R^2+l^2 en la (5) [en la fórmula (5) dl es una magnitud positiva], tenemos que

$$dH = k' 2\pi n I \cdot \operatorname{sen} \beta \, d\beta.$$

Como la excitación magnética de todos los elementos en el punto A va dirigida según el eje de las corrientes, para obtener el valor resultante de H en el

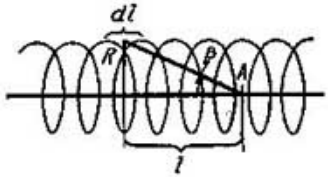


Fig. 192. Representación gráfica para el cálculo de la excitación magnética en el interior de un solenoide.

punto A hay que integrar la expresión obtenida según todos los valores de β. Si llamamos β_1 y β_2 los valores de los ángulos correspondientes a los extremos del solenoide, integrando nos da que

$$H = k' 2\pi n I \int_{\beta_1}^{\beta_2} \operatorname{sen} \beta \, d\beta = k' 2\pi n I \, (\cos \beta_1 - \cos \beta_2). \tag{6}$$

Este resultado depende de la posición del punto A y de la longitud del solenoide. Para un solenoide infinitamente largo tenemos que $\beta_1=0$ y $\beta_2=\pi$, de donde

$$H = k' 4\pi n I,$$

que coincide con la fórmula (4).

Para cualquier solenoide finito, la excitación magnética será menor que para el infinitamente largo. En el solenoide finito, el valor máximo de la excitación corresponderá al punto alejado a la misma distancia de los extremos del solenoide. Para el punto situado en el extremo del solenoide, la excitación se determina por la fórmula (6). Si en esta fórmula suponemos uno de los ángulos, por ejemplo el β_2, igual a $\frac{\pi}{2}$, tendremos que

$$H = k' 2\pi n I \cos \beta_1.$$

Si el solenoide es muy largo, tendremos que $\beta_1 \cong 0$ y

$$H = k' 2\pi n I,$$

es decir, en el extremo de un solenoide largo, la excitación magnética es dos veces menor que en el interior del mismo. El sentido de la excitación en el eje, según la regla del sacacorchos, corresponderá al que mirando según este sentido, veamos fluir la corriente por las espiras según las agujas del reloj.

www.elsolucionario.org

§ 195. Unidades de medición de la excitación magnética. Sistema electromagnético absoluto de unidades. La elección de la unidad de la excitación magnética se puede hacer si en la ley de Biot-Savart-Laplace, fórmula (1) del § 193, consideramos el coeficiente k' igual a un número determinado cualquiera. En el sistema *CGSE*, el coeficiente k' se supone igual a la unidad, a condición de que la intensidad I de la corriente se mida en unidades del sistema *CGSE*, y Δl y r, en centímetros; con ello se determina la unidad de excitación magnética en el sistema *CGSE*.

En este caso, la fórmula de Biot-Savart-Laplace toma la forma:

$$\Delta H = \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2}. \qquad (1)$$

Como la excitación magnética ΔH creada por un elemento Δl independiente del conductor recorrido por la corriente no se puede percibir experimentalmente, para determinar la unidad de excitación magnética H hay que examinar la excitación creada en un lugar determinado por una unidad de corriente que fluya por un conductor de dimensiones y forma determinadas. Como tal podemos elegir un conductor recto y muy largo. Según la fórmula (3) del § 193, la excitación magnética H a la distancia r de este conductor será

$$H = k' \frac{2I}{r}.$$

Si, como hemos convenido, suponemos el coeficiente k' igual a la unidad, tendremos que

$$H = \frac{2I}{r}. \qquad (2$$

Midiendo la intensidad de la corriente en unidades *CGSE* y en centímetros, basándonos en la ecuación (2) estableceremos la unidad *CGSE* de excitación magnética, y obtendremos que *a la distancia de 2 cm de un conductor rectilíneo muy largo por el cual fluye una corriente de intensidad igual a 1 unidad CGSE, la excitación magnética H será igual a 1 unidad CGSE de excitación magnética*.

De la misma manera haciendo $k' = 1$, según las fórmulas (1) y (4 del § 194, obtenemos que la excitación magnética en el centro de una corriente circular de radio R es

$$H = \frac{2\pi I}{R}, \qquad (3$$

y en la parte media de un solenoide delgado y largo será

$$H = 4\pi n I, \qquad (4$$

donde n es el número de espiras del conductor por unidad de longitud del solenoide. De la fórmula (3) obtenemos que *al pasar una*

corriente de intensidad igual a 1 unidad CGSE por un conductor circular de radio R=1 cm, en el centro de la circunferencia formada por el conductor se crea una excitación H igual a 2π unidades CGSE de excitación magnética.

De la fórmula (4) también tenemos que al fluir por un solenoide largo y delgado una corriente de intensidad igual a 1 unidad *CGSE*, en la parte media del solenoide se crea una excitación magnética H igual a $4\pi n$ unidades *CGSE* de excitación magnética. Es fácil determinar las dimensiones de la excitación magnética en el sistema *CGSE* basándose en cualquiera de las fórmulas (2), (3) ó (4):

$$[H] = L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}.$$

Esta unidad *CGSE* de excitación magnética H se utiliza relativamente poco. En física, la excitación magnética generalmente se mide en unidades del llamado sistema electromagnético (véase más abajo).

Según lo dicho en el § 191, la excitación magnética se puede medir basándose en el momento M de fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido por una corriente. Según la fórmula (4a) del § 191, tenemos que

$$H = k\frac{M}{IS}, \tag{5}$$

donde I es la intensidad de la corriente en el cuadro y S, la superficie de este cuadro. Esta fórmula se podría utilizar para determinar la unidad de medición de excitación magnética H dándole al coeficiente k un valor numérico determinado y usando las determinadas unidades de medición de M, I y S. Por ejemplo, se podría suponer que $k=1$ y medir todas las demás unidades en el sistema *CGSE*, es decir, M, en din·cm, S, en cm² e I, en unidades *CGSE* de intensidad de la corriente.

Sin embargo, al medir la excitación magnética H en unidades *CGSE*, debemos atribuir al coeficiente k de la fórmula (5) una dimensión y un valor numérico determinados. Efectivamente, según la fórmula (5), el momento M de fuerzas que actúan sobre el cuadro, es igual a

$$M = \frac{1}{k}HIS. \tag{6}$$

En el sistema *CGSE*, para las cuatro magnitudes físicas M, H, I y S de esta fórmula ya se han elegido las unidades de medición; por lo tanto al coeficiente k ya no se le puede dar un valor arbitrario. El coeficiente k será, por consiguiente, una constante de valor y dimensiones determinadas. Para demostrar esto supongamos, por ejemplo, que el cuadro se ha introducido en el interior de un solenoide, en la parte media, donde el campo magnético es uniforme y

la excitación es $H=4\pi nI'$ (llamamos I' a la intensidad de la corriente del solenoide para diferenciarla de la intensidad I de la corriente del cuadro). Si en este caso la normal al cuadro es perpendicular al eje del solenoide, sobre el cuadro actuará el momento M de fuerzas determinado por la fórmula (6). Sustituyendo H por su valor $4\pi nI'$ en esta fórmula obtenemos que

$$M=\frac{l}{k}4\pi nI'IS. \tag{7}$$

De donde hallamos que las dimensiones del coeficiente k son

$$[k]=\frac{[n]\cdot[I^2]\cdot[S]}{[M]}. \tag{8}$$

Para las dimensiones de M y S tenemos las siguientes expresiones: $[M]=ML^2T^{-2}$ y $[S]=L^2$. Las dimensiones de la intensidad de la corriente en el sistema *CGSE* son $[I]=M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$. La magnitud n es el número de espiras por unidad de longitud del solenoide, por lo tanto $[n]=L^{-1}$. Teniendo en cuenta todas estas dimensiones, de la relación (8) obtenemos que

$$[k]=L^2T^{-2}.$$

De esta última ecuación se ve que las dimensiones del coeficiente k coinciden con las del cuadrado de la velocidad: $[v^2]=L^2T^{-2}$. Por consideraciones claramente comprensibles al examinar el campo magnético de cargas que se desplazan (§ 215), en lugar de k se ha establecido introducir otra constante c igual a $\sqrt{k}$ y denominada *constante electrodinámica*. Las dimensiones de esta constante electrodinámica coinciden con las de la velocidad.

El valor numérico de la constante electrodinámica c se puede determinar por la fórmula (7) midiendo en unidades *CGSE* el momento M de las fuerzas que actúan sobre el cuadro introducido en el interior del solenoide. Estas mediciones nos dan que

$$c=\sqrt{k}=2{,}998\cdot10^{10}\ \text{cm/seg}.$$

Establecido esto, la fórmula (7) adquiere la forma:

$$M=\frac{1}{c^2}4\pi nI'IS. \tag{7a}$$

Como después veremos, la constante electrodinámica c expresada en unidades *CGS* coincide, según su valor numérico, con la velocidad de difusión de las ondas electromagnéticas en el vacío, también expresada en cm/seg (y en particular, con la velocidad de las ondas luminosas).

No obstante, se puede idear otro sistema electromagnético de unidades, tomando, por ejemplo, como fórmula básica para deter-

www.elsolucionario.org

minar el sistema, la fórmula (7) del momento del par de fuerzas que actúa sobre un cuadro recorrido por una corriente y situado en el campo de un solenoide, suponiendo en esta fórmula que el coeficiente k es igual a la unidad. Como las unidades del momento de fuerzas y de superficie ya se han introducido en el sistema *CGS*, solamente se podrá hacer $k=1$ introduciendo una nueva unidad para medir la intensidad de la corriente. Esta nueva unidad de intensidad de la corriente se denomina *unidad electromagnética*, y es una de las fundamentales del llamado sistema electromagnético de unidades, sistema *CGSM*.

Veamos la relación que hay entre esta nueva unidad de intensidad de la corriente y la unidad correspondiente del sistema *CGSE*. De la fórmula (7) obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{k} 4\pi n I_{CGSE} I'_{CGSE} = 4\pi n I_{CGSM} I'_{CGSM}.$$

Aquí los subíndices *CGSE* y *CGSM* indican en qué sistema de unidades se han medido las intensidades de las corrientes. Sustituyendo k por su valor c^2, hallamos que

$$\frac{I_{CGSE}}{I_{CGSM}} = c, \tag{9}$$

es decir, la intensidad de la corriente medida en unidades *CGSM* es un número c veces *menor* que el correspondiente a la misma intensidad de la corriente medida en unidades *CGSE*. Por consiguiente, la propia unidad *CGSM* de intensidad de la corriente será c veces *mayor* que la unidad *CGSE* de intensidad de la corriente:

$$\frac{\text{unid. } CGSM \text{ de intens. de corr.}}{\text{unid. } CGSE \text{ de intens. de corr.}} = c = 2{,}998 \cdot 10^{10} \cong 3 \cdot 10^{10}.$$

El valor de la constante electrodinámica $c=2{,}998.10^{10}$ cm/seg se ha determinado experimentalmente y, por lo tanto, con cierto error, aunque pequeño (aproximadamente de 0,002%). De esto se deduce que la relación numérica entre las unidades *CGSE* y *CGSM* de intensidad de la corriente no pueda darse con absoluta exactitud, sino *con cierta aproximación*. Como 2,998 se aproxima mucho a 3, en la mayoría de los casos se puede considerar que 1 unidad *CGSM* de intensidad de la corriente $=3 \cdot 10^{10}$ unidades *CGSE* de intensidad de la corriente (véase el § 153).

Las dimensiones de la unidad electromagnética de intensidad de la corriente se pueden obtener de la relación (9) y de las dimensiones de la constante electrodinámica c:

$$[I_{CGSM}] = \frac{[I_{CGSE}]}{[c]} = \frac{M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}}{LT^{-1}} = M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}.$$

De esta manera, las dimensiones de la intensidad de la corriente en los sistemas *CGSM* y *CGSE* son diferentes. Insistimos en que una misma magnitud física puede tener diferentes dimensiones en distintos sistemas de unidades (véase el t.I, § 30).

Al tener en cuenta la unidad electromagnética de intensidad de corriente, tendremos que introducir una nueva unidad (electromagnética) de cantidad de electricidad. Como $Q=It$, y el tiempo t en ambos sistemas se mide en segundos, la unidad *CGSM* de cantidad de electricidad será tantas veces mayor que la unidad *CGSE* de cantidad de electricidad, cuantas veces la unidad *CGSM* de intensidad de la corriente sea mayor que la unidad *CGSE* de intensidad de la corriente. Así tenemos que

$$\frac{\text{unidad } CGSM \text{ de cant. de electr.}}{\text{unidad } CGSE \text{ de cant. de electr.}} = c \cong 3 \cdot 10^{10}.$$

Las dimensiones de la unidad *CGSM* de cantidad de electricidad se determinan de la relación $[Q]=[I]\cdot[t]$, de donde

$$[Q_{CGSM}] = M^{1/2}L^{1/2}.$$

Por último introducimos la unidad *CGSM* de excitación magnética H. Para ello utilicemos la relación (3) del § 193:

$$H = \frac{2I}{r}, \tag{10}$$

en que la intensidad I de la corriente la mediremos en unidades *CGSM*, y la distancia r, en centímetros, como antes. La unidad de excitación magnética H establecida de esta manera se denomina oerstedio (oersted) (abreviado Oe) en honor de Oersted, que en 1820 observó la acción magnética de la corriente.

De la relación (10) se deduce que *a la distancia de 2 cm de un conductor recto infinitamente largo recorrido por una corriente de 1 unidad CGSM de intensidad, se excita un campo magnético de 1 oerstedio*. Basándonos en la fórmula (4) también obtenemos que la parte media de un solenoide delgado y largo de n espiras por cm y por el cual fluye una corriente de una unidad *CGSM* de intensidad, la excitación magnética es igual a $4\pi n$ oerstedios. En adelante, frecuentemente mediremos la excitación con oerstedios. El oerstedio es c veces mayor que la unidad *CGSE* de excitación.

En la ley de Biot-Savart-Laplace

$$\Delta H = \frac{I\Delta l \operatorname{sen}\alpha}{r^2};$$

el coeficiente de proporcionalidad k' en el sistema *CGSM*, lo mismo que en el sistema *CGSE*, es igual a la unidad. Esto es debido a que en el sistema *CGSM*, la unidad de intensidad I de la corriente y la

de excitación magnética H son un mismo número de veces (c veces) mayores que las unidades de estas magnitudes en el sistema *CGSE*.

Las dimensiones de la excitación H en el sistema *CGSM* se establecen de la relación (10):

$$H = \frac{[I]}{[r]} = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}.$$

En el § 196 se habla de las unidades de intensidad de la corriente y de excitación magnética en el sistema internacional de unidades.

§ 196. Fuerzas que actúan sobre la corriente en el campo magnético. Sistema internacional de unidades eléctricas. Los experimentos sobre la desviación del cuadro con corriente en un campo magnético

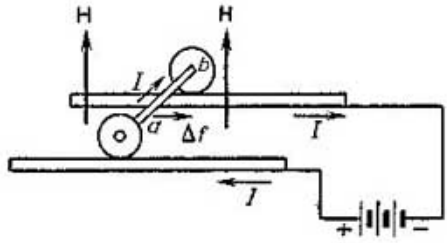


Fig. 193. Esquema del experimento para revelar la fuerza Δf que actúa sobre el conductor con corriente en un campo magnético exterior **H**.

demuestran que sobre cualquier cuadro recorrido por una corriente e introducido en un campo magnético actúa un par de fuerzas. Es natural suponer que este par esté formado por fuerzas que actúan sobre cada elemento del contorno de corriente que se halla en el campo magnético.

La existencia de estas fuerzas aplicadas a un elemento, por separado del contorno, se puede comprobar con ayuda del siguiente experimento: por dos barras metálicas paralelas pueden deslizarse dos rodillos unidos con una varilla recta *ab*, cuya longitud es Δl (fig. 193). Los extremos de las barras se conectan con los polos de una batería de modo que con la batería y la varilla *ab* se forme un circuito cerrado de corriente.

Sea I la intensidad de la corriente que fluye por la varilla *ab* según el sentido indicado por la flecha en la fig. 193. Excitemos un campo magnético uniforme H de dirección perpendicular al plano en que se hallan las barras. Entonces, sobre la varilla *ab* empezará a actuar una fuerza y los rodillos se deslizarán. Esta fuerza Δf es

www.elsolucionario.org

fácil de medir con ayuda de un resorte u otro dispositivo mecánico cualquiera. La experiencia demuestra que la fuerza Δf es perpendicular al plano en que están H e I.

Ampere estableció que la magnitud de la fuerza Δf es proporcional a la intensidad de la corriente I, a la excitación magnética H y a la longitud del elemento Δl del conductor.

Además, la magnitud de la fuerza Δf depende de la dirección de **H**. Siendo iguales las demás condiciones, cuando **H** es perpendicular a la dirección de la corriente I, la fuerza Δf tendrá el valor

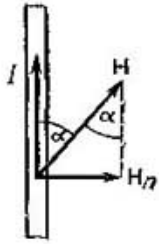


Fig. 194. La acción del campo magnético sobre una corriente viene determinada por la componente normal de la excitación magnética H.

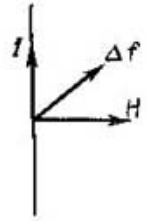


Fig. 195. Dirección y sentido de la fuerza Δf que actúa sobre una corriente en un campo magnético.

máximo. Si el vector **H** es paralelo a la dirección de la corriente I, tendremos que $\Delta f = 0$. Esto nos hace suponer que la fuerza Δf sólo es debida a la componente de la excitación magnética H que es perpendicular a la dirección de la intensidad I de la corriente. Como esta componente (véase la fig. 194) es igual a H sen α, definitivamente obtenemos para la ley de Ampere la expresión:

$$\Delta f \sim IH \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l. \qquad (1)$$

Para pasar al signo de igualdad hay que introducir un coeficiente de proporcionalidad.

Como se infiere de la experiencia y como confirma el cálculo que se da más abajo, el coeficiente de proporcionalidad es igual a $1/c^2$, si las magnitudes I y H se miden en unidades electrostáticas y Δf en dinas.

Por eso escribiremos que

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} IH \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l. \qquad (1a)$$

Como se ha indicado, la fuerza Δf va dirigida perpendicularmente al plano en que se hallan las direcciones de I y H. Si la excitación magnética **H** es perpendicular a la dirección de la corriente I, la fuerza Δf tendrá el sentido indicado en la fig. 195.

En el caso general, para determinar la dirección y sentido de la fuerza $\Delta \mathbf{f}$ hay varias reglas.

En primer lugar se puede utilizar la regla del sacacorchos que, en este caso, se aplica de la siguiente manera: se hace girar la manilla del sacacorchos en el sentido desde la dirección de la intensidad de la corriente I hacia la del vector $\mathbf{H}$ (fig. 196), realizando este giro según el ángulo menor que π formado entre I y H, el movimiento de traslación del sacacorchos nos dará la dirección de la fuerza $\Delta \mathbf{f}$.

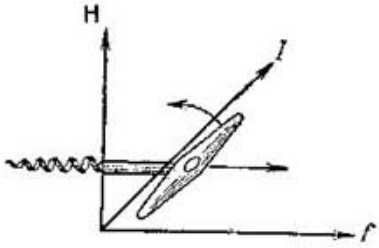


Fig. 196. Determinación del sentido de la fuerza Δf mediante la regla del sacacorchos.

Fig. 197. Regla de la mano izquierda.

La segunda regla que citamos es la llamada *regla de la mano izquierda*: si la palma de la mano izquierda la colocamos de manera que la componente de la excitación magnética $\mathbf{H}$ perpendicular a Δl atraviese normalmente la palma (fig. 197), y los cuatro dedos extendidos indiquen el sentido de la corriente I, el pulgar nos indicará el sentido de la fuerza $\Delta \mathbf{f}$.

La magnitud y sentido de la fuerza $\Delta \mathbf{f}$ que actúa sobre un elemento del conductor, se pueden expresar mediante el producto vectorial:

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{1}{c^2} I[\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{H}], \tag{1b}$$

donde al elemento $\Delta \mathbf{l}$ del conductor se le atribuye el sentido de la corriente I.

Basándonos en la fórmula de Ampere demostremos ante todo que el momento M de fuerzas que actúan sobre un cuadro plano rectangular, cuya normal es perpendicular a la dirección de la exitación magnética $\mathbf{H}$, es igual a

$$M = \frac{1}{k} IHS. \tag{2}$$

Supongamos que la normal al cuadro $ABDC$ (fig. 198) es perpendicular al plano del dibujo y las líneas de fuerza del campo

magnético están en el plano del dibujo. Para simplificar supongamos que los lados AC y BD del cuadro son paralelos a las líneas de fuerza del campo magnético y, por consiguiente, los lados AB y CD son perpendiculares a las mismas. Dentro de los límites del cuadro consideraremos que el campo magnético es uniforme. Por el cuadro fluye una corriente I según la dirección indicada por las flechas en la fig. 198. Por la regla de la mano izquierda hallamos que sobre

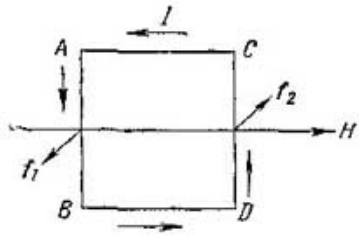


Fig. 198. Fuerzas que actúan sobre un cuadro con corriente situado paralelamente a las líneas de fuerza del campo magnético.

el lado AB del cuadro actúa la fuerza $\mathbf{f}_1$ perpendicular al plano del dibujo y dirigida hacia el lector. El valor de esta fuerza, según la fórmula (1a), es

$$f_1 = \frac{1}{c^2} IHl_1, \tag{3}$$

donde l_1 es la longitud del lado AB del cuadro.

La fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la $\mathbf{f}_1$, pero de sentido opuesto, actúa sobre el lado CD del cuadro.

Estas fuerzas forman un par de momento

$$M = f_1 l_2,$$

donde l_2 es la longitud del lado BD del cuadro.

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza f_1 por su valor según la (3), y observando que el producto $l_1 l_2$ es igual al área S del cuadro, obtenemos que

$$M = \frac{1}{c^2} IHS.$$

Esta fórmula coincide con la (2) cuando $k = c^2$, relación de coeficientes que ya habíamos introducido en el § 195. Por lo tanto, el cálculo hecho no sólo nos da una expresión justa del momento de fuerzas que actúan sobre el cuadro recorrido por una corriente y situado en un campo magnético, sino que indica que en la ley de Ampere, al medir I y H en el sistema $CGSE$ debe tenerse en cuenta el coeficiente $1/c^2$.

www.elsolucionario.org

Basándonos en la fórmula de Ampere hallamos la expresión para la fuerza de acción recíproca de dos conductores rectos paralelos e infinitamente largos recorridos por corrientes.

Sea d la distancia entre los conductores e I_1 e I_2, las intensidades de las corrientes respectivas.

Veamos con qué fuerza actúa el campo magnético de la corriente I_1 sobre el segmento de longitud l del segundo conductor.

Para ello observemos que las líneas del vector de excitación magnética del campo de la corriente I_1 son circunferencias concéntricas y, si la corriente I_1 fluye hacia arriba, la excitación H_1 en los puntos del segundo conductor, según la regla

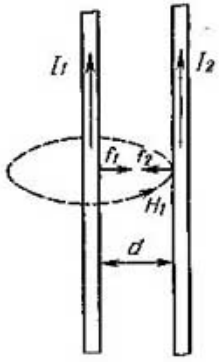


Fig. 199. Acción recíproca de dos corrientes rectilíneas infinitamente largas.

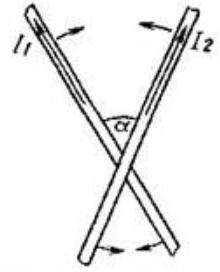


Fig. 200. Acción recíproca de dos corrientes rectilíneas que fluyen formando el ángulo α entre ellas.

del sacacorchos, va dirigida por detrás del plano del dibujo alejándose del lector (fig. 199), y numéricamente es igual a

$$H_1 = \frac{2I_1}{d}. \qquad (4)$$

Para determinar la dirección y sentido de la fuerza $\mathbf{f}_2$ que actúa sobre el segmento l del segundo conductor, utilizaremos la regla de la mano izquierda. Coloquemos la mano izquierda de manera que el vector de excitación magnética $\mathbf{H}_1$ vaya dirigido perpendicularmente hacia la palma de la mano, y los cuatro dedos extendidos vayan dirigidos en el sentido de la corriente I_2; entonces, el pulgar nos indicará la dirección y sentido de la fuerza $\mathbf{f}_2$ que actúa sobre el segmento l de la corriente I_2. Si la corriente I_2 fluye hacia arriba, esta fuerza, como se ve, estará dirigida hacia la izquierda, es decir, el segmento l de la corriente I_2 es atraído hacia la corriente I_1. Como $\mathbf{H}_1$ es perpendicular a l, la magnitud de la fuerza de atracción f_2, según la (1a), será

$$f_2 = \frac{1}{c^2} I_2 H_1 l$$

o, sustituyendo H_1 por su valor según la (4),

$$f_2 = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{d} l. \qquad (5)$$

Razonando de la misma manera se puede demostrar que la excitación H_2 creada por la corriente I_2 dentro del segmento de longitud l del primer conductor, va dirigida hacia el lector, es decir, el segmento l de la corriente I_1 es atraído hacia la corriente I_2. La magnitud de la fuerza de atracción será:

$$f_1 = \frac{1}{c^2} I_1 H_2 l = \frac{1}{c^2} \frac{2I_1 I_2}{d} l,$$

es decir, es igual a la magnitud de la fuerza f_2 expresada por la fórmula (5).

Así tenemos que dos corrientes paralelas que fluyen en una misma dirección, se atraen mutuamente. Sobre el segmento de longitud l de cada uno de los conductores, según la (5), actúa una fuerza directamente proporcional al producto de las intensidades de las corrientes e inversamente proporcional a la distancia entre ellas. Si en la fórmula (5) expresamos I_1 e I_2 en unidades *CGSE* de intensidad de la corriente, y l y d en centímetros, la fuerza f se expresará en dinas.

Un examen análogo nos demuestra que dos corrientes paralelas y de sentido contrario se repelen con una fuerza, cuyo valor numérico se determina también por la fórmula (5).

Si las corrientes fluyen por dos conductores rectilíneos cuyas direcciones se cortan formando cierto ángulo α, entre las corrientes surgen unas fuerzas que tienden a hacer girar a los conductores de manera que se orienten paralelamente y que sus corrientes fluyan en un mismo sentido (fig. 200).

En todas las fórmulas dadas en este párrafo se supone que las magnitudes eléctricas y magnéticas se miden en unidades del sistema electrostático. Si la excitación magnética y la intensidad de la corriente se miden en unidades del sistema electromagnético, el coeficiente $1/c^2$ de las fórmulas (1a), (1b), (2), (3) y (5), desaparece.

Por ejemplo, la fórmula de la ley de Ampere en el sistema *CGSM* adquiere la forma:

$$\Delta f = IH \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l, \qquad (6)$$

y la fuerza de acción recíproca de las corrientes paralelas se expresará por la fórmula:

$$f_1 = f_2 = \frac{2I^1 I_2 l}{d}. \qquad (5a)$$

En el sistema internacional de unidades (véase el t. I), la unidad fundamental de electricidad es la de intensidad de la corriente, el

amperio, que se establece basándose en la fórmula (5a). Esta unidad se determina de la siguiente manera: *el amperio es la intensidad de la corriente que, fluyendo por dos conductores paralelos e infinitamente largos y situados a la distancia de 1 m uno de otro en el vacío, crea entre ellos una fuerza de acción recíproca igual a* $2 \cdot 10^{-7}$ *newtones sobre cada metro de longitud.* Así pues, midiendo todas las magnitudes que entran en la fórmula (5a) en unidades del sistema internacional, la fórmula adquirirá la forma:

$$f\,(\text{newtones}) = \frac{2 \cdot 10^{-7} I_1\,(A) \cdot I_2\,(A) \cdot l\,(\text{m})}{d\,(\text{m})}.$$

Como 1 newton $= 10^5$ dinas, obtenemos las siguientes relaciones entre el amperio y la unidad *CGSM* de intensidad de la corriente:

1 A = 0,1 unidades *CGSM* de intensidad de la corriente.

De aquí se ve que, por definición, el amperio es igual exactamente a la décima parte de la unidad *CGSM* de intensidad de la corriente.

La relación entre el amperio y la unidad *CGSE* de intensidad de la corriente se determina basándose en que, según la ecuación (9) del § 195:

1 unid. *CGSM* de intens. de la corr. $= c \cdot$ unid. *CGSE* de intens. de la corr.

Como $c = 2{,}998 \cdot 10^{10}$ cm/seg, tendremos que:

1 A $= 2{,}998 \cdot 10^9$ unid. *CGSM* de intens. de la corr. $\cong$ $\cong 3 \cdot 10^9$ unid. *CGSE* de intens. de la corr.

Todas las demás unidades eléctricas y magnéticas del sistema internacional se establecen a partir del amperio. Así, por unidad de cantidad de electricidad se toma el culombio, que es igual a la cantidad de electricidad transportada en 1 seg a través de la sección transversal de un conductor por el cual fluye una corriente de 1 A de intensidad (véase el § 153). Está claro que entre el culombio y las unidades *CGSM* y *CGSE* de cantidad de electricidad habrá la siguiente relación:

1 culombio = 0,1 unid. *CGSM* de cant. de electr.,

1 culombio $= 2{,}998 \cdot 10^9$ unid. *CGSE* de cant. de electr. $\cong$ $\cong 3 \cdot 10^9$ unid. *CGSE* de cant. de electr.

Por unidad de excitación magnética en el sistema internacional de unidades se toma la excitación magnética a la distancia de $\frac{1}{2\pi}$ m de un conductor rectilíneo infinitamente largo, por el cual fluye

www.elsolucionario.org

una corriente de 1 A de intensidad. Esta unidad se denomina "amperio por metro" (abreviado A/m). Es fácil ver que $1\ A/m = 4\pi \cdot 10^{-3} Oe$.

En adelante, en todos los casos en que no se diga otra cosa, mediremos las magnitudes magnéticas en unidades *CGSM*.

§ 197. Contorno cerrado recorrido por una corriente en un campo magnético. En el § 196 se ha deducido, basándose en la ley de Ampere, la expresión del momento de fuerzas que actúan en un campo magnético sobre un cuadro plano rectangular.

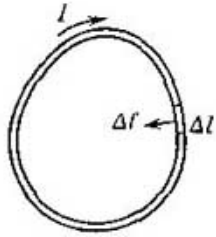


Fig. 201. Fuerza que actúa sobre el elemento Δl del contorno con corriente situado perpendicularmente a la excitación magnética.

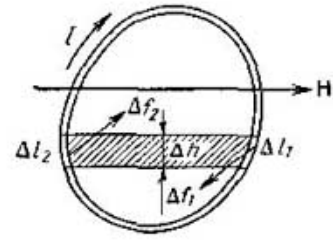


Fig. 202. Representación gráfica para el cálculo del momento de fuerzas que actúan sobre un contorno con corriente paralelo a la excitación magnética.

Veamos ahora el caso de la acción de un campo magnético sobre contornos planos de forma arbitraria. En este caso consideraremos que el conductor que forma el contorno es tan rígido, que bajo la acción de las fuerzas magnéticas aplicadas a todos sus elementos, se comporta como un cuerpo sólido.

1. Contorno cerrado con corriente en un campo magnético. Supongamos primeramente que el contorno plano de forma arbitraria recorrido por una corriente de intensidad I está en un campo magnético uniforme de excitación H dirigido perpendicularmente al plano del contorno (fig. 201). Sea un elemento Δl cualquiera del contorno y determinemos la fuerza Δf que actúa sobre él. Como H es perpendicular a Δl, en el sistema *CGSM*, según la fórmula (6) del § 196, tendremos que

$$\Delta f = IH\Delta l.$$

La dirección y sentido de la fuerza Δf se determinan con ayuda de la regla de la mano izquierda: si la excitación es perpendicular al plano del dibujo y va hacia el lector, y la corriente del contorno fluye según las agujas del reloj, la fuerza irá dirigida hacia el centro del contorno (fig. 201). Como debido a la uniformidad del campo, las fuerzas aplicadas a todos los elementos del contorno tienen el

mismo valor numérico, el contorno sufrirá una compresión uniforme. Si se invierte el sentido del campo magnético o el de la intensidad de la corriente, el de las fuerzas Δf también resultará invertido y el contorno sufrirá una tracción uniforme. Si invertimos al mismo tiempo el sentido de la corriente y el del campo magnético, las fuerzas no cambiarán de sentido.

Dispongamos ahora el contorno de manera que las líneas de fuerza del campo magnético sean paralelas al plano del contorno (fig. 202). Determinemos qué fuerzas Δf_1 y Δf_2 actúan sobre los elementos Δl_1 y Δl_2 del contorno comprendidos entre dos líneas paralelas de fuerza del campo. Según la regla de la mano izquierda, para los sentidos de la corriente y de la excitación magnética elegidos en el dibujo, sobre el elemento Δl_1 actúa una fuerza perpendicular al plano del contorno y dirigida hacia el lector; y sobre el elemento Δl_2 actúa una fuerza perpendicular al plano del contorno y en sentido opuesto al de la anterior. La magnitud Δf_1 es

$$\Delta f_1 = I \Delta l_1 \operatorname{sen} \alpha H;$$

observando que $\Delta l_1 \operatorname{sen} \alpha$ es igual a la distancia Δh entre las dos rectas que limitan los elementos Δl_1 y Δl_2, escribiremos la ecuación anterior de la manera siguiente:

$$\Delta f_1 = IH \Delta h.$$

De la misma manera obtenemos que $\Delta f_2 = IH \Delta h$, de donde se deduce que las fuerzas Δf_1 y Δf_2 tienen el mismo valor numérico. Así pues, sobre los elementos Δl_1 y Δl_2 actúa un par de fuerzas, cuyo momento es $\Delta M = \Delta f x = IH \Delta h x$, donde x es la distancia media entre los elementos Δl_1 y Δl_2. El producto $\Delta h x$ es el área de la superficie ΔS rayada de la fig. 202; por lo tanto, la expresión del momento ΔM se puede escribir:

$$\Delta M = IH \Delta S.$$

Todo el contorno se puede dividir en pares de elementos análogos a los Δl_1 y Δl_2, con lo cual por todo el contorno habrá pares de fuerzas aplicadas, cuyo momento será igual a la suma de los momentos de los pares de fuerzas aplicadas a los elementos. Este momento, claro está, será:

$$M = \sum \Delta M = IH \sum \Delta S,$$

de donde

$$M = IHS, \tag{1}$$

donde S es el área comprendida en todo el contorno.

Atendiendo a la dirección y sentido del par de fuerzas vemos que el plano del contorno, bajo la acción de este par, tiende a ponerse perpendicular a las líneas de fuerza del campo magnético y a

orientarse de manera que, mirando según las líneas de fuerza del campo, veamos fluir la corriente por el contorno según las agujas del reloj. Esto se puede formular de otra manera: el contorno recorrido por una corriente tiende a colocarse en el campo magnético de manera que el sentido de la excitación magnética creada por la corriente del contorno en su eje, sea paralela a la excitación magnética del campo exterior.

En el § 191 llamamos *momento magnético del cuadro* a la magnitud p_m proporcional al producto IS. En el sistema $CGSM$ se considera que $IS = p_m$*), con lo cual la ecuación (1) se transforma en

$$M = H \cdot p_m. \qquad (1a)$$

El momento magnético p_m del contorno es una magnitud vectorial. La dirección y sentido de $\mathbf{p}_m$ se considera que coinciden con los respectivos de la normal positiva al contorno recorrido por la corriente (véase la fig. 177).

Veamos ahora un caso más general cuando el plano del contorno forma un ángulo cualquiera con la dirección de la excitación magnética. Convengamos, como antes, en caracterizar la posición del contorno por la de la normal N al plano del mismo, determinando el sentido de esta normal según la regla del sacacorchos: la normal estará dirigida en el mismo sentido del movimiento de traslación del sacacorchos al hacer girar su manilla según el sentido de la corriente del contorno. De lo dicho se deduce que el sentido de la normal al contorno coincide con la dirección del vector del momento magnético $\mathbf{p}_m$ del contorno.

Supongamos que la normal forma un ángulo α con la dirección de la excitación magnética (fig. 203). Descompongamos el vector de excitación magnética H en dos componentes perpendiculares entre sí: una de ellas $\mathbf{H}_\perp$, perpendicular al plano del contorno, y la otra, $\mathbf{H}_\parallel$, que se halle en el plano del mismo; de donde

$$H_\perp = H \cos\alpha, \quad H_\parallel = H \operatorname{sen}\alpha.$$

Según lo arriba indicado, el momento de rotación lo crea solamente la componente de la excitación magnética que es paralela al plano del contorno; mientras que la componente normal solamente causa una extensión o una compresión del contorno. Por consiguiente, obtendremos el momento M, si en la fórmula (1), colocamos, en lugar de la excitación magnética H, su componente $H_\parallel$, de donde

$$M = IHS \operatorname{sen}\alpha. \qquad (2)$$

---

*) En el sistema $CGSE$ se considera que $p_m = \frac{1}{c^2} IS$, con lo cual la fórmula (1a) es la misma para ambos sistemas ($CGSM$ y $CGSE$).

www.elsolucionario.org

De la fórmula (2) se ve que el momento M de rotación tiene el val máximo cuando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, es decir, cuando el plano del contorno paralelo a las líneas de fuerza del campo magnético, y será igual cero, cuando $\alpha = 0$, es decir, cuando el plano del contorno sea pe pendicular al vector de excitación magnética.

Sustituyendo IS por el momento magnético p_m, escribiremos ecuación (2) de la siguiente manera:

$$M = Hp_m \operatorname{sen} \alpha. \qquad (2$$

Si tomamos un conjunto de contornos de manera que formen u solenoide, para el momento del par que actúa sobre él, obtenem esta misma expresión, en la cual el momento magnético del sol noide será $p_m = NIS$, donde N es el número de espiras del solenoid

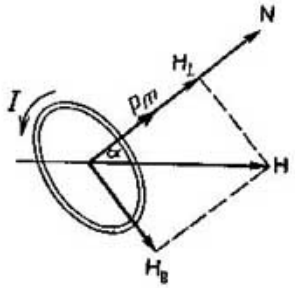


Fig. 203. Descomposición del vector de excitación magnética H en dos: $H_\perp$ y $H_\parallel$.

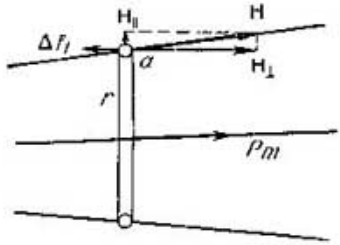


Fig. 204. Contorno con corriente en un campo magnético variable.

Utilizando el concepto de vector **M** del momento del par d fuerzas (§ 35, t. I), la ecuación (2a) se puede escribir en form vectorial:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{H}].$$

2. Contorno cerrado con corriente en un campo magnético va riable. Para simplificar examinemos un contorno circular en u campo magnético variable, cuyas líneas de fuerza divergen en sentido radial. En la fig. 204 se representa la sección de este cuadr en el plano del dibujo. Supongamos que la dirección del momento magnético $\mathbf{p}_m$ del cuadro coincide con la de la excitación magnética H en el centro del cuadro. Consideremos que la dirección positiva va de izquierda a derecha. Examinemos la fuerza Δf con que actúa el campo magnético sobre el elemento Δl del cuadro. Elijamos el elemento Δl junto al punto a, que será perpendicular al plano del dibujo. Descompongamos la excitación magnética H en dos: $H_\perp$ perpendicular al plano del contorno, y $H_\parallel$, paralela al plano del

contorno. La componente $H_\perp$ creará una fuerza Δf_2 dirigida hacia fuera del cuadro. El conjunto de todas estas fuerzas aplicadas a todos los elementos del cuadro, solamente lo deformará, pero no le comunicará ningún movimiento, ni de rotación ni de traslación. Por eso, estas fuerzas no nos interesan.

La componente $H_\parallel$ de la excitación magnética, según la regla de la mano izquierda, originará la fuerza Δf_1 dirigida perpendicularmente al plano del cuadro. Esta fuerza será

$$\Delta f_1 = -IH_\parallel \Delta l, \tag{3}$$

donde I es la intensidad de la corriente que fluye por el cuadro. El signo menos indica que la fuerza va dirigida hacia la izquierda. Llamemos β al ángulo que forma, cerca del punto a, la excitación magnética H con la normal al plano del cuadro. Entonces $H_\parallel = H \operatorname{sen} \beta$.

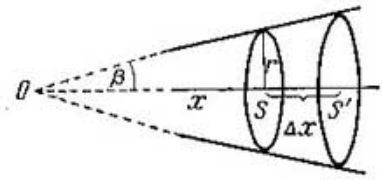


Fig. 205. Representación gráfica para calcular la fuerza que actúa sobre un contorno con corriente en un campo magnético variable.

Considerando que el ángulo β es muy pequeño, podemos suponer aproximadamente que $H_\parallel = H\beta$. Colocando este valor de $H_\parallel$ en la (3), obtenemos que

$$\Delta f_1 = -IH\beta \cdot \Delta l.$$

Iguales fuerzas Δf_1 estarán aplicadas a todos los demás elementos del cuadro. Como *tienen el mismo sentido*, la fuerza resultante f que actúa sobre todo el cuadro, será la suma algebraica de todas las Δf_1:

$$f = \sum \Delta f_1 = -IH\beta \cdot \sum \Delta l. \tag{4}$$

La suma de las longitudes de todos los elementos del cuadro será igual, naturalmente, a la longitud de todo el cuadro, es decir,

$$\sum \Delta l = 2\pi r,$$

donde r es el radio del cuadro.

Sustituyendo $\Sigma \Delta l$ por su valor en la (4), para la fuerza f que actúa sobre el cuadro, nos da la expresión:

$$f = -2\pi r I H \beta. \tag{5}$$

Así pues, en un campo magnético variable, sobre el cuadro actúa una fuerza que tiende a desplazarlo.

Transformemos la ecuación (5) excluyendo de ella el ángulo β. Para ello veamos el número de líneas de fuerza del campo N que atraviesan el plano del cuadro (fig. 205). La excitación magnética H en el lugar donde se halla el cuadro, está relacionada con N aproximadamente según la siguiente igualdad:

$$H = \frac{N}{S}, \tag{6}$$

donde $S = \pi r^2$ es el área del cuadro, y el valor del cos β en la expresión del flujo se ha tomado igual aproximadamente a la unidad. Todas las líneas de fuerza del campo atravesarán la superficie S' que está a la distancia Δx a la derecha del cuadro. La excitación magnética H' en los puntos que están a la distancia Δx a la derecha del cuadro, será

$$H' = \frac{N}{S'},$$

y la variación de la excitación magnética ΔH en el segmento Δx será

$$\Delta H = H' - H = \frac{N}{S'} - \frac{N}{S}.$$

Si Δx es pequeño, S' se diferenciará notablemente de S, y tendremos aproximadamente que

$$\Delta H = \frac{N(S - S')}{S^2}. \tag{7}$$

Prolonguemos mentalmente las líneas de fuerza hacia la izquierda hasta el lugar donde se cortan, es decir, hasta el punto O. Sea x la distancia del punto O hasta el cuadro. Entonces, considerando pequeño el ángulo β, tenemos que $r = x\beta$, de donde

$$S = \pi x^2 \beta^2, \quad S' = \pi (x + \Delta x)^2 \beta^2 \cong S\left(1 + 2\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Sustituyendo estos valores de S y S' en la (7) hallamos que

$$\Delta H = -2\frac{N}{S}\frac{\Delta x}{x},$$

y, observando que, según la (6), $\frac{N}{S} = H$ y $x = \frac{r}{\beta}$:

$$\Delta H = -2H\frac{\Delta x}{r}\beta, \quad \text{de donde} \quad \beta = -\frac{1}{2}\frac{r}{H}\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right).$$

Colocando en la (5) este valor de β, obtenemos para la fuerza f

www.elsolucionario.org

que actúa sobre el cuadro, el valor:

$$f = \pi r^2 I \left(\frac{\Delta H}{\Delta x} \right).$$

El producto $\pi r^2 I = SI$ es el momento magnético del cuadro p_m, de donde

$$f = p_m \left(\frac{\Delta H}{\Delta x} \right). \qquad (8)$$

La magnitud $\Delta H/\Delta x$ caracteriza la variación del campo magnético e indica la rapidez con que varía la excitación magnética H de un punto a otro. Esta magnitud es el gradiente de la excitación magnética. De esta manera, según la (8), la fuerza f que actúa sobre el cuadro, es proporcional al momento magnético del mismo p_m y al gradiente de la excitación magnética $(\Delta H/\Delta x)$. Para el campo uniforme $\left(\frac{\Delta H}{\Delta x} \right) = 0$, y sobre el cuadro no actúa ninguna fuerza resultante.

En el caso examinado (en que el momento magnético p_m tiene el mismo sentido que la excitación magnética), la fuerza f desplazará al cuadro hacia donde el campo sea más intenso. Si el momento magnético p_m estuviese dirigido en sentido contrario al de la excitación magnética H, el cuadro se desplazaría hacia donde el campo es más débil; pero en este último caso, la posición del cuadro sería inestable.

En el caso general de un cuadro orientado arbitrariamente en un campo magnético variable, sobre el cuadro actúa una fuerza f y un par de rotación de momento M; por eso el cuadro, que puede girar y desplazarse libremente por el campo magnético variable, girará de manera que su momento magnético p_m se oriente según las líneas de fuerza del campo y, después, se desplazará atraído hacia la zona donde el campo es más intenso. Esto se puede demostrar fácilmente. Cerca del extremo de un largo solenoide fijo A (fig. 206) se coloca el cuadro B suspendido de dos conductores finos y largos. Sea como fuere la orientación primitiva del cuadro, éste girará primeramente de manera que la corriente que fluye por él lo haga en la misma dirección que en el solenoide, y después se desplazará hacia el solenoide.

La fórmula deducida (8) es fácil de generalizar al caso cuando el momento del cuadro p_m forme un ángulo α con la dirección del gradiente de excitación magnética H; entonces

$$f = p_m \left(\frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \cos \alpha. \qquad (8a)$$

Así tenemos que el cuadro recorrido por una corriente se comporta en un campo magnético exterior análogamente al dipolo

eléctrico en un campo eléctrico exterior: en un campo uniforme solamente actúa sobre él un momento de rotación, y en un campo variable, además de este momento, una fuerza proporcional al gradiente del campo.

E j e m p l o. En el interior de un solenoide que tiene 10 espiras por cm y por el cual fluye una corriente de 10 A, se ha instalado un cuadro formado por un conductor con 5 espiras de área $S=10$ cm^2. Con ayuda del resorte a (fig. 207) el cuadro, si por él no pasa corriente, se mantiene paralelamente al eje del solenoide. ¿Qué ángulo α con respecto al eje del solenoide girará el cuadro al hacerle pasar una corriente de 1 A, si para retorcer el resorte un ángulo α se necesita un par de fuerzas de momento $M=k\varphi$, donde $k=1$ gf cm/rad?

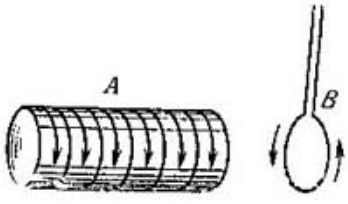


Fig. 206. Acción recíproca de un cuadro con corriente y un solenoide.

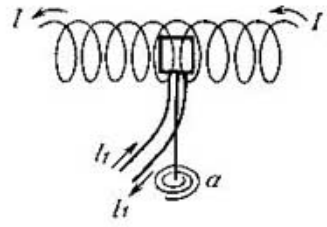


Fig. 207. Cuadro con corriente en el interior de un solenoide.

S o l u c i ó n. La excitación magnética H en el interior del solenoide, según la fórmula (4) del § 195, es

$$H=4\pi In, \tag{9}$$

donde n es el número de espiras del solenoide por unidad de longitud e I, la intensidad de la corriente que lo recorre.

Considerando el cuadro como un conjunto de contornos superpuestos obtenemos, según la fórmula (2), que el momento de fuerzas resultante que actúa sobre él es

$$M=n_1I_1S_1H\operatorname{sen}\alpha,$$

donde n_1 es el número de espiras del cuadro; I_1, la intensidad de la corriente que fluye por el mismo, y S_1, su área. Sustituyendo en esta ecuación H por su valor según la (9), hallamos que

$$M=4\pi nn_1II_1S_1\operatorname{sen}\alpha.$$

Este momento debe equilibrarse con el momento de torsión del resorte $k\varphi$, de donde

$$4\pi nn_1II_1S_1\operatorname{sen}\alpha=k\varphi.$$

Observando que $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ y llamando b a la magnitud $4\pi\, nn_1II_1S$, obtenemos que

$$b\cos\varphi=k\varphi, \quad \text{de donde} \quad \frac{\cos\varphi}{\varphi}=\frac{k}{b}.$$

Suponiendo que $\cos\varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, obtenemos una ecuación cuadrada de φ:

$$\varphi^2 + 2\frac{k}{b}\varphi - 2 = 0,$$

de donde

$$\varphi = -\frac{k}{b} \pm \sqrt{\frac{k^2}{b^2} + 2}.$$

Expresando I e I_1 en unidades $CGSM$ y k en din·cm/rad obtenemos que

$$\frac{k}{b} = \frac{k}{4\pi n n_1 I I_1 S_1} = \frac{980}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 0{,}1 \cdot 10} \cong 1{,}56,$$

de donde

$$\varphi = -1{,}56 \pm 2{,}11.$$

De los dos resultados hay que tomar el que nos dé

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ de donde } \varphi = 0{,}55 \text{ rad, ó } \varphi \cong 31°.$$

§ 198. Circulación del vector de la excitación magnética. El campo magnético puede caracterizarse por ciertas relaciones generales que tienen gran valor práctico en el cálculo de los campos magnéticos.

Recordemos que en el § 129 hemos analizado la expresión de la circulación del vector de intensidad del campo eléctrico, y al analizar la fuerza electromotriz introdujimos el concepto de circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajenas.

Análogamente introduciremos aquí la expresión de la circulación del vector de excitación magnética H.

Sea un contorno cerrado L cualquiera. Llamemos H_l a la proyección del vector H sobre la dirección del elemento Δl del contorno. Sumemos las expresiones $H_l \Delta l$ de todos los elementos del contorno cerrado:

$$\sum H_l \Delta l$$

y llamemos a esta suma circulación del vector H según el contorno L.

Se puede demostrar que, según la ley de Biot-Savart-Laplace, la circulación del vector H por un contorno cerrado cualquiera es igual al producto de 4π por la intensidad total de la corriente que atraviesa el contorno según el cual se toma la circulación:

$$\sum H_l \Delta l = 4\pi I. \qquad (1)$$

El signo de la circulación se determina por el sentido en que se recorre el contorno: si el sentido del recorrido está relacionado con el de la corriente que lo recorre según la regla del sacacorchos, la circulación se tomará con el signo más, y viceversa, la circulación

www.elsolucionario.org

se toma con el signo menos, si el sentido del recorrido del contorno al calcular la circulación, es contrario al que se considera positivo según la regla del sacacorchos. En la fig. 208 se indica el sentido del recorrido correspondiente a la circulación positiva.

Nosotros demostraremos la ecuación (1) solamente para el campo de la corriente que fluye por un conductor rectilíneo infinitamente largo.

Sea un contorno cualquiera L (fig. 209) que circunda a un conductor rectilíneo infinitamente largo, por el cual fluye una corriente de intensidad I. Demostremos primeramente que la circulación

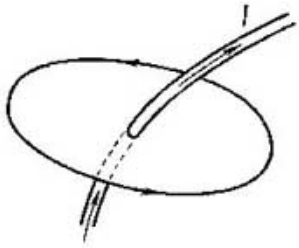


Fig. 208. Dirección y sentido de la corriente en la circulación positiva.

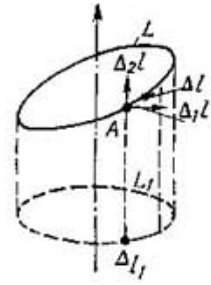


Fig. 209. Representación gráfica para calcular la circulación del vector de excitación magnética H.

por el contorno L es igual a la circulación por el contorno L_1, que es la proyección del contorno L sobre el plano perpendicular a la corriente. Efectivamente, el elemento $\Delta \mathbf{l}$ se puede considerar como la suma geométrica del elemento $\Delta_1 \mathbf{l}$ que está en el plano perpendicular a la corriente, y el elemento $\Delta_2 \mathbf{l}$ paralelo a la corriente:

$$\Delta \mathbf{l} = \Delta_1 \mathbf{l} + \Delta_2 \mathbf{l}.$$

La excitación magnética de la corriente rectilínea en cada punto del contorno será

$$H = \frac{2I}{r}$$

y estará en el plano perpendicular a la corriente, además es perpendicular a r, que es la distancia desde el punto A hasta la corriente. Según el teorema de la proyección de la resultante, tenemos que

$$H_l \Delta l = H \Delta_1 l \cos(H, \Delta_1 l) + H \Delta_2 l \cos(H, \Delta_2 l).$$

El segundo término de esta suma es igual a cero, ya que $\mathbf{H}$ es perpendicular a $\Delta_2 \mathbf{l}$. Así pues, obtenemos que

$$H_l \Delta l = H \Delta_1 l \cos(H, \Delta_1 l) = H_{l1} \Delta l_1.$$

Pero Δl_1 es la proyección del elemento Δl del contorno L sobre el plano perpendicular a la corriente, es decir, Δl_1 es el elemento del contorno L_1, proyección del contorno L sobre el plano perpendicular a la corriente. De donde:

$$\sum H_l \Delta l = \sum H_{l1} \Delta l_1.$$

(según el contorno L) (según el contorno L_1)

Por consiguiente, al demostrar la relación (1), en el caso general y sin limitaciones se puede suponer que el contorno se halla en el plano perpendicular a la corriente.

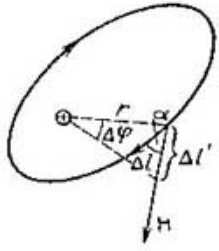


Fig. 210. Representación gráfica para calcular la circulación de H por un contorno cerrado que abarca a la corriente.

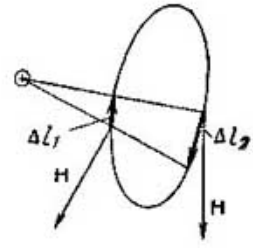


Fig. 211. Representación gráfica para calcular la circulación de H por un contorno cerrado que no abarca a la corriente.

En la fig. 210 se representa un contorno en el plano perpendicular a la corriente. En el dibujo se ve que

$$H_l \Delta l = H \Delta l \cos (H, \Delta l) = \frac{2I}{r} \Delta l \cos \alpha.$$

Pero $\Delta l \cos \alpha$ es la proyección de Δl sobre la perpendicular a r, donde r es la distancia del punto que se examina, a la corriente. Debido a la pequeñez de Δl se puede suponer que

$$\Delta l \cos \alpha = r \Delta \varphi.$$

Para la circulación obtenemos que

$$\sum H_l \Delta l = 2I \sum \Delta \varphi = 4\pi I.$$

Así pues, tenemos que la circulación del vector de excitación magnética por un contorno cualquiera es igual al producto de 4π por la intensidad de la corriente circundada por el contorno. Si el contorno no circunda a la corriente (fig. 211), como es fácil ver, se puede dividir en elementos pares Δl_1 y Δl_2 en que los elementos de

circulación sean de igual magnitud y de signo contrario:

$$H_t \Delta l_1 = -\frac{2I}{r} r\Delta\varphi = -2I\Delta\varphi,$$

$$H_t \Delta l_2 = \frac{2I}{r} r\Delta\varphi = 2I\Delta\varphi.$$

De esta manera tenemos que todos los miembros de la suma en la fórmula de la circulación se compensan a pares y como resultado nos da que la circulación del vector H según el contorno que no circunda a la corriente, es igual a cero:

$$\sum H_t \Delta l = 0.$$

Estos resultados se pueden generalizar aplicándolos a un campo de corriente cualquiera, pero esta generalización exige la aplicación de cálculos matemáticos más complicados.

En el análisis vectorial, el teorema de la circulación de la excitación magnética se expresa de la siguiente manera:

$$\oint H_t dl = 4\pi I,$$

donde la integral se extiende por todo el contorno que circunda a la corriente I.

§ 199. Aplicación de la fórmula de la circulación del vector de excitación magnética. El resultado del párrafo anterior es interesante por las consecuencias que se deducen del mismo. Así, por ejemplo, en muchos casos particulares nos permite hallar fácilmente la excitación magnética. Veamos unos cuantos ejemplos.

1. Excitación magnética en el eje de un toroide. Veamos el sistema formado de corrientes circulares de igual valor y sentido que envuelven una superficie toroidal común (fig. 182). Llamemos I a la intensidad de la corriente de las espiras; l, a la longitud del eje del toroide y N, al número total de espiras. Supongamos que la longitud l es grande en comparación con el radio de las circunferencias que describen las corrientes. Por las condiciones de simetría se puede deducir que la excitación magnética H en el eje del toroide es constante y va dirigida según el eje hacia el lado en que, mirando desde allí, veamos fluir la corriente del toroide según las agujas del reloj. Para calcular el valor numérico de la excitación H determinemos la circulación del vector H por el contorno que coincida con la línea media del toroide:

$$\sum H_t \Delta l = \sum H \Delta l = Hl = 4\pi I \quad (H_t = H). \tag{1}$$

Aquí se entiende que la corriente I es la total abarcada por el contorno. Está claro que esta corriente es igual a la suma de las corrientes que fluyen por todas las espiras del toroide:

$$I = NJ,$$

www.elsolucionario.org

y colocando este valor en la (1) nos da

$$Hl = 4\pi N\mathcal{I},$$

de donde hallamos el valor de H:

$$H = 4\pi \frac{N}{l}\mathcal{I} = 4\pi n\mathcal{I}, \qquad (2)$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud del toroide.

Así, la excitación magnética H en el eje del toroide es proporcional al número de espiras por unidad de longitud del toroide y a la intensidad $\mathcal{I}$ de la corriente de la espira. Si el radio del eje del toroide es infinitamente grande, el toroide se puede considerar equivalente a un solenoide infinitamente largo; por consiguiente, la fórmula (2) expresará al mismo tiempo la excitación magnética en el eje de un solenoide infinitamente largo (§ 194).

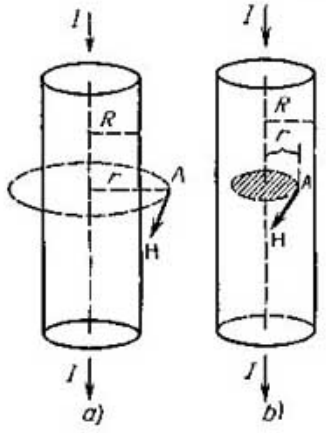


Fig. 212. Representación gráfica para determinar la excitación magnética del campo de una corriente que fluye por un conductor cilíndrico.

2. Campo magnético creado por una corriente que fluye por un conductor cilíndrico y rectilíneo infinitamente largo. Supongamos que por un conductor cilíndrico de radio R fluye una corriente de intensidad I uniformemente distribuida por la sección del conductor. Determinemos la excitación magnética H creada por la corriente en un punto que esté a la distancia r del eje. Consideremos primeramente que el punto A del que se quiere determinar la excitación magnética, se halla fuera del conductor, es decir, $r>R$. Las condiciones de simetría nos permiten deducir que la excitación magnética H para todos los puntos que se hallan a la distancia r del eje, será la misma. Como la corriente total del conductor cilíndrico es la suma de las corrientes rectilíneas elementales, el vector de la excitación magnética H estará en el plano perpendicular al eje del conductor y su dirección será perpendicular a r.

Determinemos la circulación del vector H por una circunferencia de centro en el eje del cilindro y que este eje pase por el punto en que se determina la excitación magnética (véase la fig. 212). Como la excitación magnética H, siendo perpendicular a r, al mismo tiempo es paralela a los elementos de la circunferencia, la expresión de la circulación será

$$\sum H_l \Delta l = H \cdot 2\pi r = 4\pi I \quad (H_l = H). \qquad (3)$$

Aquí, como antes, I es la corriente total abarcada por el contorno según el cual se toma la circulación. Para un punto que esté fuera de la corriente, la magnitud I de la fórmula (3) será la intensidad de la corriente que fluye por todo el conductor cilíndrico. Teniendo esto en cuenta obtenemos que

$$H \cdot 2\pi r = 4\pi I,$$

de donde para H hallamos la expresión:

$$H = \frac{2I}{r}.$$

Así tenemos que la excitación magnética creada por la orriente de un conductor cilíndrico en los puntos exteriores coincide con la excitación magnética de una corriente rectilínea de igual intensidad que fluya por el eje del cilindro dado.

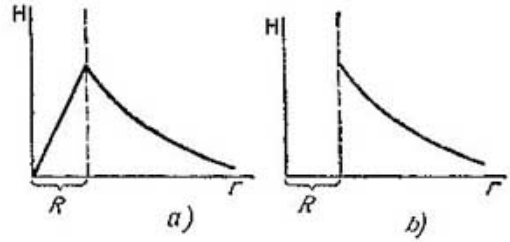


Fig. 213. Dependencia entre la excitación magnética H y la distancia hasta el eje del cilindro: a) para una corriente que fluye uniformente por la sección del conductor, y b) para una corriente que fluye por la superficie del conductor.

Para los puntos que están en el interior del cilindro, el contorno según el cual se toma la circulación, abarca una parte solamente de la corriente. Llamando r, como antes, a la distancia desde el punto dado hasta el eje, vemos que la corriente que abarca el contorno en este caso es

$$I' = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2.$$

Colocando este valor en la fórmula (3) hallamos que

$$H = \frac{2Ir}{R^2}.$$

De aquí se ve que la excitación magnética aumenta a medida que el punto se aleja del eje de la corriente, y en el eje del cilindro, el campo magnético es igual a cero.

En la fig. 213 se representa la dependencia entre la excitación magnética y la distancia del punto al eje del cilindro.

Es fácil demostrar que si la corriente fluye solamente por una fina capa junto a la superficie del conductor, el campo magnético de fuera del conductor será el mismo, que si una corriente de la misma intensidad fluyese uniformemente por toda la sección del conductor. Pero en este caso, en el interior del conductor, la excitación magnética es igual a cero. Efectivamente, la circulación del vector H en el interior de la cavidad del cilindro conductor, como en el caso anterior, es

$$\sum H_i \Delta l = H \cdot 2\pi r = 4\pi I.$$

No obstante, en este caso, el contorno de la circulación no abarca a la corriente, por lo cual el término de la derecha de la igualdad es igual a cero. De esto hallamos directamente que para los puntos interiores

$$H = 0.$$

La dependencia entre H y r en el caso de la corriente que fluye por la superficie de un conductor cilíndrico, viene representada en la fig. 213, *b*.

§ 200. Cuerpos magnéticos. Hasta ahora hemos examinado el campo magnético en el vacío, es decir, en un espacio en que no hay cantidades notables de átomos, electrones u otras partículas elementales de sustancia. Veamos ahora la influencia que ejerce sobre el campo magnético una sustancia capaz de influir sobre él, que denominaremos *sustancia (cuerpo) magnética*.

Recordemos antes que nada, la influencia ejercida por los dieléctricos sobre el campo electrostático. Bajo la acción de un campo electrostático, el dieléctrico adquiere un estado especial, que hemos denominado polarización. Debido a la polarización, en los límites del dieléctrico y en las zonas donde no es homogéneo, se crean cargas eléctricas (cargas "aparentes") con sus correspondientes densidades superficiales y volumétricas σ' y ρ'. Estas cargas crean su propio campo electrostático, que se suma al campo electrostático primitivo (campo de las cargas "libres").

Si la intensidad del campo electrostático primitivo era igual a $\mathbf{E}_0$, y la del campo creado como resultado de la polarización del dieléctrico es igual a $\mathbf{E}'$, la intensidad resultante del campo $\mathbf{E}$ será igual a la suma vectorial de ambas:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

De esta misma manera, cualquier cuerpo magnético que se halle en un campo magnético de corrientes que fluyen por conductores, adquiere un estado especial y, como se dice, *se magnetiza*. En el estado de magnetización, el cuerpo magnético crea una excitación

www.elsolucionario.org

magnética complementaria $\mathbf{H}'$ que se suma a la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ del campo magnético creado por las corrientes que fluyen por los conductores. La suma vectorial de estas dos excitaciones magnéticas $\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$, por analogía con las intensidades respectivas del campo eléctrico en los dieléctricos, habría que llamar intensidad del campo magnético en el cuerpo magnético. Sin embargo, por causas de carácter histórico, el vector

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}' \qquad (1)$$

se ha denominado *vector de inducción magnética*. Así, *el vector de inducción magnética* $\mathbf{B}$ *es la excitación total magnética creada tanto por las corrientes macroscópicas (exteriores con respecto al medio), como por las microscópicas (creadas por las moléculas del medio).*

La experiencia demuestra que en los cuerpos magnéticos uniformemente magnetizados que llenan por completo el espacio donde el campo es diferente de cero, la excitación magnética complementaria $\mathbf{H}'$ puede tener el mismo sentido que la excitación magnética primitiva $\mathbf{H}_0$ o el opuesto. Las sustancias en que $\mathbf{H}'$ tiene el mismo sentido que $\mathbf{H}_0$, se denominan *paramagnéticas*, y aquellas en que $\mathbf{H}'$ va en sentido contrario a $\mathbf{H}_0$, se denominan *diamagnéticas*. Recordemos que en los dieléctricos homogéneos que llenan por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, la intensidad complementaria del campo $\mathbf{E}'$ siempre va dirigida en sentido contrario a la intensidad del campo de las cargas libres. Para todos los cuerpos diamagnéticos y para la mayoría de los paramagnéticos, la excitación magnética (imanación) $\mathbf{H}'$ es muy pequeña en comparación con la $\mathbf{H}_0$. No obstante, hay un grupo de cuerpos, para los cuales $\mathbf{H}'$ puede ser grande en comparación con la $\mathbf{H}_0$. Además, estos cuerpos se diferencian por una serie de otras particularidades. Estos cuerpos forman un grupo especial denominado grupo de cuerpos *ferromagnéticos* (entre ellos está el hierro). Sus propiedades las analizaremos después; por ahora nos limitaremos al examen de los cuerpos paramagnéticos y diamagnéticos corrientes.

Según la hipótesis enunciada por Ampere, en las moléculas de los cuerpos paramagnéticos hay corrientes circulares, denominadas *moleculares*. Si no hay campo magnético exterior, los ejes de estas corrientes se orientan arbitrariamente y el campo magnético creado por ellas, como término medio es igual a cero. Bajo la influencia de un campo magnético exterior, estas corrientes se orientan creando un campo magnético de excitación $\mathbf{H}'$ diferente de cero, que se suma a la excitación primitiva $\mathbf{H}_0$ del campo magnético. Así se explica el aumento de la excitación magnética total en las sustancias paramagnéticas. La magnetización de las sustancias paramagnéticas consiste en determinada orientación de sus corrientes moleculares.

En la actualidad se puede afirmar que las propiedades magnéticas de los cuerpos magnéticos no sólo son debidas a las corrientes moleculares, sino también a las propiedades magnéticas de las partículas elementales que forman parte de los átomos (electrones y núcleos). Como se explicará más abajo, las partículas elementales poseen un momento magnético independiente del carácter de su movimiento. Este momento magnético se puede poner de manifiesto al actuar el campo magnético sobre la partícula (compárese con lo dicho en el § 199); sin embargo no hay un modelo representativo que explique la existencia del momento magnético de las partículas elementales mediante cualquier movimiento de las cargas. Hay que tener en cuenta que una serie de propiedades de las partículas elementales tampoco tienen explicación basándonos en los conceptos de la mecánica clásica (véase el t. III).

Las propiedades fundamentales de los cuerpos magnéticos se pueden explicar cualitativamente basándonos en el concepto de Ampere de las corrientes moleculares.

En las moléculas de las sustancias diamagnéticas no hay corrientes circulares constantes (o en cada molécula hay varias corrientes circulares, cuyos momentos magnéticos se compensan mutuamente). Las corrientes circulares surgen en ellas (se inducen) solamente al excitarlas mediante un campo magnético exterior. Más adelante, en este mismo capítulo, veremos que la dirección y sentido de estas corrientes inducidas es tal, que el campo magnético creado por ellas va en sentido contrario al campo magnético exterior. Con ello se explica la disminución de la excitación magnética total en un medio diamagnético.

Corrientes inducidas de sentido contrario surgen también en las moléculas en que primeramente había corrientes circulares. Sin embargo, si estas corrientes primitivas eran suficientemente intensas, la corriente inducida sólo las debilita algo. Así, pues, el efecto diamagnético siempre existe, pero en las sustancias paramagnéticas siempre lo supera el efecto debido a la orientación de las corrientes primitivas. Desde el punto de vista de la electrónica, el surgimiento en las moléculas de corrientes inducidas de sentido contrario se explica por crearse en el campo magnético exterior la llamada precesión de Larmor (véase el § 214).

En electrostática (§ 143) hemos señalado las dificultades que surgían al intentar determinar la intensidad del campo del dieléctrico $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\mathbf{E}'$ en función de la fuerza que actúa sobre un cuerpo macroscópico cargado. Vimos que, además de las fuerzas debidas a la intensidad del campo en el lugar en que se halla la carga (esta intensidad del campo no coincide con $\mathbf{E}$), sobre el cuerpo cargado situado en el interior de un dieléctrico actúan otras fuerzas originadas por las acciones mecánicas de parte del dieléctrico polarizado.

Dificultades completamente análogas surgen al intentar determinar el vector de inducción magnética, $\mathbf{B}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$, en un cuerpo magnético. Bajo la acción del campo magnético, en el cuerpo se producen cambios mecánicos (*estricción magnética*, véase el § 203), debido a los cuales, sobre un conductor con corriente colocado en un cuerpo magnético actúan fuerzas mecánicas complementarias. Pero si los conductores recorridos por corrientes se hallan en un *cuerpo magnético uniforme e infinito*, las fuerzas de acción recíproca entre ellos son de tal índole, cual si las determinara solamente la acción de la excitación magnética total $\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$.

Según la fórmula de Ampere, sobre un elemento del conductor Δl recorrido por una corriente y que se halla en el vacío, de parte de la excitación magnética H del campo exterior actúa una fuerza Δf:

$$\Delta f = I \cdot H \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l, \tag{2}$$

donde I es la intensidad de la corriente y α, el ángulo entre la dirección de la excitación magnética y la del movimiento de las cargas positivas en el conductor.

Si el cuerpo magnético es homogéneo e infinito, según lo dicho, obtenemos la fuerza Δf sustituyendo en la fórmula (2), la excitación magnética H por la inducción magnética B:

$$\Delta f = IB \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l. \tag{2a}$$

Así, si tenemos un cuerpo magnético infinito, consideramos que *la acción del campo magnético sobre la corriente viene determinada por el vector de inducción magnética* **B**.

Como, según lo dicho, la inducción magnética **B** es la suma de las excitaciones $\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$, se debería medir en las mismas unidades que $\mathbf{H}_0$, es decir, en el sistema *CGSM* en oerstedios. No obstante en el sistema *CGSM* se ha convenido en dar un nombre especial a la unidad de inducción magnética: gausio. En la realidad, el gausio coincide con el oerstedio. En el § 195 se señaló que la fórmula (2) era justa en el sistema *CGSM*, es decir, si la intensidad I de la corriente se medía en unidades *CGSM* de intensidad de la corriente; H, en oerstedios; Δl, en centímetros, y Δf, en dinas. La fórmula (2a) también es justa en el sistema *CGSM*, es decir, si medimos I en unidades *CGSM* de intensidad de la corriente y B, en gausios.

La fórmula (2a) nos permite determinar en principio el valor del vector de inducción magnética **B** en cada uno de los puntos del campo en función de la fuerza Δf que actúa sobre el elemento del conductor. Está claro que este conductor debe ser lo suficiente fino para que el campo, dentro de los límites de su dimensión, se pueda considerar uniforme y su introducción no debe variar ni la magnitud ni la configuración de las corrientes que originan el campo, ni debe causar

www.elsolucionario.org

ninguna magnetización complementaria del cuerpo magnético. Todas estas exigencias, sobre todo en el caso de un cuerpo magnético sólido, prácticamente son imposibles de satisfacer. Por ejemplo, para determinar la acción de las fuerzas magnéticas sobre el cuadro recorrido por una corriente y situado en un cuerpo magnético sólido, hay que hacer una cavidad en el cuerpo magnético.

Como en el caso correspondiente de electrostática, la acción sobre el cuadro dependerá de la forma de esta cavidad. Sobre la posibilidad de determinar el vector **B** se hablará con más detalle en el § 207.

§ 201. Momentos magnéticos de las moléculas, átomos y electrones. La hipótesis de Ampere sobre la existencia de corrientes moleculares corresponde a los conceptos contemporáneos de la estructura de los átomos y moléculas. Se ha indicado varias veces que el átomo es un complejo sistema eléctrico y que los electrones son partes integrantes del mismo. Según el modelo propuesto por Rutherford, el átomo consta de un pesado núcleo cargado positivamente y de electrones que giran a su alrededor por determinadas órbitas. El electrón que gira por una órbita cerrada se asemeja a la corriente que fluye por un circuito cerrado. El electrón crea un campo magnético y el campo magnético exterior influye en él orientándolo.

Para simplificar supongamos que el electrón gira según una órbita circular de radio r. Su momento mecánico de cantidad de movimiento P (momentum) es

$$P = mvr, \qquad (1)$$

donde m es la masa del electrón y v, su velocidad. Al mismo tiempo, por ser semejante a la corriente, tiene un momento magnético p_m. Determinemos este momento magnético. Si mentalmente hacemos un corte de la órbita, en cada vuelta el electrón transportará por la sección de este corte una carga e igual a la carga del mismo electrón. Por unidad de tiempo se habrá transportado una carga ne, donde n es el número de vueltas del electrón por unidad de tiempo según su órbita.

Como la intensidad de la corriente I numéricamente es igual a la carga transportada por unidad de tiempo, el electrón girando por la órbita equivale a una corriente de intensidad

$$I = ne.$$

El número de vueltas es $n = \frac{v}{2\pi r}$, de donde

$$I = \frac{v}{2\pi r} e.$$

Según lo arriba indicado, el momento magnético p_m del contorno recorrido por una corriente de intensidad I es igual a IS, donde S es la superficie del contorno.

De aquí que el momento magnético del electrón que gira según una órbita cerrada de radio r, sea

$$p_m = IS = \frac{v}{2\pi r} e \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} vre. \tag{2}$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$p_m = \frac{1}{2} \frac{e}{m} P, \tag{3}$$

es decir, los momentos magnéticos $\mathbf{p}_m$ y mecánico **P** del electrón que se desplaza según una órbita cerrada, están directamente relacionados. La fórmula (3) corresponde al sistema electromagnético de unidades. Si utilizásemos un sistema mixto, a saber, midiendo el momento magnético $\mathbf{p}_m$ en unidades *CGSM*, y la relación de la carga del electrón a su masa e/m, en unidades *CGSE*, como generalmente se hace, habría que introducir en el término de la derecha el coeficiente $\frac{1}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ seg/cm, de donde

$$p_m = \frac{1}{2c} \cdot \frac{e}{m} \cdot P. \tag{3a}$$

Si en el átomo o en la molécula hay varios electrones que se desplazan por órbitas diferentes, los momentos mecánicos $\mathbf{P}_i$ de los distintos electrones se suman vectorialmente en un momento resultante **P**; lo mismo ocurre con los momentos magnéticos $\mathbf{p}_{mi}$ de los distintos electrones, cuyo momento magnético $\mathbf{p}_m$ resultante es la suma vectorial del de los distintos electrones del átomo o de la molécula.

Einstein —de Haas en 1915 demostraron experimentalmente que en el interior de la sustancia paramagnética existían corrientes moleculares relacionadas con determinados momentos magnéticos y mecánicos. Al magnetizar una barra de sustancia paramagnética introduciéndola en un campo magnético exterior, las moléculas con su momento magnético giran orientándose según el campo, lo cual acarrea un cambio de dirección de sus momentos mecánicos **P**. Como el momento mecánico total de la cantidad de movimiento permanece invariable, la barra debe adquirir un momento de cantidad de movimiento de sentido contrario, es decir, debe girar. Este fenómeno es completamente análogo al descrito en el t. 1, donde se decía que un hombre de pie sobre un taburete que pueda girar, al comunicar un movimiento de rotación al eje de una rueda que sostiene en las manos, el mismo hombre empieza a girar.

En el experimento de Einstein —de Haas, la barra de hierro se suspendía de un hilo fino y se introducía en un solenoide vertical según el eje (fig. 214). Al cambiar el sentido de la corriente del solenoide, la barra se magnetizaba en otro sentido y adquiría con ello una impulsión angular. Su giro se observaba por un haz de luz que se reflejaba en el espejo *a* fijo en el hilo. Para aumentar el ángulo de desviación se aplicó el principio de resonancia, en que la corriente del solenoide cambiaba de sentido con un período igual al de las propias oscilaciones de la barra suspendida del hilo.

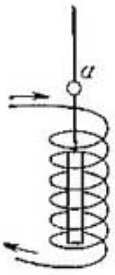


Fig. 214. Esquema del experimento de Einstein-de Haas.

La dirección del giro de la barra correspondía al signo negativo de la carga del electrón. Utilizando la fórmula (3) y midiendo la relación entre los momentos magnético y mecánico, se puede determinar la relación entre la carga y la masa del electrón.

Sin embargo, los resultados de las mediciones de e/m dieron valores distintos de los obtenidos por otros métodos. Las causas de esta discrepancia se indicarán al final de este párrafo.

Hay otro efecto que es contrario al que acabamos de describir (efecto determinado por el método de Barnett).

Al girar una barra de sustancia paramagnética, los ejes de todas sus corrientes moleculares deben tender a orientarse paralelamente al eje de giro de la barra. Este efecto es completamente análogo al efecto giroscópico observado en mecánica, según el cual, si se coloca una peonza en una plataforma que gira, el eje de la peonza tiende a orientarse paralelamente al de la plataforma. Como resultado del giro de la barra, ésta debe magnetizarse. Efectivamente, se ha conseguido observar una magnetización de la barra de hierro al hacerla girar rápidamente. Así pues, también se ha confirmado cualitativamente este fenómeno; en lo que se refiere al aspecto cuantitativo, estos experimentos, lo mismo que los de Einstein-de Haas, han dado valores de e/m diferentes a los obtenidos por otros métodos.

En 1917, A. Ioffe y P. Kapitsa también demostraron que en el interior de una sustancia paramagnética existían corrientes moleculares relacionadas con los momentos magnético y mecánico mediante otro experimento. Para ello aprovecharon el hecho de que el llamado magnetismo remanente de los imanes permanentes desaparece al calentarlos (§ 204). Se suspendía de un hilo fino una barra de níquel magnetizada. Al calentarla se creaba una distribución desordenada de los momentos magnéticos de las moléculas en distintas direcciones y el momento mecánico total era igual a cero.

www.elsolucionario.org

Pero debido al principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento, la barra giraba.

Stern y Gerlach realizaron la medición directa de los *momentos magnéticos* de los átomos y de las moléculas. La idea de los experimentos de Stern y Gerlach se basa en que en un campo magnético variable exterior, sobre una partícula con momento magnético actúa una fuerza de desplazamiento (véase el § 197). Un haz atómico aa'

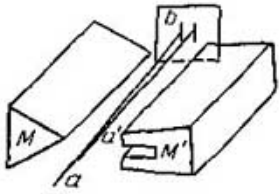


Fig. 215. Esquema del experimento de Stern y Gerlach.

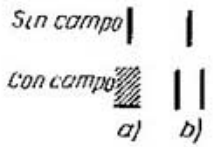


Fig. 216. a) Dispersión esperada del haz atómico en un campo magnético, b) dispersión observada del haz atómico de la plata en el campo magnético.

(fig. 215) obtenido en un alto grado de vacío se lanzaba entre los dos polos MM' de un electroimán hechos de tal forma que el campo magnético era altamente variable en la dirección perpendicular a la del haz atómico. Al chocar con la placa b, el haz dejaba en ella una huella en forma de una estrecha franja. La fuerza que actúa sobre el átomo de momento magnético p_m (véase la pág. 332), es

$$\Delta f = p_m \left(\frac{\Delta H}{\Delta x} \right) \cos \alpha,$$

donde $(\Delta H/\Delta x)$ es el gradiente de la excitación magnética. De esta manera tenemos que el valor de la fuerza Δf depende del momento magnético del átomo p_m, del grado de variación del campo magnético y del ángulo α que forma la dirección del momento $\mathbf{p}_m$ con la dirección del gradiente de la excitación magnética. Podría esperarse que debido al movimiento térmico, los momentos magnéticos de los átomos deberían desplazarse en todas direcciones, con lo cual distintos átomos deberían sufrir diferentes desviaciones y el haz atómico, al pasar a través de un campo magnético variable, se tendría que dispersar (véase la fig. 216, *a*). En la realidad, los experimentos de Stern y Gerlach dieron otro resultado: *el haz atómico se dividía en varios haces marcadamente señalados*. En el caso de la plata, lo mismo que en el del sodio, potasio y otros metales alcalinos, se descompone en dos haces simétricos (véase la fig. 216, *b*); los átomos del vanadio han revelado una descomposición del haz en cuatro

haces independientes; los átomos del manganeso, en seis; los del hierro, en nueve. Los haces del mercurio, magnesio y algunos otros no se descomponen en absoluto, lo cual demuestra que los átomos de estos elementos no tienen momentos magnéticos.

La descomposición del haz atómico en haces independientes marcadamente señalados indica que los momentos magnéticos de los átomos en el campo magnético exterior no están orientados de cualquier manera, sino según ángulos determinados con respecto a la dirección del campo magnético. Por ejemplo, los átomos de sodio pueden orientarse de dos maneras, bien su momento magnético tiene el mismo sentido que el campo, bien el contrario; los átomos de vanadio se orientan de cuatro maneras respecto al campo, etc. Esto se explica en la mecánica cuántica (véase el t. III).

Las mediciones de estas desviaciones indican que la proyección de los momentos magnéticos de todos los átomos son fracciones racionales de un momento magnético p_0 completamente determinado:

$$p_m = \frac{q}{r} p_0,$$

donde q y r son números enteros. El momento magnético p_0 se denomina *magnetón de Bohr* y su valor es

$$p_0 = 0{,}9272 \cdot 10^{-20} \text{ erg/gausios}^*).$$

El valor máximo de las proyecciones de los momentos magnéticos de algunos átomos se da en la tabla XV.

El análisis de estos experimentos, lo mismo que el carácter de la estructura de los espectros atómicos (véase el t. III), nos demuestra que cada electrón posee un momento magnético determinado. De esto, naturalmente, dentro de los límites de la electrodinámica clásica surgió la hipótesis de que el electrón gira continuamento alrededor del eje que pasa por su centro. Este giro releva la existencia en el electrón de un constante momento mecánico de cantidad de movimiento P_e (denominado *spin*, de esta palabra inglesa que significa "giro, rotación") y del momento magnético p_m constante

*) La medición de los momentos magnéticos en unidades erg/gausios se desprende de lo siguiente: el momento de fuerzas M que actúa sobre un contorno con corriente, es $M = p_m B \operatorname{sen} \alpha$, donde p_m es el momento magnético de la corriente y B, la inducción magnética del campo. De aquí que

$$p_m = \frac{M}{B \operatorname{sen} \alpha}.$$

Como M se mide en din·cm, y B en gausios, la unidad de medición de p_m se escribe $\frac{\text{din} \cdot \text{cm}}{\text{gausios}}$, pero din·cm coincide con el ergio, de donde la unidad de medición del p_m adquiere la notación de erg/gausios.

Tabla XV

Valores máximos de las proyecciones de los momentos magnéticos de los átomos (en fracciones de magnetón de Bohr)

Atomo	$P_{m\ máx}$
Hidrógeno	1
Sodio	1
Vanadio	3/5
Cromo	6
Hierro	6
Indio	1/3

relacionado con él, que es igual a un magnetón de Bohr. No obstante, ésta al parecer patente hipótesis resultó demasiado simplificada y fue sustituida por los conceptos generales de la mecánica cuántica sobre las propiedades del electrón. En este caso, para concordar los resultados de la teoría con los de los experimentos se ha tenido que suponer que entre los momentos magnético y mecánico del electrón tiene lugar la siguiente relación:

$$p_m = \frac{e}{m} P_e, \tag{4}$$

es decir, que la relación p_m/P_e para los propios momentos del electrón es dos veces mayor que la de los momentos orbitales magnético y mecánico del electrón, cuya relación viene determinada por la igualdad (3).

El momento magnético total del átomo (o de la molécula) es la suma de los momentos magnéticos debidos al movimiento de los electrones por las órbitas cerradas, y de los propios momentos magnéticos de los electrones p_m. En este caso hay que tener en cuenta que en el interior del átomo, según las leyes de la mecánica cuántica, los momentos magnéticos de las distintas órbitas electrónicas y de los mismos electrones se orientan unos respecto a los otros formando ángulos determinados. La relación entre los momentos resultantes mecánicos y magnéticos es mucho más compleja que la representada en la fórmula (3), lo cual explica la aparente contradicción en los resultados de los experimentos de Einstein-de Haas con la teoría.

§ 202. Vector de imanación. Se ha convenido en caracterizar el grado de imanación de un medio con un vector denominado *vector de imanación*, que es igual al momento magnético de la unidad de

www.elsolucionario.org

volumen del medio. Llamemos $\Sigma \mathbf{p}_i$ a la suma geométrica de lo momentos magnéticos de las moléculas que hay en el volumen ΔV de un cuerpo magnético. Entonces, el vector de imanación **P** de u cuerpo magnético imantado uniformemente vendrá determinad por la igualdad:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}. \qquad (1$$

Si el cuerpo magnético no está uniformemente imantado, e vector de imanación **P** tiene distintos valores en diferentes volú menes; en este caso, por imanación en el punto dado se entiende e límite a que tiende la expresión (1) al disminuir indefinidament el volumen ΔV *):

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V} \right). \qquad (2$$

Como hemos visto, la excitación magnética en el interior de u cuerpo magnético es la suma de la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ de la corrientes exteriores dadas (campo magnetizador) y de la excitació magnética $\mathbf{H}'$ creada por las moléculas de la sustancia magnetizada La excitación resultante

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}' \qquad (3$$

la hemos llamado *inducción magnética*.

En el caso de un cuerpo magnético uniforme que llena por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, la excitació $\mathbf{H}'$ magnética creada por las moléculas es fácil relacionarla con el vector de imanción **P**. Nosotros estableceremos esta relación utilizando un simple caso particular. Sea un solenoide infinitamente largo, cuyo interior lo llena un cuerpo magnético cilíndrico y uniforme. Al pasar una corriente por el solenoide, el cuerpo magnético se magnetiza uniformemente. Consideraremos que la magnetización es debida a que hay corrientes moleculares ordenadas. Los planos de estas corrientes moleculares son perpendiculares al vector de imanación, que es paralelo al eje del cilindro (fig. 217). Al examinar las corrientes moleculares en una sección del cilindro vemos que en el interior del cilindro cerca de cada punto de la sección fluyen dos corrientes de sentido contrario. Estas corrientes crean campos magnéticos de sentido contrario que se compensan mutuamente. So-

*) Aquí, como en otros problemas físicos análogos, la disminución indefinida del volumen ΔV es un concepto convencional: al pasar al límite, el volumen ΔV se toma lo suficientemente pequeño para que la propiedad física dada (por ejemplo, la imanación) permanezca constante dentro de sus límites; pero el volumen debe seguir siendo grande en comparación con el volumen de una molécula.

lamente quedan sin compensar los campos creados por las corrientes que fluyen por la superficie exterior del cilindro. Estas corrientes son semejantes a la del solenoide, por eso crean en el interior del cilindro un campo magnético de excitación $\mathbf{H}'$ que se puede calcular utilizando la fórmula (4) del § 195.

Llamando I_0 a la corriente correspondiente a la unidad de longitud del cilindro, tendremos que I_0 será igual al producto de la intensidad de la corriente por el número n de espiras que hay en esta unidad de longitud, de donde

$$H' = 4\pi I_0. \qquad (4)$$

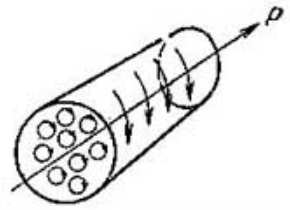


Fig. 217. Suma de corrientes moleculares en un medio magnetizado.

Es fácil establecer la relación entre I_0 y el vector de imanación. El vector de imanación numéricamente es igual al momento magnético de la unidad de volumen. Llamando S al área de la sección del cilindro, tenemos que el volumen de un trozo del cilindro de longitud l es igual a Sl. Por consiguiente, obtendremos el valor del vector de imanación **P**, si dividimos el momento magnético del trozo del cilindro, que es $I_0 Sl$, por el volumen Sl, es decir,

$$P = \frac{I_0 Sl}{Sl} = I_0. \qquad (5)$$

Así pues, el vector de imanación **P** numéricamente es igual a la intensidad de la corriente molecular por unidad de longitud. La dirección del vector de imanación **P** coincide con la de la excitación magnética $\mathbf{H}'$. De aquí comparando las fórmulas (4) y (5), obtenemos que

$$\mathbf{H}' = 4\pi\mathbf{P}. \qquad (6)$$

Colocando este valor de $\mathbf{H}'$ en la expresión (3) de la inducción magnética **B**, nos da que

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + 4\pi\mathbf{P}. \qquad (7)$$

Para los cuerpos no ferromagnéticos, el vector de imanación **P** se puede considerar *proporcional a la excitación magnética* $\mathbf{H}_0$ *de las corrientes exteriores dadas* (*campo magnetizador*):

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{H}_0. \qquad (8)$$

La magnitud $\varkappa$ que caracteriza al cuerpo magnético dado, se denomina *susceptibilidad magnética.*

Para las sustancias paramagnéticas, el vector de imanación **P** va en el mismo sentido que el $\mathbf{H}_0$ (para estas sustancias $B > H_0$) y,

por consiguiente, $\varkappa$ tiene valor positivo. Para las sustancias diamagnéticas, los vectores $\mathbf{P}$ y $\mathbf{H}_0$ van en sentido contrario (en ellas $B<H_0$) y $\varkappa$ es negativa.

Sustituyendo $\mathbf{P}$ por su valor en función de $\mathbf{H}_0$, según la (8), en la fórmula (7), obtenemos que

$$\mathbf{B} = (1 + 4\pi\varkappa)\,\mathbf{H}_0. \tag{9}$$

El factor constante $1+4\pi\varkappa$ se ha convenido designar con una sola letra μ:

$$1 + 4\pi\varkappa = \mu \tag{10}$$

y denominarlo *permeabilidad magnética del medio*. Para los medios paramagnéticos tenemos que $\mu>1$, para los diamagnéticos, $\mu<1$, para el vacío, $\mu=1$.

Colocando en la fórmula (9) la permeabilidad magnética μ en lugar de $1+4\pi\varkappa$, obtenemos que

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}_0. \tag{9a}$$

Las fórmulas (6), (7), (8), (9) y (9a) solamente son justas para el caso de un cuerpo magnético uniforme que llene completamente el espacio donde el campo magnético es diferente de cero. Para un cuerpo magnético cualquiera, no se puede dar una fórmula general de la excitación $\mathbf{H}'$. En cada caso concreto se calcula $\mathbf{H}'$ teniendo en cuenta todas las corrientes moleculares.

Veamos el caso de un cuerpo magnético cualquiera (es decir, de un cuerpo magnético heterogéneo o de pedazos independientes de cuerpos magnéticos uniformes). En cada uno de los puntos de un medio de esta clase, la susceptibilidad magnética $\varkappa$, y con ella la permeabilidad magnética μ [fórmula (10)], tienen un valor determinado. No nos detendremos por ahora en el modo de medir el vector $\mathbf{B}$ y lo consideraremos conocido.

Introduzcamos el vector $\mathbf{H}$ determinado en el punto dado por la ecuación.

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}, \tag{11}$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio en el punto dado. El vector $\mathbf{H}$ lo llamaremos *vector de excitación magnética en el cuerpo magnético dado*.

Si el cuerpo magnético es uniforme y llena por completo todo el espacio donde el campo es distinto de cero, se satisfacen las condiciones de las fórmulas (11) y (9a).

Comparando estas dos fórmulas se deduce que *en un cuerpo magnético uniforme que llena por completo el espacio donde el campo es distinto de cero, la excitación magnética* $\mathbf{H}$ *coincide con la excitación magnética* $\mathbf{H}_0$ *creada por las corrientes dadas (magnetizadoras).*

www.elsolucionario.org

Para un cuerpo megnético cualquiera, el vector de excitación magnética **H** *puede no coincidir con el vector* $\mathbf{H}_0$ (véase el § 203).

Para un cuerpo no ferromagnético cualquiera, el vector de imanación **P** se puede considerar *proporcional a la excitación magnética* **H** *):

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{H}, \tag{12}$$

donde $\varkappa$ es la susceptibilidad magnética en el punto dado.

De las fórmulas (10), (11) y (12) se deduce que

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{P}. \tag{13}$$

En el caso particular de un cuerpo magnético uniforme que llena completamente el espacio donde el campo es distinto de cero, tenemos que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$, y las fórmulas (11), (12) y (13) se transforman en las fórmulas (9a), (8) y (7) respectivamente.

Según lo dicho en el § 200, el vector **B** determina la fuerza de acción recíproca de las corrientes cuando hay cuerpos magnéticos. Esto nos permite determinar en principio la permeabilidad magnética en función de la variación de las fuerzas de acción recíproca entre las corrientes. Sin embargo, este método prácticamente es inaplicable, ya que μ se diferencia poco de la unidad, por lo tanto la indicada variación de las fuerzas de acción recíproca entre las corrientes es muy pequeña. Por eso se determina μ de manera indirecta en función del momento magnético de un cuerpo magnético de forma determinada.

Una pequeña esfera de la sustancia a analizar se introduce en un intenso campo magnético variable, cuya excitación magnética H_0 y gradiente $\Delta H_0/\Delta x$ se conocen. Bajo la acción del campo, la esfera se magnetiza. Si $\mathbf{P}_m$ es su momento magnético, la esfera, lo mismo que en el caso del contorno con corriente (véase el § 197, punto 2), sufrirá la acción de la fuerza

$$f = P_m \left(\frac{\Delta H_0}{\Delta x} \right), \tag{14}$$

proporcional al gradiente del campo.

*) Sería más lógico (por analogía con la electrostática) suponer que el vector de imanación **P** es proporcional al vector resultante de excitación magnética, es decir, al vector de inducción magnética **B**. No obstante, por causas históricas, se ha convenido en utilizar la ecuación (12).

De hecho, entre estos dos puntos de vista no hay ninguna diferencia en principio, ya que los vectores **H** y **B**, según la (11), son proporcionales mutuamente. Esta disyunción histórica de la forma de las correspondientes fórmulas de electrostática, conduce solamente a que resulten análogas las magnitudes ε y $\frac{1}{\mu}$, en vez de ε y μ como resultaría, si en lugar de la (11) se escribiese: $\mathbf{H} = \mu \mathbf{B}$; y $\varkappa_e$ y $\varkappa_m/\mu$, en vez de $\varkappa_e$ y $\varkappa_m$ [como si en lugar de la (12) se escribiese: $\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{B}$], (véase el § 207).

El momento magnético de la esfera $\mathbf{P}_m$ puede estar relacionado con el vector de imanación **P**. Aproximadamente, dentro de los límites de la esfera, la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ se puede considerar constante; por lo tanto (como se puede demostrar para la esfera y para un elipsoide) será también constante el vector de imanación **P**, igual al momento magnético por unidad de volumen. Por consiguiente,

$$P_m = \frac{4}{3}\pi r^3 P, \tag{15}$$

donde r es el radio de la esfera. En una esfera paramagnética, el momento magnético $\mathbf{P}_m$ va dirigido según el campo; en una esfera diamagnética, $\mathbf{P}_m$ va en sentido contrario al campo. Por eso, la esfera paramagnética será atraída hacia la zona donde la excitación sea mayor, y la diamagnética, repelida hacia donde la excitación sea más débil.

Sustituyendo $\mathbf{P}_m$ en la fórmula (14) por su valor según la (15) y expresando el vector de imanación P en función de la excitación magnética **H** en la esfera [según la (12)], obtenemos que

$$f = \frac{4}{3}\pi r^3 \varkappa H \left(\frac{\Delta H_0}{\Delta x}\right). \tag{16}$$

El correspondiente cálculo demuestra que para la esfera

$$H = \frac{3}{2+\mu} H_0.$$

Como para todos los cuerpos diamagnéticos y paramagnéticos el valor de μ se diferencia muy poco de la unidad, con gran aproximación se puede considerar que $H = H_0$, y en lugar de la fórmula (16) se puede escribir:

$$f = \frac{4}{3}\pi r^3 \varkappa H_0 \left(\frac{\Delta H_0}{\Delta x}\right). \tag{17}$$

La fórmula (17) nos permite determinar $\varkappa$ en función de la fuerza que actúa sobre la esfera.

Para determinar la susceptibilidad magnética $\varkappa$ y la permeabilidad magnética μ, en lugar de una esfera se utiliza también un elipsoide alargado de revolución. El momento magnético del elipsoide se puede calcular teóricamente. Un elipsoide de esta clase, en un campo magnético exterior y uniforme sufre la acción de un momento M de fuerzas que lo hacen girar y orientarse a lo largo de las líneas de fuerza del campo.

Los valores de la permeabilidad magnética de una serie de sustancias para- y diamagnéticas se da en la tabla XVI.

Tabla XVI

Valores de la permeabilidad magnética
(los gases se toman a la presión atmosférica)

Sustancias paramagnéticas		Sustancias diamagnéticas	
sustancia	$(\mu-1)\cdot 10^6$	sustancia	$(1-\mu)\cdot 10^6$
Nitrógeno	0,013	Hidrógeno	0,063
Oxígeno	1,9	Cobre	8,8
Aluminio	23	Sal gema	12,6
Platino	360	Bismuto	176

§ 203. Ferromagnetismo. Como se ha indicado en el § 200, algunas sustancias paramagnéticas tienen la propiedad de crear una excitación complementaria H' muy grande, por consiguiente se caracterizan por su gran permeabilidad magnética μ. Estas sustancias se denominan *ferromagnéticas*. Entre éstas tenemos el hierro, el níquel, el cobalto, el gadolinio y sus aleaciones (por ejemplo, la de Fe-Ni, Fe-Ni-Al, etc.) y algunas aleaciones de sustancias no ferromagnéticas, como la aleación de 61,5% de Cu, 23,5% de Mn y 15% de Al, la de manganeso con el bismuto, la del cromo con telurio, etc.

La particularidad de las sustancias ferromagnéticas no se reduce a tener un gran valor de μ, sino también en lo siguiente: 1) las sustancias ferromagnéticas conservan la magnetización después que el campo magnetizador ha cesado de actuar, y 2) la permeabilidad magnética μ (lo mismo que la susceptibilidad magnética $\varkappa$) para estas sustancias no son magnitudes constantes, sino que dependen de la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ del campo magnetizador.

Los cuerpos ferromagnéticos cristalinos, como por ejemplo los monocristales de hierro, revelan una anisotropía en las propiedades magnéticas: en unas direcciones, el cristal se magnetiza con más facilidad que en otras. Desde el punto de vista magnético, el mismo cuerpo, pero con estructura policristalina (de cristales pequeños), es isótropo.

A. Stoliétov, profesor de la universidad de Moscú, fue el primero en investigar minuciosamente la dependencia entre la imanación del hierro y la excitación magnética de un campo exterior, publicando en 1872 la monografía "Investigación de la función de la imanación del hierro dulce". El método experimental de Stoliétov se basaba en el fenómeno de inducción (véase el § 221). Aquí examinaremos otro método de medición del vector de inducción magnética en los ferromagnéticos sólidos. Sea un solenoide toroidal y en su interior un núcleo del ferromagnético a analizar.

www.elsolucionario.org

El campo magnético total en el interior del núcleo vendrá determinado por el vector de inducción magnética **B**, que es la suma de la excitación magnética $\mathbf{H}_0$, creada por la corriente del solenoide, y la **H'** creada por las corrientes moleculares:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'.$$

Si abrimos una pequeña rendija transversal en el núcleo del solenoide (fig. 218), en esta rendija el vector de inducción magnética coincide con el de la excitación magnética, ya que prácticamente no hay más que aire en ella, para el cual $\mu = 1$ (cuyo paramagnetismo despreciamos).

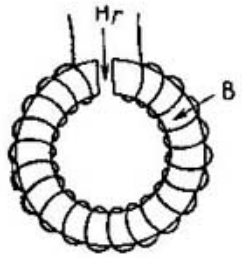


Fig. 218. La excitación magnética H_r en la rendija es igual a la inducción magnética B en el ferromagnético.

Las magnitudes que se refieran a la rendija las caracterizaremos con el subíndice "r", de donde:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{H}_r. \qquad (1)$$

El vector de inducción magnética **B** en el interior del núcleo es paralelo al eje del toroide. Si la rendija en el interior del toroide es muy fina, como veremos después (véase el § 207), la inducción no varía sensiblemente; por lo tanto, en la zona de la rendija será la misma que en el interior del núcleo:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B},$$

de donde, según la (1),

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{B} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}',$$

es decir, la excitación $\mathbf{H}_r$ en el interior de la rendija es igual a la inducción en el interior del núcleo; en otras palabras, es igual a la suma de las excitaciones $\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, creadas por la corriente del solenoide y las moleculares del núcleo.

De esta manera tenemos que el núcleo, gracias a la magnetización, intensifica la excitación magnética en la rendija. Midiendo la excitación magnética H_r en la rendija (por ejemplo, por la acción ejercida sobre un contorno con corriente), se mide con ello el valor de la inducción B en el núcleo.

Para las sustancias ferromagnéticas, lo mismo que para las dia- y paramagnéticas, consideraremos que la relación entre el vector de inducción magnética **B** y el de la excitación **H** viene expresada por la fórmula (11) del § 202:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad (2)$$

donde μ es la permeabilidad del cuerpo ferromagnético.

De esta manera determinamos la permeabilidad magnética μ:

$$\mu = \frac{B}{H}. \qquad (2a)$$

Utilizando la relación entre μ y la susceptibilidad magnética ϰ expresada por la fórmula (10) del § 202 en que

$$\varkappa = \frac{\mu - 1}{4\pi},$$

para el vector de imanación **P** obtenemos el valor

$$P = \varkappa H = \frac{B - H}{4\pi}. \qquad (3)$$

Como el núcleo prácticamente llena todo el espacio ocupado por el campo magnético (la rendija es muy angosta), la excitación magnética H en el núcleo introducido en el toroide es igual a la excitación

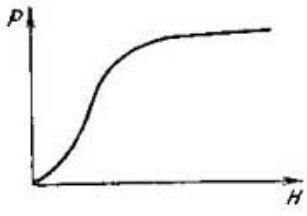


Fig. 219. Dependencia entre el vector de imanación P y la excitación magnética H en un ferromagnético.

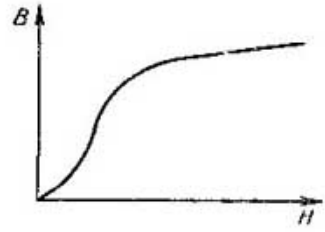


Fig. 220. Dependencia entre la inducción magnética B y la excitación magnética H en un ferromagnético.

magnética H_0 del toroide sin núcleo (véase el § 202). Por eso, lo mismo que para el caso del solenoide, será

$$H = H_0 = 4\pi In,$$

donde n es el número de espiras por unidad de longitud del toroide. Calculando de esta manera el valor de H para diferentes intensidades de corriente I y hallando los valores respectivos de B midiendo la excitación magnética H_r en la rendija [fórmula (1)], se pueden determinar μ y P de la sustancia ferromagnética dada para distintas excitaciones magnéticas H en el ferromagnético, o, lo que es lo mismo, para diferentes excitaciones magnéticas H_0 del campo magnetizador.

Los resultados de las mediciones de estas magnitudes se pueden representar gráficamente. Detengámonos antes que nada en la dependencia entre la imanación y la excitación magnética H (fig. 219).

Vemos que la imanación P al principio crece bruscamente con el aumento de H, y después con menos intensidad, y por último, a partir de cierto valor de H, el ulterior aumento de la excitación magnética H no acarrea ningún crecimiento de P, lo cual corresponde a la rama horizontal del gráfico. Este fenómeno, descubierto por A. Stoliétov, se denomina *saturación magnética*. Este carácter de dependencia entre P y H se puede explicar por el hecho de que al principio, bajo la acción del creciente campo magnetizador, aumenta el grado de orientación de los momentos magnéticos moleculares según el campo; pero el incremento de este efecto debido a la orientación empieza a disminuir a medida que quedan cada vez menos y menos momentos no orientados; y por último, cuando todos los momentos moleculares se han orientado según el campo, cesa el ulterior crecimiento de P y aparece el fenómeno de saturación.

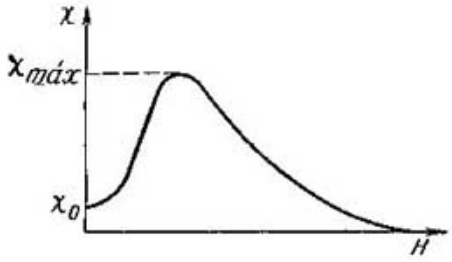


Fig. 221. Dependencia entre el coeficiente de susceptibilidad magnética $\varkappa$ y la excitación magnética H en un ferromagnético.

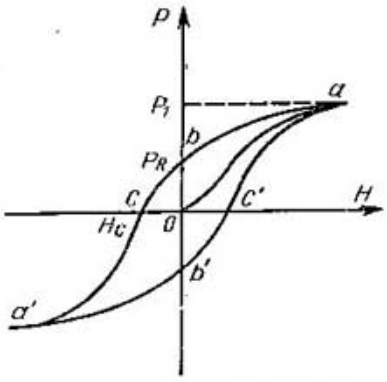


Fig. 222. Ciclo de histéresis.

La dependencia entre la inducción magnética B y la excitación magnética $H_0=H$ del campo magnetizador se expresa mediante un gráfico parecido que, no obstante, no tiene rama horizontal (fig. 220), ya que $B=H+H'$. En la saturación, la magnitud H' permanece constante, y B aumenta proporcionalmente a H.

La relación de dependencia entre la permeabilidad magnética μ (o la susceptibilidad magnética $\varkappa$) y H se caracteriza por un intenso aumento al principio de μ (o de $\varkappa$) con el aumento de la excitación magnética del campo magnetizador y, después de haber alcanzado el máximo, por empezar a disminuir. A elevados valores de la excitación H del campo magnetizador, el valor de μ tiende a la unidad, y el de $\varkappa$, a cero. En la fig. 221 se representa la curva de Stoliétov para la susceptibilidad magnética $\varkappa$ del hierro en función de la excitación magnética H. μ tiende a la unidad cuando las exci-

www.elsolucionario.org

taciones H del campo magnetizador son tan elevadas, que en la expresión

$$B = H + H'$$

se puede despreciar la excitación H' del campo molecular por ser pequeña en comparación con H.

Una importante particularidad de los cuerpos ferromagnéticos es la *histéresis*. El fenómeno de histéresis consiste en que la imanación P (y, por consiguiente, la inducción magnética B) no sólo depende del valor de la excitación magnética H del campo magnetizador en el momento dado, sino también de la excitación que hubo anteriormente. En la fig. 222 se representa el gráfico de dependencia entre P y H. La rama Oa de la curva representa un aumento de la imanación P al elevar H, si la magnetización se hace por primera vez. El punto a corresponde a la saturación (la imanación alcanza el valor máximo P_1).

Si después de alcanzada la saturación se empieza a disminuir la excitación H, la imanación P no disminuirá recorriendo la curva aO, sino por otra curva ab, con lo cual a los mismos valores de H tomados en orden inverso les corresponderán unos valores de P mayores que antes. Cuando sea $H=0$, la imanación no desaparecerá, conservándose un *magnetismo remanente* (*imanación remanente*) P_R expresado por el segmento Ob. Para originar una ulterior disminución de P hay que cambiar la dirección de la excitación H del campo magnetizador en sentido contrario. A determinado valor de $H=H_c$, la imanación P desaparece. El valor de H_c expresado por el segmento Oc se denomina *fuerza coercitiva*. Al aumentar aún más en sentido contrario la excitación H, aparece una imanación de signo contrario. En este caso también se puede alcanzar la saturación en a'. Si después se aumenta la excitación H, la dependencia entre P y H se representará por una curva simétrica a la primera, $a'b'c'a$, cerrando la curva denominada *ciclo de histéresis*.

Debido al fenómeno de histéresis, a un mismo valor del campo magnetizador H, le pueden corresponder varios valores de imanación P. Por ejemplo, a $H=0$, le corresponden: 1) carencia de imanación (punto O); 2) la imanación expresada por el segmento Ob (que ocurre después de magnetizar el núcleo); y 3) la imanación expresada por el segmento Ob' (que tiene lugar después de haber alcanzado el núcleo el valor de saturación).

Diferentes sustancias ferromagnéticas presentan curvas de histéresis de distintas formas. En las aplicaciones técnicas se necesitan diferentes tipos de histéresis. Se ha convenido en distinguir los materiales magnéticos en materiales magnéticamente blandos, "de ciclo estrecho", que se caracterizan por ser pequeña la fuerza coercitiva, y magnéticamente duros "de ciclo ancho", que se caracte-

rizan por poseer una gran fuerza coercitiva. Entre los primeros tenemos el hierro dulce, acero al silicio, aleaciones de hierro con níquel (sobre todo la aleación denominada "permaleación" que contiene 78% de Ni); estos materiales se utilizan, por ejemplo, para fabricar núcleos de transformadores. Entre los magnéticamente duros tenemos los aceros al carbono y especiales (por ejemplo, la aleación que contiene Fe, Al, Cu, Ni y Co). Los materiales magnéticamente duros se utilizan

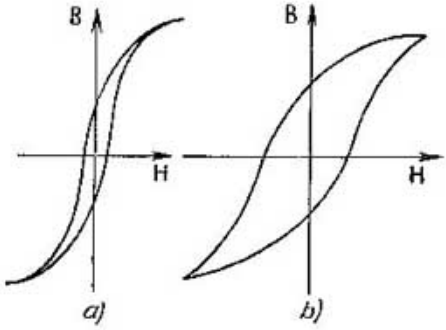


Fig. 223. Ciclo de histéresis: a) material magnéticamente blando b) material magnéticamente duro.

para la fabricación de imanes permanentes. En la fig. 223 se representan las curvas típicas de histéresis para el material magnéticamente blando (*a*) y magnéticamente duro (*b*).

Tabla XVII

Propiedades de los típicos materiales magnéticamente blandos

Sustancia	$\mu_{máx}$	$4\pi I_I$ en gaussios	H_c en oerstedios
Hierro (puro)	5 000	21 500	1,0
Acero al silicio	10 000	20 000	0,2
Permaleación (Permalloy)	100 000	16 000	0,05
Supermaloación (Supermalloy) . .	900 000	8 000	0,004

En la tabla XVII se dan los valores numéricos de la permeabilidad magnética máxima $\mu_{máx}$, imanación máxima P_I y fuerza coercitiva H_c para varios materiales típicos magnéticamente blandos; pero los valores numéricos de la imanación máxima P_I se dan multiplicados por 4π, ya que según la fórmula (7) del § 202, la induc-

ción magnética B (que es la magnitud medida directamente) se relaciona con P mediante la ecuación $\mathbf{B}=\mathbf{H}_0+4\pi\mathbf{P}$.

En la tabla XVIII se dan los valores numéricos de $4\pi P_I$, donde P_I es la imanación máxima, los de $4\pi P_R$, donde P_R es la imanación remanente, y los de la fuerza coercitiva H_c de algunos materiales típicos magnéticamente duros.

Tabla XVIII

Propiedades de materiales típicos magnéticamente duros

Sustancia	$4\pi P_R$ en gaussios	$4\pi P_I$ en gaussios	H_c en oerstedios
Acero al carbono	10 000	20 000	42
Acero al tungsteno	10 500	16 500	65
Acero al cobalto	9 000	16 300	250
"Magnico"	12 500	14 000	575

El proceso de magnetización de los cuerpos ferromagnéticos va acompañado de una variación de sus dimensiones lineales y del volumen. Este fenómeno se denomina *estricción magnética* (*magnetostricción*). La magnitud y signo de este efecto dependen de la excitación magnética y del ángulo entre la dirección del campo y el eje cristalino (en el caso de los cuerpos monocristalinos). El alargamiento es insignificante y en general es de unas cienmilésimas de la longitud primitiva.

§ 204. Naturaleza del ferromagnetismo. El ferromagnetismo está relacionado de una manera específica con la fase sólida de la sustancia. Los átomos libres de los elementos ferromagnéticos no poseen ninguna clase de propiedades especiales magnéticas. De la tabla XV se ve que los momentos magnéticos de los átomos del hierro y del cromo son iguales, sin embargo el hierro es la sustancia típica ferromagnética, mientras que el cromo es un paramagnético corriente. Hay aleaciones ferromagnéticas formadas de sustancias no ferromagnéticas.

Los paramagnéticos, en todos los campos magnéticos que se pueden crear, no llegan a alcanzar ni mucho menos el estado de saturación. Esto significa que incluso en los campos de mayor excitación, la orientación de las moléculas no es completa. Y viceversa, los ferromagnéticos, alcanzan con relativa facilidad el estado de saturación.

Para cualquier sustancia ferromagnética hay una temperatura $T=\theta$ a la cual desaparecen sus propiedades magnéticas. Esta temperatura θ se denomina temperatura o punto de Curie (en honor

www.elsolucionario.org

al físico francés P. Curie, que descubrió su existencia). A temperaturas superiores al punto de Curie, los cuerpos ferromagnéticos se comportan como los paramagnéticos corrientes. La susceptibilidad magnética $\varkappa$ de los paramagnéticos corrientes varía con la temperatura según la ecuación:

$$\varkappa = \frac{C}{T},$$

donde C es una constante para el material dado (*constante de Curie*), y la de los cuerpos ferromagnéticos a temperaturas superiores al punto de Curie:

$$\varkappa = \frac{C}{T - \theta}.$$

Para el hierro y el níquel puros, los puntos de Curie se hallan respectivamente a las temperaturas de 768 y 365°C. Estas temperaturas son mucho menores que las temperaturas de fusión de estas sustancias (para el hierro la temperatura de fusión es de 1530° C). En el punto de Curie se observan además de la desaparición de la magnetización de los cuerpos, ciertas anomalías en una serie de otras propiedades, por ejemplo, en la capacidad calorífica, en la conductibilidad eléctrica, etc., y también desaparece la extricción magnética. La teoría más elemental del ferromagnetismo que señala la existencia de los puntos de Curie, fue elaborada por Weis.

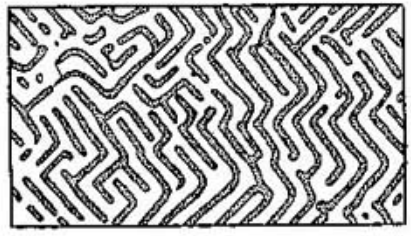


Fig. 224. Dominios de magnetización.

El primer intento de explicar las propiedades ferromagnéticas de los cuerpos lo hizo en 1892 el físico ruso B. Rozing, el cual supuso la existencia de "campos magnéticos moleculares" complementarios en el interior de los cuerpos ferromagnéticos. Estos campos complementarios surgen en las pequeñas zonas espontáneamente magnetizadas del cuerpo ferromagnético. Si no hay campo exterior, los vectores de imanación de estas zonas por separado están orientados arbitrariamente y se compensan mutuamente. En cuanto aparece un campo exterior, los vectores giran de manera que se

refuercen mutuamente creando un campo complementario. Ulteriormente (en 1907), Weis desarrolló esta hipótesis. Según los conceptos contemporáneos, en los cuerpos ferromagnéticos hay unas pequeñas regiones (dominios) de espontánea magnetización hasta la saturación. Si no hay campo magnético exterior, estos dominios de magnetización espontánea están orientados desordenadamente, con lo cual el cuerpo, como término medio, no está magnetizado. El campo exterior no orienta a las distintas moléculas, sino a los dominios de magnetización espontánea y de esta manera puede causar una intensa magnetización del cuerpo ferromagnético, incluso hasta la saturación. N. Akúlov y M. Diejtiar, con ayuda de polvo magnético esparcido sobre una superficie pulida observaron la formación de figuras que revelaban los límites entre los dominios de magnetización espontánea de un cuerpo ferromagnético desimantado (fig. 224).

La existencia de dominios de magnetización espontánea la demuestra también el carácter a saltos de la curva de magnetización en los campos débiles. Si se aumenta lentamente el campo exterior, la magnetización del ferromagnético en la zona de empinada pendiente de la curva de imanación aumenta a saltos (fig. 225). Esto es debido al repentino cambio de la orientación de la imanación de los distintos dominios.

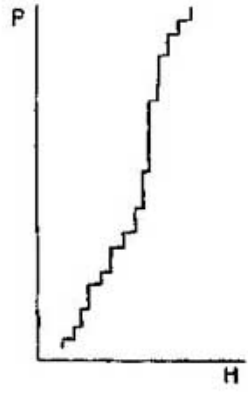


Fig. 225. Aumento a saltos de la magnetización de un ferromagnético.

Desde el punto de vista de la existencia de dominios de magnetización espontánea, el fenómeno de histéresis se puede explicar en términos generales por cierto "frotamiento" que impide variar la orientación de algunos dominios. Al cesar la acción del campo magnetizador, gracias a este frotamiento se conserva cierta orientación de los dominios. La fuerza coercitiva impide que se efectúe una orientación completamente desordenada. Para vencer esta fuerza hay que aplicar un campo magnético de sentido contrario, con lo cual se desimanta la sustancia.

Este punto de vista lo confirma el hecho de que las sacudidas facilitan la desimantación. La magnetización remanente, como se ha indicado, también desaparece al calentar el cuerpo (en el punto de Curie).

La existencia del "frotamiento" que obstaculiza el cambio de la orientación en los dominios, conduce a la dependencia entre las propiedades magnéticas de los cuerpos ferromagnéticos en un campo magnético alterno y la frecuencia. V. Arkádiev y un grupo de sus

colaboradores estudiaron minuciosamente esta dependencia hasta las frecuencias correspondientes a las ondas electromagnéticas cortas. A frecuencias de 10^{10} Hz y mayores, μ deja de depender de la frecuencia y adquiere el valor de la unidad.

La naturaleza del ferromagnetismo fundamentalmente se ha explicado a raíz del desarrollo de la física atómica. En 1927, Y. Dorfman en sus experimentos sobre la desviación de electrones a gran velocidad (partículas β) en los cuerpos ferromagnéticos demostró que las fuerzas que originan la magnetización espontánea, no pueden ser las fuerzas de la acción magnética recíproca originada por el movimiento de los electrones en el interior de los átomos. En 1928, Y. Frénkell fue el primero en indicar que la magnetización espontánea puede ser debida a las llamadas "fuerzas de intercambio" que se estudian en la mecánica cuántica. A determinadas condiciones, estas fuerzas tienden a orientar paralelamente los propios momentos magnéticos de los electrones, lo cual conduce al surgimiento de dominios de magnetización espontánea. Heisenberg desarrolló minuciosamente esta idea.

De esta manera se aclaró que los fenómenos ferromagnéticos pueden comprenderse solamente basándose en la mecánica cuántica y teniendo en cuenta los propios momentos magnéticos de los electrones.

Resulta que las propiedades ferromagnéticas están estrechamente ligadas con la estructura cristalina de la sustancia. Las curvas de magnetización (ciclos de histéresis) de los materiales reales dependen de la estructura policristalina y varían bajo la acción de agentes exteriores (por ejemplo, en el tratamiento térmico, en la tracción, etc.). El propio fenómeno de la histéresis es de naturaleza compleja y parcialmente está relacionado con el desplazamiento de los límites ("paredes") entre los distintos dominios.

En la técnica contemporánea tienen gran importancia las sustancias magnéticas denominadas *ferritos*, que son compuestos químicos del tipo $MeO \cdot Fe_2O_3$, donde Me es uno, o dos, de los siguientes metales: Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn o Cd, por ejemplo, $CuO \cdot Fe_2O_3$, o $NiOZnO \cdot Fe_2O_3$, etc. Los ferritos son ferromagnéticos magnéticamente blandos. Al mismo tiempo, por sus propiedades eléctricas son semiconductores de gran resistencia óhmica, del orden de 10^2—10^8 $\Omega \cdot$cm. Esta última propiedad es importante en la aplicación de los ferritos en la electrotecnia, ya que en ellos no se crean corrientes parásitas (o de Foucault, véase el § 231). De ferritos se fabrican los núcleos de los transformadores, de las bobinas inductoras, etc.

Una especie particular de las sustancias magnéticas son los cuerpos denominados antiferromagnéticos. Los cuerpos antiferromagnéticos, a una temperatura T superior a determinada tempera-

www.elsolucionario.org

tura θ para el ferromagnético dado, se transforman en paramagnéticos corrientes y la susceptibilidad magnética × disminuye con la temperatura tendiendo a cero cuando T→0 (fig. 226). La temperatura θ se halla en la zona de bajas temperaturas (del orden de 20—30° K e inferiores). Ejemplo de cuerpo antiferromagnético pueden ser las sales $CoCl_2$, $CrCl_3$, Cr_2O_3, etc.

La explicación teórica de las propiedades de los cuerpos antiferromagnéticos se puede hallar solamente basándose en los postulados de la mecánica cuántica.

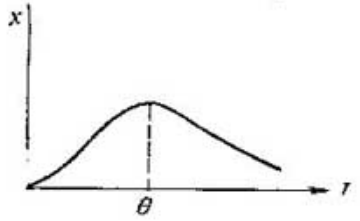


Fig. 226. Dependencia entre el coeficiente de susceptibilidad magnética × y la temperatura en los cuerpos antiferromagnéticos.

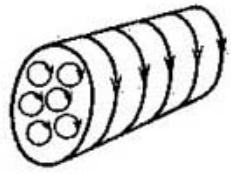


Fig. 227. Corrientes moleculares (de Ampere) en un imán permanente.

§ 205. Imanes permanentes. La posibilidad de tener magnetismo remanente en las sustancias ferromagnéticas nos permite la creación de *imanes permanentes*, es decir, cuerpos que, sin necesidad de corriente eléctrica producida por fuentes exteriores cualesquiera, crean un campo magnético en el espacio que los rodea.

Los imanes permanentes se hacen de sustancias ferromagnéticas de magnetismo remanente y fuerza coercitiva grande (aceros magnéticamente duros).

El magnetismo remanente de los cuerpos ferromagnéticos es debido a la conservación de la orientación de los dominios de magnetización espontánea. La existencia de los mismos, como se ha indicado en el párrafo anterior, se puede explicar teniendo en cuenta los propios momentos magnéticos de los electrones. Sin embargo, para la descripción cualitativa de las propiedades del magnetismo remanente, se puede examinar solamente el movimiento de los electrones y las corrientes moleculares que se crean como resultado de este movimiento. Consideraremos que el magnetismo remanente es debido a la conservación de la orientación de las corrientes moleculares, con lo cual la corriente molecular total, como término medio, es diferente de cero y crea un campo magnético. En la fig. 227 se representa la sección de un imán circular recto. Razonando de la misma manera que se ha hecho en la pág. 350 podemos consi-

derar que, en el interior del imán, las corrientes moleculares se compensan mutuamente, pero en la superficie se crea una corriente resultante no compensada (corriente superficial). Esta corriente circunda al imán superficialmente, a lo cual se debe *la semejanza del imán recto con el solenoide.*

Las líneas de fuerza de un imán recto y largo se parecen a las exteriores de un solenoide (fig. 228). La diferencia entre un imán y un solenoide consiste solamente en que en el caso del solenoide podemos seguir la marcha de las líneas de fuerza incluso en el interior del mismo solenoide y convencernos de que cada línea forma

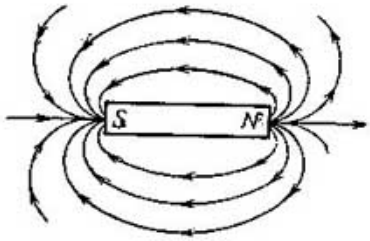


Fig. 228. Líneas de fuerza del campo magnético de un imán recto permanente.

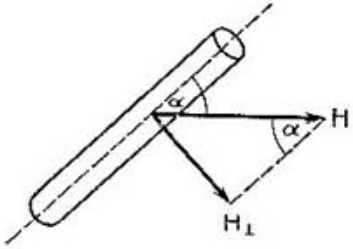


Fig. 229. Componente de la excitación magnética H perpendicular al eje del imán.

una curva cerrada. En el caso del imán permanente no podemos determinar directamente la marcha de las líneas de fuerza en el interior del mismo. Nos parece que las líneas de fuerza salen de un extremo del imán, denominado polo norte, y terminan en el otro extremo (polo sur). Un caso particular del imán recto es el imán en forma de aguja (*aguja magnética*).

El imán recto experimenta una acción orientadora de parte de un campo magnético uniforme. Esta acción tiende a hacer girar al imán de manera que se oriente según las líneas de fuerza del campo de excitación H. Cuando el imán se dispone a lo largo de las líneas de fuerza, el momento de las fuerzas que actúan sobre él es $M=0$ y el imán se halla en equilibrio; el momento M de las fuerzas adquiere el valor máximo cuando el imán está situado perpendicularmente a las líneas de fuerza.

De lo dicho es natural suponer que el momento M se determine solamente mediante la componente de la excitación H que es perpendicular al eje del imán:

$$M = p \cdot H_{\perp},$$

donde p es una magnitud que depende solamente de las propiedades del mismo imán. En la fig. 229 tenemos que $H_{\perp} = H$ sen α, donde

α es el ángulo entre el eje del imán y la dirección del campo; de donde

$$M = pH \operatorname{sen} \alpha. \quad (1)$$

Comparando esta expresión con la del momento M que actúa sobre un solenoide (véase el § 192), vemos su completo parecido. La magnitud p se denomina *momento magnético* del imán.

Resumiendo podemos decir que el momento del par de fuerzas con que actúa un campo magnético exterior sobre un contorno con corriente, sobre un solenoide o sobre una aguja magnética, se expresa por una misma fórmula (1). Un contorno con corriente, un solenoide o una aguja magnética de igual momento magnético p experimentan una misma acción orientadora en el campo magnético dado. En el caso de un contorno con corriente, su momento magnético viene determinado por la intensidad I de la corriente que lo recorre y por el área S. El momento magnético p del imán depende de sus propiedades individuales: de sus dimensiones, y del "grado de magnetización".

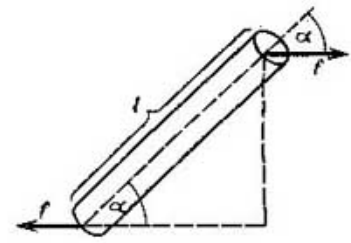


Fig. 230. Representación gráfica para determinar el momento de fuerzas que actúan sobre un imán.

Las fuerzas aplicadas a un imán situado en un campo magnético exterior, actúan sobre todos sus elementos. Si la aguja magnética se rompe por el medio, cada una de las mitades experimentará la acción orientadora en un campo magnético exterior. Sin embargo, en el análisis de una serie de problemas es conveniente localizar estas fuerzas. Esta localización se puede hacer basándonos en las siguientes razones: Sabemos que el momento de un par de fuerzas es igual al producto del valor de una de ellas f por el brazo del par l; además hay que tener en cuenta que, considerando la acción que ejercen, todos los pares de un mismo momento M, es decir, en que el producto fl es igual, son equivalentes. Por eso las fuerzas aplicadas a todos los elementos del imán, teniendo en cuenta su momento total, son completamente equivalentes a dos fuerzas f iguales aplicadas a sus extremos: una dirigida según el campo, y otra, contra el campo (fig. 230), si es que estas fuerzas se han elegido de manera que su momento sea igual al momento de las fuerzas que realmente actúan sobre el imán.

Así pues, formalmente podemos considerar que del lado del campo magnético, sobre el imán actúan dos fuerzas f aplicadas a sus extremos. En la fig. 230 se ve que el brazo del par de fuerzas f es igual a l sen α, donde l es la longitud del imán; de donde el momento será $M = fl$ sen α. Igualando este momento con el de las fuerzas que

www.elsolucionario.org

actúan sobre el imán de parte del campo magnético, según la fórmula (1), obtenemos que

$$fl \operatorname{sen}\alpha = pH \operatorname{sen}\alpha,$$

de donde

$$fl = pH. \tag{2}$$

Ahora podemos establecer cierta analogía entre el momento magnético p del imán y el momento eléctrico del dipolo p_q. Esta analogía es debida a que un imán recto y largo crea en un punto bastante alejado del imán, lo mismo que el dipolo, una excitación proporcional a su momento magnético e inversamente proporcional al cubo de la distancia del mismo. No obstante, esta analogía tiene solamente un carácter exterior y formal. Sin embargo, en una serie de casos se utiliza, porque simplifica el cálculo. En el § 124 hemos visto que el momento eléctrico del dipolo es igual al producto de la carga q de uno de los dos cuerpos que forman el dipolo, por la distancia entre los cuerpos:

$$p_q = ql.$$

Formalmente podemos suponer también que el momento p del imán es igual al producto de su longitud l por una carga magnética imaginada m (o, como se dice generalmente, *masa magnética*), aunque en la realidad no hay cargas magnéticas; es decir, podemos suponer que

$$p = ml. \tag{3}$$

Los lugares en que se encuentran estas masas magnéticas imaginarias se ha convenido en denominarlos *polos*. Los polos están situados, en correspondencia con la ecuación (3), en los extremos del imán. De la (3) se deduce que la masa magnética situada en los polos es

$$m = \frac{p}{l} = p_0, \tag{4}$$

donde p_0 es el momento magnético por unidad de longitud del imán.

De las ecuaciones (2) y (3) obtenemos que

$$fl = mHl, \quad \text{de donde} \quad f = mH, \tag{5}$$

es decir, *sobre el polo magnético imaginario del imán actúa una fuerza numéricamente igual al producto de la masa magnética m situada en el polo, por la excitación H del campo magnético exterior*. El extremo del imán recto que gira orientándose hacia el lado del vector de excitación magnética **H** se denomina "polo norte", y el que se orienta en sentido contrario, "polo sur". Si consideramos positiva la masa magnética m situada en el polo norte, y negativa la del polo sur, la igualdad (5) se puede escribir de la siguiente forma vectorial:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{H}. \tag{5a}$$

La introducción de las fuerzas f que actúan sobre las masas magnéticas m en el análisis del fenómeno, simplifica en mucho la explicación de numerosas cuestiones, por ejemplo, la de orientación y atracción de las agujas magnéticas. Esto explica por qué el concepto de las masas magnéticas se conserva en cierto grado en el estudio del magnetismo, aunque en realidad no hay masas magnéticas. En un campo magnético uniforme, las fuerzas f tienden a orientar la aguja según el campo. Si la aguja se coloca de manera que su eje coincida con la dirección de las líneas magnéticas, el momento del par que actúa sobre la aguja será igual a cero: la aguja se halla

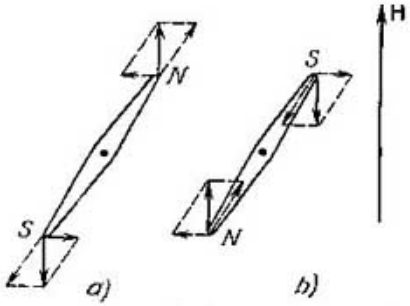


Fig. 231. Pares de fuerzas que actúan sobre la aguja magnética en un campo magnético exterior.

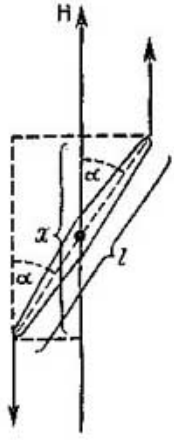


Fig. 232. Acción de las fuerzas sobre la aguja magnética en un campo magnético variable.

en equilibrio. Sin embargo este equilibrio será estable solamente si la dirección de sur a norte coincide con la de las líneas magnéticas. Efectivamente, en este caso, si la aguja se desvía de la posición de equilibrio, las fuerzas del par que se crean con ello, tienden a devolver la aguja a la posición inicial (fig. 231, *a*). Y viceversa, si la aguja está situada paralelamente al campo de manera que la dirección de sur a norte sea contraria a la del campo, al desviarse de esta posición surgirán fuerzas que contribuirán a una mayor declinación (fig. 231, *b*).

En un campo magnético uniforme, como hemos visto, sobre la aguja magnética (lo mismo que sobre un solenoide o un contorno con corriente) actúa solamente un par de fuerzas. La aguja magnética tiende solamente a girar orientando su eje según el campo. Pero si el campo magnético es variable, sobre la aguja, además de este par de fuerzas, actuará una fuerza que le comunicará un movimiento de traslación, análogo al movimiento con que una fuerza actúa sobre un cuadro con corriente situado en un campo variable.

Supongamos que la aguja magnética se halla formando un ángulo α con la dirección de la excitación de un campo magnético exterior (fig. 232) y, para simplificar, que la excitación magnética varía en el mismo sentido que la dirección del propio campo. Sea H la excitación magnética en el lugar donde se halla el extremo sur de la aguja; por consiguiente, la excitación en el lugar donde se halla el extremo norte de la aguja será $H' = H + \left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x$, donde la magnitud $\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)$ es el gradiente del campo. Las fuerzas que actúan sobre los polos de la aguja, serán respectivamente:

$$f_S = mH, \quad f_N = mH + m\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x.$$

Sea $f_N > f_S$, entonces sobre la aguja actuará un par de fuerzas de momento $M = f_S l \cdot \operatorname{sen}\alpha = pH \operatorname{sen}\alpha$, donde $p = ml$ es el momento magnético de la aguja, y la fuerza dirigida a lo largo del campo será

$$\Delta f = f_N - f_S = m\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)x.$$

En la fig. 232 se ve que $x = l\cos\alpha$, de donde

$$\Delta f = ml\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)\cos\alpha, \quad \text{o} \quad \Delta f = p\left(\frac{\Delta H}{\Delta x}\right)\cos\alpha. \tag{6}$$

Así tenemos que en un campo magnético variable, sobre la aguja magnética actúa una fuerza proporcional a su momento magnético p, al gradiente del campo $(\Delta H/\Delta x)$ y que, además, depende del coseno del ángulo α.

Es importante señalar que todos los resultados obtenidos de este párrafo hasta ahora son aplicables no sólo a los imanes permanentes situados en el vacío, sino para *los imanes situados en el interior de otro cuerpo magnético*. En este caso, en todas las fórmulas hay que entender que H es *la excitación magnética del cuerpo magnético* en el lugar donde se halla el imán. La explicación de esto se dará en el § 209.

La fuerza que actúa sobre un imán o un solenoide situado en un campo magnético variable, es el origen de la atracción o repulsión de los imanes, lo mismo que de los solenoides. En un campo magnético *uniforme*, el imán (o el solenoide) experimenta solamente una acción orientadora. Si se colocan dos imanes (o solenoides) uno cerca del otro, cada uno de ellos se hallará en el campo variable del otro y, por consiguiente, además de un par de fuerzas, actuará sobre ellos la fuerza de atracción o de repulsión, según el sentido en que aumente el campo.

www.elsolucionario.org

De la misma manera se explica la atracción de los pedazos de hierro por el imán (o por el solenoide). Estos pedazos primeramente se magnetizan en el campo y después adquieren el movimiento de traslación debido a la variación del campo magnético cerca del imán (o del solenoide).

§ 206. Líneas del vector de inducción magnética. Circulación del vector de inducción magnética y del vector de excitación magnética. Condiciones límites. Análogamente a como hemos introducido en el vacío el concepto de líneas de fuerza del campo magnético, introducimos en el caso general el concepto de líneas de fuerza de la inducción magnética. Por *línea de inducción magnética* se sobrentiende la línea en que la tangente a cada uno de sus puntos coincide con la dirección del vector de inducción **B** en el punto dado. El sentido de la línea en cada punto coincide con el del vector **B** en este mismo punto.

A través de la unidad de superficie normal al vector de inducción trazaremos una cantidad de líneas de inducción igual numéricamente al valor de la inducción magnética dentro de los límites de la superficie dada. El número total de líneas que atraviesan una superficie elemental ΔS_0 normal a ellas, determinará *el flujo elemental* $\Delta\Phi$ *de inducción magnética* a través de esta superficie:

$$\Delta\Phi = B\Delta S_0. \tag{1}$$

En el caso en que la superficie elemental ΔS esté orientada arbitrariamente, el flujo de inducción magnética $\Delta\Phi$ que la atraviesa se determina por la ecuación:

$$\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha = B_n\Delta S, \tag{2}$$

donde α es el ángulo entre la dirección del vector de inducción **B** y la normal **n** a la superficie ΔS, y B_n es la componente de **B** normal a ΔS.

El flujo de inducción magnética elemental $\Delta\Phi$ a través de la superficie ΔS, como indica la ecuación (2), puede ser una magnitud positiva o negativa, según sea agudo u obtuso el ángulo α que forman las líneas de inducción **B** con el sentido elegido de la normal **n**. El flujo de inducción magnética total Φ que atraviesa una superficie finita será la suma algebraica de los flujos elementales a través de todos los elementos de superficie, es decir, será

$$\Phi = \sum\Delta\Phi = \sum B_n\Delta S. \tag{3}$$

Si la superficie es cerrada, el sentido positivo de la normal a la superficie se considerará el de la exterior que sale del volumen limitado por la superficie; por consiguiente, las líneas que salgan del volumen crearán un flujo positivo y las que entren, negativo.

La experiencia demuestra que *las líneas de inducción magnética* siempre son cerradas; por consiguiente, para cualquier superficie cerrada, el número total de líneas que entran y salen, es igual a cero, de donde el flujo de inducción magnética total de cualquier superficie cerrada es igual a cero:

$$\Phi = 0. \tag{4}$$

Este teorema es análogo al de Ostrogradski — Gauss de electrostática cuando en el interior del volumen no hay cargas (véase el § 126), y corresponde al hecho de que no existen ningunas cargas magnéticas reales.

En el § 192 se ha demostrado que en el vacío, en el interior de un campo magnético, siempre se cumple la condición de que div $\mathbf{H}=0$. Si hay cuerpos magnéticos, el flujo del vector de la inducción magnética $\mathbf{B}$ a través de una superficie cerrada es igual a cero:

$$\int_S B_n dS = 0,$$

de donde se deduce que en el caso general (si hay cuerpos magnéticos), el campo magnético siempre satisface la condición:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{4a}$$

Las unidades en que se mide el flujo de inducción magnética dependen de la elección de unidades de la inducción y del área de la superficie. Si se utiliza el sistema *CGSM*, es decir, midiendo la inducción en gausios y el área en centímetros cuadrados, el flujo será en unidades denominadas *maxwelios*; así, la unidad *CGSM* de flujo de inducción magnética es igual al flujo a través de 1 cm² de superficie perpendicular a las líneas de inducción en un campo magnético uniforme de inducción igual a 1 gausio. La unidad del flujo magnético en el Sistema Internacional de unidades se da en el § 223.

Veamos la circulación del vector **B**. En el § 198 se ha demostrado que la circulación del vector de excitación magnética según un contorno cerrado cualquiera es igual a $4\pi I$, donde I es la intensidad de la corriente que abarca el contorno. En un cuerpo magnético, la excitación magnética total creada tanto por las corrientes macroscópicas, como microscópicas, es el vector **B**. Por consiguiente, la circulación del vector **B** según el contorno será $4\pi(I+I_M)$, donde I e I_M son las intensidades de las corrientes macroscópicas y moleculares respectivamente que abarca el contorno:

$$\sum B_l \Delta l = 4\pi (I + I_M). \tag{5}$$

Calculemos la corriente molecular I_M. Está claro que la corriente no compensada que fluye por el interior del contorno, la crearán

las moléculas cuyas corrientes moleculares son atravesadas por las líneas del contorno. Veamos qué corriente no compensada crean las corrientes moleculares que el elemento Δl del contorno atraviesa. Supongamos que las corrientes moleculares son corrientes circulares de intensidad i y de superficie, encerrada en el interior de la corriente circular, igual a S. A esta corriente molecular le corresponde un momento magnético p_m de valor igual a iS. La dirección del momento magnético p_m forma un ángulo α con el elemento Δl del

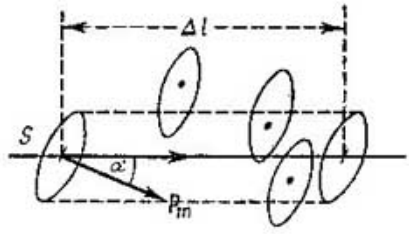


Fig. 233. Representación gráfica para calcular la cantidad de corrientes moleculares.

contorno (fig. 233). Está claro que Δl cortará solamente las corrientes moleculares cuyos centros caigan en el interior del cilindro de base S y de generatriz Δl. Si n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen, en el interior de un cilindro de éstos habrá $n_0 S \Delta l \cos \alpha$ centros de corrientes moleculares. Estas corrientes moleculares formarán una corriente no compensada, abarcada por el elemento Δl del contorno. La intensidad de la corriente no compensada en el elemento Δl es:

$$in_0 S \Delta l \cos \alpha. \tag{6}$$

La intensidad de la corriente molecular I_M abarcada por todo el contorno se obtiene sumando la expresión (6) según toda la longitud del contorno:

$$I_M = \sum in_0 S \cos \alpha \Delta l. \tag{7}$$

Pero, según lo indicado, iS es el valor del momento p_m de la corriente molecular; por consiguiente, $in_0 S$ será el momento de la unidad de volumen, es decir, el vector de imanación $\mathbf{P}_m$. Así tenemos que, según la (7):

$$I_M = \sum \mathbf{P}_m \Delta l \cos \alpha = \sum (\mathbf{P}_m)_l \Delta l,$$

donde $(\mathbf{P}_m)_l$ es la proyección del vector de imanación sobre el elemento Δl. Colocando este valor obtenido de I_M en la ecuación (5) de la circulación del vector $\mathbf{B}$, obtenemos que:

$$\sum B_l \Delta l = 4\pi [I + \sum (\mathbf{P}_m)_l \Delta l].$$

www.elsolucionario.org

Pasemos a la izquierda los miembros que contienen la proyección del vector de imanación, de donde:

$$\sum [B_l - 4\pi (\mathbf{P}_m)_l] \Delta l = 4\pi I.$$

Como se ha indicado más arriba, $\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{P}_m$ es el vector de excitación magnética:

$$\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{P}_m = \mathbf{H}.$$

Por consiguiente obtenemos que la expresión de la circulación del vector de excitación magnética es

$$\sum H_l \Delta l = 4\pi I.$$

De esta manera tenemos que la circulación del vector de excitación magnética, incluso cuando hay un cuerpo magnético es igual al producto de 4π por la intensidad de la corriente *macroscópica* que abarca el contorno. La magnitud de la corriente molecular no entra en la ecuación de la circulación del vector de excitación magnética.

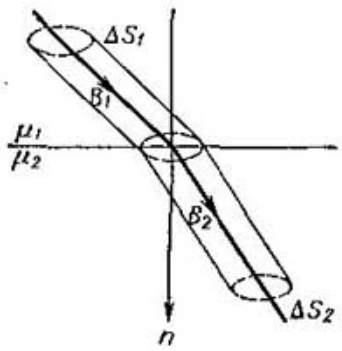


Fig. 234. Flujo del vector de inducción a través de las superficies elementales ΔS_1 y ΔS_2.

Veamos el comportamiento de las líneas de inducción en la superficie límite de dos sustancias de diferente permeabilidad magnética. Supongamos que tenemos una superficie divisoria de sustancias, cuyas permeabilidades magnéticas sean μ_1 y μ_2. Si tomamos un pequeño sector ΔS de la superficie divisoria, este sector se puede considerar plano, y el campo en sus proximidades, de uno y otro lado, uniforme. El valor del vector de inducción en la sustancia de permeabilidad magnética μ_1 lo llamaremos $\mathbf{B}_1$, y en la sustancia de permeabilidad magnética μ_2, $\mathbf{B}_2$. Junto a la superficie divisoria, el vector de inducción B se puede descomponer en dos: uno $\mathbf{B}_n$ perpendicular a la superficie límite, y otro $\mathbf{B}_t$, paralelo a la superficie. Entonces,

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_{1n} + \mathbf{B}_{1t}, \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_{2n} + \mathbf{B}_{2t}.$$

Establezcamos primeramente la relación entre las componentes normales de los vectores de inducción magnética de ambos lados de la superficie divisoria. Para ello veamos el flujo de inducción magnético que atraviesa la superficie cerrada de forma de cilindros truncados (fig. 234), de bases ΔS_1 y ΔS_2 iguales y paralelas al sector ΔS límite, y de generatrices paralelas a las líneas de inducción

en los lugares en que se halla la parte dada del cilindro. El flujo total a través de la superficie de este cilindro, como a través de cualquier superficie cerrada, es igual a cero, según la (4). Este flujo consta de dos partes: del flujo $\Delta\Phi_1$ que atraviesa la base ΔS_1, y del flujo $\Delta\Phi_2$ que atraviesa la base ΔS_2, ya que el flujo a través de la superficie lateral es igual a cero por ser paralelo a las líneas de inducción. Por consiguiente tenemos que:

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 0. \tag{8}$$

Si el sentido de las líneas de inducción es el indicado en la fig. 234, el flujo $\Delta\Phi_2$ será positivo, y el $\Delta\Phi_1$, negativo. Dirijamos la normal **n** a la superficie divisoria desde la primera sustancia hacia la segunda; entonces, para la base ΔS_2 este sentido será el correspondiente a la normal *exterior*, y para la base ΔS_1 tendrá sentido contrario a la normal exterior, por lo tanto, para los flujos $\Delta\Phi_1$ y $\Delta\Phi_2$ que atraviesan las superficies ΔS_1 y ΔS_2 obtenemos que

$$\Delta\Phi_1 = -B_{1n}\Delta S_1, \quad \Delta\Phi_2 = B_{2n}\Delta S_2.$$

El signo menos de la primera igualdad es debido a que B_{1n} es la proyección de **B** sobre la dirección contraria a la normal exterior al elemento ΔS_1 de superficie. Colocando estos valores de $\Delta\Phi_1$ y $\Delta\Phi_2$ en la expresión (8) y observando que $\Delta S_1 = \Delta S_2$, tenemos que

$$-B_{1n} + B_{2n} = 0,$$

de donde

$$B_{1n} = B_{2n}. \tag{9}$$

Así tenemos que *la componente normal del vector de inducción magnética no varía al pasar de una sustancia a otra.*

Para aclarar la correlación existente entre las componentes tangenciales de los vectores $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ volvamos a la expresión de la circulación del vector **H**. Sea el contorno cerrado *abcd* (fig. 235), según el cual se toma la circulación, de lados *ad* y *bc* paralelos a la superficie divisoria de las sustancias, y *ab* y *dc* infinitamente pequeños. Como en la línea divisoria de las sustancias se supone que no hay corrientes, la circulación **H** según este contorno será igual a cero. Por otra parte, esta circulación puede expresarse por el vector **H** en ambos medios.

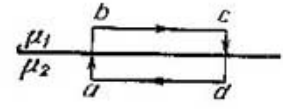


Fig. 235. Contorno de recorrido en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos.

Recorramos el contorno *abcda* según las agujas del reloj y elijamos positiva la dirección de la tangente a la superficie divisoria que va de izquierda a derecha (fig. 235). Como los sectores *ab* y *dc* se suponen infinitamente pequeños, toda la circulación vendrá expresada

en función de las magnitudes que se refieran a los sectores *bc* y *da*. Llamando $\mathbf{H}_1$ y $\mathbf{H}_2$ a la excitación respectiva de ambas sustancias, tenemos que:

$$H_{1t}bc - H_{2t}da = 0.$$

El signo menos del segundo término es debido a que en el medio de la sustancia inferior, el sentido elegido del recorrido es contrario al sentido positivo de la tangente. Como $bc=da$, reduciendo tenemos que

$$H_{1t} = H_{2t}, \tag{10}$$

es decir, *la componente tangente del vector de excitación no varía cuando se pasa a través de la superficie divisoria de dos sustancias.* Pasando a examinar el vector de inducción magnética, basándonos en la ecuación $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, tenemos que

$$H_{1t} = \frac{B_{1t}}{\mu_1}, \quad H_{2t} = \frac{B_{2t}}{\mu_2},$$

En estas ecuaciones B_{1t} y B_{2t} son las proyecciones de los vectores $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ sobre la tangente a la superficie divisoria. Colocando estos valores de H_{1t} y H_{2t} en la (9), obtenemos que

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{11}$$

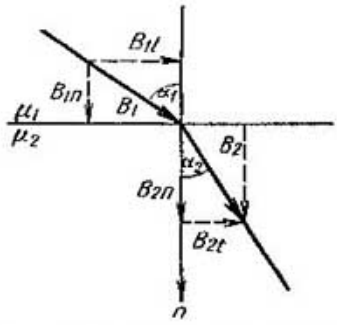


Fig. 236. Refracción de las líneas de inducción magnética B en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos.

Así tenemos que *la componente tangente del vector de inducción magnética* **B** *de ambos lados de la superficie divisoria de las dos sustancias está en razón directa con las permeabilidades magnéticas* μ *de estas sustancias.*

Las relaciones (9) y (11) determinan la variación del vector de inducción magnética **B** al pasar a través de la superficie divisoria. Es fácil ver que cuando la superficie divisoria no es perpendicular a las líneas de inducción, éstas sufren una refracción. Descomponiendo cada uno de los vectores $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ en dos, uno paralelo a la superficie divisoria y otro perpendicular a la misma (fig. 236), tenemos que

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\dfrac{B_{1t}}{B_{1n}}}{\dfrac{B_{2t}}{B_{2n}}}$$

www.elsolucionario.org

de donde utilizando las relaciones (9) y (11), hallamos que

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad (12)$$

es decir, las tangentes de los ángulos formados por los vectores de inducción con las normales a las dos sustancias están en razón directa con las permeabilidades magnéticas de estas sustancias. Al pasar de una sustancia de permeabilidad magnética μ menor a otra sustancia de permeabilidad magnética mayor, las líneas de inducción se inclinan desviándose de la perpendicular y se hacen más densas, es decir, la cantidad de líneas correspondiente a la unidad de superficie normal a ellas es mayor. Si las líneas de inducción en una sustancia son perpendiculares a la superficie divisoria, estas líneas pasarán a la otra sustancia sin refractarse; en este caso y debido a que $B_{1t}=0$ y $B_{2t}=0$, los vectores de inducción serán iguales a sus componentes normales:

$$B_1=B_{1n}, \quad B_2=B_{2n},$$

y de la condición expresada por la (9) obtenemos que

$$B_1=B_2,$$

es decir, el vector de inducción en este caso no varía al atravesar la superficie divisoria de las dos sustancias. En el § 203 ya hemos utilizado esta relación.

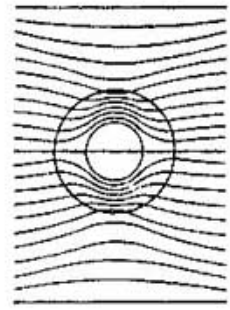


Fig. 237. Disposición de las líneas de inducción magnética en un cuerpo con cavidad interna.

En la ley de refracción de las líneas de inducción se basa la llamada *pantalla magnética*. La pantalla magnética se debe a que gracias a la refracción de las líneas de inducción, en la cavidad interna de la sustancia de mayor valor de permeabilidad magnética, el campo magnético es casi igual a cero. En la fig. 237 se representa un ejemplo de disposición de las líneas de inducción de un cuerpo de gran permeabilidad magnética con cavidad interna. Las pocas líneas de inducción en el interior de la cavidad indican lo débil que es el campo en ella. Prácticamente, como pantallas magnéticas se utilizan macizas envolturas de hierro.

§ 207. Analogía entre los campos magnético y electrostático. Históricamente, la ciencia del magnetismo surgió como estudio de los imanes permanentes. Según la tradición, los pastores del Asia Menor de los alrededores de la ciudad de Magnesia observaron que los trozos de piedra imán magnetita que se hallaban allí, se atraían mutuamente. Del nombre de esta ciudad surgieron las palabras

magnetita y derivadas. Los trozos de magnetita (Fe_3O_4) poseen un notable magnetismo remanente, por lo tanto son imanes naturales permanentes.

A finales del siglo XVIII Coulomb, al establecer la ley de acción recíproca entre cargas eléctricas puntuales, intentó hallar una ley análoga para la acción recíproca de los imanes. Efectivamente, descubrió que si se toman dos imanes delgados y largos, la fuerza de atracción recíproca entre los polos, en el caso de que la distancia entre ellos sea pequeña en comparación con la longitud de los imanes y grande en comparación con la sección transversal, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Coulomb introdujo el concepto de "cantidad de magnetismo", gracias a lo cual el ulterior estudio del campo magnético se basaba en la analogía con el campo electrostático. Esta analogía se ha reflejado en el parecido de las denominaciones de las magnitudes que caracterizan los campos electrostático y magnético: hablamos de la intensidad E del campo electrostático y de la inducción electrostática D; de la excitación magnética H (intensidad del campo magnético) y de la inducción magnética B. No obstante, estas analogías no siempre, ni mucho menos, resultaron justas y en correspondencia con la naturaleza de los campos electrostático y magnético.

Hemos visto que entre los fenómenos electrostáticos y magnéticos hay una profunda diferencia. Hay cargas eléctricas; las líneas de fuerza del campo electrostático empiezan en unas cargas y terminan en otras o se pierden en el infinito. Sin embargo, el campo magnético surge alrededor de las corrientes eléctricas, las líneas del campo magnético circundan a las corrientes eléctricas formando curvas cerradas o se pierden en el infinito, y en la realidad no hay ninguna clase de cargas magnéticas. La analogía se puede hacer solamente entre el campo magnético del solenoide, o de un imán recto permanente (en la región del espacio exterior al solenoide o al imán), y el campo de un dipolo eléctrico.

La ley de la proporcionalidad inversa de las fuerzas respecto al cuadrado de la distancia entre los cuerpos de acción recíproca (ley de Coulomb) corresponde a un campo caracterizado por una distribución radial y uniforme de las líneas de fuerza. Los cuerpos cargados de electricidad, a distancias grandes en comparación con sus dimensiones, presentan una distribución de esta clase de líneas de fuerza (véase la fig. 16); en correspondencia con ello, las fuerzas de acción recíproca entre cuerpos cargados vienen expresadas con mucha exactitud por la ley de Coulomb, si sus dimensiones son pequeñas en comparación con la distancia entre los cuerpos. Pero con ninguna combinación de corrientes o de imanes permanentes se puede crear un campo magnético de líneas de fuerza distribuidas radial y uniformemente. Cerca del polo de un imán largo y delgado,

solamente en una zona limitada (circunscrita por la línea de puntos en la fig. 238), las líneas de fuerza divergen en sentido radial. En correspondencia con ello, como acabamos de indicar, la ley de Coulomb tiene un sentido muy limitado, si se aplica a la acción recíproca de los polos magnéticos.

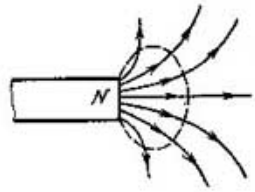


Fig. 238. Líneas de fuerza del campo magnético en las proximidades del extremo de un imán rectilíneo y largo.

En el estudio del campo electrostático se ha sobrentendido que la intensidad **E** del campo en el vacío es una magnitud que determina la fuerza que actúa sobre la carga q:

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E}. \tag{1}$$

En presencia de un dieléctrico, debido a su polarización, se forma un campo complementario $\mathbf{E}'$, de donde:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \tag{2}$$

donde $\mathbf{E}_0$ es la intensidad del campo creada por estas cargas ("libres"). Con el nombre de *inducción electrostática* **D** se ha sobrentendido el vector relacionado con el vector de intensidad del campo **E** en el punto dado por la ecuación:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}. \tag{3}$$

El estado de polarización de un dieléctrico se ha determinado por el vector de polarización:

$$\mathbf{P}_e = \varkappa_e \mathbf{E}.^{*)} \tag{4}$$

La susceptibilidad eléctrica $\varkappa_e$ está relacionada con la constante dieléctrica ε mediante la ecuación $\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa_e$. Basándose en esta ecuación, de las fórmulas (3) y (4) obtenemos que

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_e. \tag{5}$$

En el caso de un dieléctrico homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo, la intensidad del campo comple-

*) Para diferenciar las correspondientes magnitudes eléctricas y magnéticas utilizaremos los subíndices e y m.

www.elsolucionario.org

mentario va dirigida contra $\mathbf{E}_0$ y satisface la igualdad (véase el § 142):

$$\mathbf{E}' = -4\pi\mathbf{P}_e. \tag{6}$$

En este caso, comparando las ecuaciones (2) y (5), tenemos que $\mathbf{D} = \mathbf{E}_0$, es decir, el vector de inducción electrostática $\mathbf{D}$ en un dieléctrico homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo, coincide con la intensidad del campo $\mathbf{E}_0$ de las cargas libres en el vacío. En el caso general, la coincidencia no tiene lugar (a excepción de los casos de simetría especial; véase la llamada de la pág. 89).

En los fenómenos magnéticos, como se ha visto (véase lo dicho en el § 196), la fuerza que actúa en el vacío sobre un elemento de conductor con corriente es

$$\Delta f = H_0 I \Delta l \operatorname{sen}\alpha, \tag{1a}$$

donde H_0 es la excitación magnética en el vacío. Si hay un cuerpo magnético, la excitación total (denominada inducción magnética B) se compone de la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ creada por las corrientes que fluyen por los conductores, y de la excitación complementaria $\mathbf{H}'$ creada por el cuerpo magnético magnetizado:

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}'. \tag{2a}$$

Se entiende por *excitación magnética* $\mathbf{H}$ *en un cuerpo magnético* el vector relacionado con el de inducción magnética $\mathbf{B}$ en el punto dado por la relación:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}. \tag{3a}$$

El estado del cuerpo magnético lo caracteriza el vector de imanación

$$\mathbf{P}_m = \varkappa_m \mathbf{H} = \frac{\varkappa_m}{\mu}\mathbf{B}. \tag{4a}$$

La susceptibilidad magnética $\varkappa_m$ está relacionada con la permeabilidad magnética μ mediante la ecuación: $\mu = 1 + 4\pi\varkappa_m$. Basándonos en esta relación, de las fórmulas (3a) y (4a) obtenemos que

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{P}_m. \tag{5a}$$

En el caso de un cuerpo magnético homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo, la excitación magnética $\mathbf{H}'$ complementaria puede ir *tanto en sentido contrario al de* $\mathbf{H}_0$ (cuerpos diamagnéticos), *como según el sentido de* $\mathbf{H}_0$ (cuerpos paramagnéticos). En ambos casos se verifica la ecuación (véase el § 202):

$$\mathbf{H}' = 4\pi\mathbf{P}_m. \tag{6a}$$

En este caso, comparando las fórmulas (2a) y (5a) obtenemos que $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0$. No obstante, hay que tener en cuenta que *esta coincidencia de la excitación magnética* $\mathbf{H}=1/\mu\mathbf{B}$ *en un cuerpo magnético con la excitación* $\mathbf{H}_0$ *creada en el vacío por las corrientes que fluyen por los conductores, solamente tiene lugar para el cuerpo magnético homogéneo que llena por completo el espacio ocupado por el campo.*

En el caso general de un cuerpo magnético heterogéneo, esta coincidencia no tiene lugar. Efectivamente, es fácil convencerse de que la excitación magnética **H** en un cuerpo magnético heterogéneo no coincide con la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ creada por las corrientes que fluyen por los conductores, y que se determina por la ley de Biot-Savart-Laplace. En el § 206 hemos visto que en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos, la componente normal del vector de inducción magnética **B** satisface la condición [véase la fórmula (6)]:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Utilizando la relación entre **B** y **H** expresada por la fórmula (3a), obtenemos que

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

es decir, hallamos que *en la superficie divisoria de dos cuerpos magnéticos, la componente normal de la excitación magnética* H_n *es discontinua*; en esto se diferencia **H** de la excitación $\mathbf{H}_0$, cuyas líneas de fuerza son continuas en todas partes. En un cuerpo magnético heterogéneo, cuyas propiedades varían continuamente de punto a punto, también se produce una variación de **H** originada por la heterogeneidad del cuerpo magnético.

De la comparación de las fórmulas (2) y (2a) se deduce que (a pesar del nombre que lleva) *la inducción magnética* **B** *es análoga a la intensidad del campo electrostático* **E**. La diferencia consiste en que el campo magnético complementario $\mathbf{H}'$ puede tener sentido inverso respecto a $\mathbf{H}_0$ (cuerpos diamagnéticos), o el mismo sentido que $\mathbf{H}_0$ (cuerpos paramagnéticos); de donde la inducción magnética **B** puede ser menor o mayor que $\mathbf{H}_0$.

La excitación magnética **H** *en un cuerpo magnético es análoga a la inducción electrostática* **D**, como se deduce al comparar las fórmulas (3), (5) y (3a) y (5a). De la comparación de estas mismas fórmulas se deduce que la magnitud inversa de la permeabilidad magnética $1/\mu$ es análoga a la constante dieléctrica ε. La comparación de las fórmulas (4) y (4a) demuestra que la magnitud $\varkappa_m/\mu$ es análoga a $\varkappa_e$. Hemos visto también que el vector de la inducción electrostática **D** coincide con el vector de la intensidad del campo electrostático $\mathbf{E}_0$ de las cargas libres solamente en el caso de un

dieléctrico homogéneo que llene por completo el espacio ocupado por el campo; en el caso general, el vector **D** se diferencia del $\mathbf{E}_0$; por consiguiente, también en este caso el vector **D** es análogo al **H**.

Los dieléctricos se parecen a las sustancias diamagnéticas. Para la inmensa mayoría de las sustancias, la constante dieléctrica ε no depende de **E**; por lo tanto, en electrostática la mayoría de los cuerpos no revelan el fenómeno de histéresis ni poseen polarización electrostática remanente. Una excepción de ello son la sal de Seignette y algunas sales de titanio (véase el § 146), que revelan poseer histéresis y electrización remanente, y a este respecto son análogas a las sustancias ferromagnéticas.

§ 208. Determinación de los vectores H y B en función de las fuerzas que actúan sobre un cuadro recorrido por una corriente. En el § 200 hemos señalado las dificultades en determinar el vector **B** en función de las fuerzas que actúan sobre un conductor situado en el interior de un cuerpo magnético. En un cuerpo magnético sólido hay que hacer una cavidad y, colocando en su interior un cuadro recorrido por una corriente, se puede determinar la excitación magnética en la cavidad. La magnitud de esta excitación, siendo iguales las demás condiciones, depende de las dimensiones y de la forma de la cavidad.

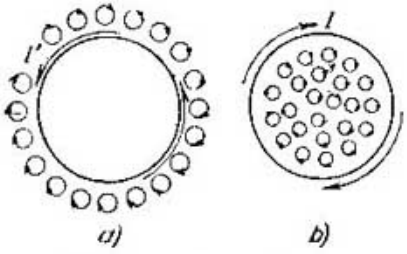


Fig. 239. Suma de corrientes moleculares en la superficie de la cavidad.

Demostremos que se pueden elegir una forma y dimensiones de la cavidad en que el valor de la excitación medida en ella, coincida bien con el valor de **H**, bien con el de **B** para los puntos *del interior* del cuerpo magnético. Las partes del cuerpo magnético exteriores a esta cavidad crearán, en el interior de la misma una excitación magnética complementaria $\mathbf{H}''$, debido a lo cual la acción sobre el cuadro se determina por la excitación magnética en el interior de la cavidad $\mathbf{H}_{cav}$, que es

$$\mathbf{H}_{cav} = \mathbf{B} + \mathbf{H}''. \qquad (1)$$

El calor de $\mathbf{H}''$ dependerá de las dimensiones y forma de la cavidad.

Sea en el interior del cuerpo magnético una larga cavidad cilíndrica de pequeño diámetro y de eje paralelo al vector **B**. Consideraremos que la magnetización del cuerpo magnético es debida a que las corrientes moleculares tienen la misma orientación. Entonces, en la superficie límite de la cavidad (fig. 239, *a*) se crea una corriente no compensada I'; si las corrientes elementales van diri-

www.elsolucionario.org

gidas según las agujas del reloj, la corriente I' irá contra las agujas del reloj. Está claro que esta corriente I' es de igual magnitud y de signo contrario a la corriente I (fig. 239, *b*) creada como resultado de la suma de las corrientes elementales en la superficie del trozo del cuerpo magnético, que coincide en dimensiones y forma con las de la cavidad. En la pág. 351 se ha indicado que esta corriente I crea en el interior del trozo del cuerpo magnético que circunda, una excitación:

$$H' = 4\pi I = 4\pi P_m,$$

donde P_m es el valor numérico del vector de imanación. (Estrictamente hablando esta fórmula es justa solamente para el caso de un cilindro infinitamente largo. Para un cilindro de longitud finita se cumple en lo que se refiere a la parte media, y la exactitud será mayor, cuanto menor sea el radio del cilindro, sobre todo si es muy pequeño en comparación con su longitud). Como la corriente I' va en sentido contrario a la I, en el interior de la cavidad se creará una excitación:

$$H'' = -H' = -4\pi P_m.$$

De esto y de la (1), hallamos que la excitación en el interior de la cavidad de la forma dada será

$$H_{cav} = B + H'' = B - 4\pi P_m,$$

o, según la (5a) del § 207,

$$H_{cav} = H.$$

Por consiguiente nos da que la excitación en la parte media de la cavidad en forma de cilindro largo, de pequeño diámetro y de eje paralelo al vector **B**, coincide con la excitación magnética **H**, en el interior del cuerpo magnético, determinada por la ecuación (3a) del § 207.

Si en el interior de una cavidad de éstas se coloca un cuadro, el momento de fuerzas que actúa sobre él permite medir el valor de **H**.

Si la cavidad se hace en forma de un cilindro corto y ancho de bases perpendiculares a la dirección del vector **B**, la corriente I' crea en la parte media de esta cavidad un campo extremadamente débil: $H'' \cong 0$; por consiguiente, en el interior de una cavidad de éstas:

$$H_{cav} = B.$$

Así tenemos que en la parte media de una cavidad en forma de cilindro corto y ancho y de eje paralelo al vector **B**, la excitación magnética coincide con el valor del vector de inducción magnética **B** en el cuerpo magnético.

En el § 145 hemos visto que la intensidad del campo electrostático en la parte media de una cavidad hecha en un dieléctrico en forma de cilindro largo y estrecho y de generatriz paralela a las líneas de fuerza del campo, coincide con la intensidad **E** del campo en el dieléctrico. Si la cavidad del dieléctrico tiene la forma de un cilindro corto de bases perpendiculares a las líneas de fuerza, la intensidad del campo en la parte media de una cavidad de esta clase coincide con el valor del vector de inducción electrostática **D** del dieléctrico. De lo dicho se podría suponer, en contra de la analogía señalada antes, que el vector **H** es análogo al **E** y el vector **B** es análogo al **D**; pero esto no es así. En el caso del dieléctrico, la excitación magnética en el interior de un cilindro largo y estrecho coincide con **E**, ya que las cargas superficiales complementarias σ' que aparecen en las superficies de la cavidad, *no influyen sensiblemente sobre los puntos interiores de la cavidad*. Sin embargo, en el caso de un cuerpo magnético, *las corrientes complementarias I' que surgen en las superficies de la cavidad, no influyen sensiblemente, si la cavidad tiene la forma de cilindro corto y ancho*. En este caso, la intensidad del campo en la cavidad coincide con el vector **B**. De esta manera resulta de nuevo que **E** y **B** son análogos. También resulta que, en el caso del dieléctrico, las cargas superficiales complementarias desempeñan un papel notable en la cavidad en forma de cilindro corto y ancho, mientras que en el caso en un cuerpo magnético, las corrientes complementarias desempeñan un papel notable en la cavidad en forma de cilindro largo y estrecho. De esto y en correspondencia con lo dicho anteriormente se obtiene que el vector **D** se debe comparar con el **H**.

Por último indiquemos que el concepto del vector de inducción magnética **B** se puede aclarar también de otra manera, a saber, pasando a examinar la estructura microscópica de la sustancia.

En lugar de intentar determinar el vector **B** por la acción que ejerce sobre un conductor macroscópico cualquiera recorrido por una corriente, podemos determinarlo por la fuerza que actúa sobre una corriente elemental originada por el movimiento de una partícula elemental cualquiera cargada. Por ejemplo, podemos considerar el electrón moviéndose según una órbita circular en el átomo. Este electrón en movimiento es equivalente a una corriente circular y experimenta la acción del campo magnético exterior. La excitación magnética determinada con ayuda de esta corriente elemental se compone de la excitación magnética $\mathbf{H}_0$ originada por las corrientes que fluyen por los conductores microscópicos, y de la excitación magnética originada por las moléculas vecinas. Llamemos $\mathbf{H}_{micro}$ a esta excitación total. El valor de $\mathbf{H}_{micro}$ dependerá de la distancia a que coloquemos la corriente elemental de una u otra molécula. Pero como *término medio* de muchos puntos elegidos

arbitrariamente, se obtiene un valor $\mathbf{H}_{micro}$ determinado solamente por los valores de $\mathbf{H}_0$ y el valor medio de la excitación magnética complementaria H′ que hay en el interior del cuerpo magnético como resultado de la ordenación y orientación de sus partículas. Así tenemos que

$$\overline{\mathbf{H}}_{micro} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}',$$

es decir, el valor $\overline{\mathbf{H}}_{micro}$ coincide con el del vector de inducción magnética **B**.

§ 209. Diferencia entre el solenoide y el imán. Las diferencias, según el concepto físico, de los vectores H y B′ indicadas en el párrafo anterior se revelan muy claramente en el caso de acción mutua de solenoides e imanes.

Al situar un solenoide en un cuerpo magnético cualquiera, *el cuerpo magnético llena todo el espacio tanto fuera del solenoide como en el interior del mismo.* Los conductores que forman el solenoide están en el interior del cuerpo magnético. Si el cuerpo magnético es uniforme e infinito, sobre cada elemento del conductor actúa una fuerza de parte del campo magnético exterior que, según la fórmula (2a) del § 200, es

$$\Delta f = IB \operatorname{sen} \alpha \cdot \Delta l;$$

el momento de las fuerzas que actúan sobre todo el solenoide, vendrá determinado por la inducción magnética $B = \mu H$, donde μ es la permeabilidad magnética del medio. Siendo invariables las corrientes, el momento de fuerzas que actúan sobre un solenoide, aumenta μ veces cuando un cuerpo magnético homogéneo e infinito llena el espacio.

Otra cosa ocurre con el imán. El imán es un cuerpo sólido y la parte del espacio que ocupa el propio imán no puede ser ocupada al mismo tiempo por otro cuerpo magnético. En otras palabras, *el imán resulta que siempre está en la cavidad interna de un cuerpo magnético y la función de esta cavidad hay que tenerla en cuenta.*

Sobre el imán actuará el campo que surge en el interior de la cavidad. Sea un imán recto y largo colocado en un campo magnético creado por ciertas corrientes y orientado según las líneas de fuerza del campo. En este caso la cavidad tiene la forma de un cilindro largo y estrecho y de eje paralelo a las líneas de fuerza del campo. Como hemos visto en el § 208, en el interior de esta cavidad, la excitación magnética es igual a H. Por lo tanto, *sobre un imán recto y largo, de parte del campo magnético de la corriente actúa una fuerza determinada por la excitación magnética H.* Por consiguiente, la presencia del cuerpo magnético no varía la fuerza que

www.elsolucionario.org

actúa sobre el imán. En el § 205 se ha indicado que la fuerza que actúa sobre el polo magnético m, es

$$f = mH;$$

ahora vemos que esta fórmula es justa tanto en el vacío como en el caso de que haya un cuerpo magnético, si el imán considerado es recto y largo.

En el vacío, el imán recto y largo y el solenoide son completamente equivalentes, si son iguales sus momentos magnéticos. Pero si hay un cuerpo magnético, se percibe la diferencia entre el imán y el solenoide. Efectivamente, si tenemos dos solenoides y la fuerza de acción recíproca entre ellos en el vacío es igual a f, al llenar el espacio con un cuerpo magnético de permeabilidad magnética μ, la fuerza de acción recíproca entre ellos es ya igual a μf. Si nosotros examinamos la acción recíproca entre un solenoide y un imán recto y largo, la fuerza de acción recíproca entre ellos seguirá siendo la misma al llenar el espacio con un cuerpo magnético. Así tenemos que al sustituir un solenoide por un imán, la fuerza disminuye μ veces. Si sustituimos ambos solenoides por imanes, habrá que tener en cuenta que en el cuerpo magnético hay dos cavidades. Gracias a ello, resulta que la fuerza de acción recíproca entre dos imanes rectos y largos disminuye μ veces. Así tenemos que *si dos imanes rectos y largos actúan recíprocamente en el vacío con una fuerza f, al llenar el espacio con un cuerpo magnético de permeabilidad magnética μ, la fuerza de acción recíproca entre ellos es igual a* $\frac{1}{\mu} f$.

Resumiendo lo dicho arriba tenemos que:

1) la fuerza de acción recíproca entre corrientes es directamente proporcional a μ;

2) la fuerza de acción recíproca entre un imán recto y largo y una corriente no depende de μ;

3) la fuerza de acción recíproca entre dos imanes rectos y largos es inversamente proporcional a μ. Esta dependencia respecto a μ de las fuerzas de acción recíproca de los imanes permanentes, es justa solamente cuando se trate de imanes rectos y largos. Para imanes de forma cualquiera no se pueden indicar simples relaciones de dependencia entre las fuerzas y la permeabilidad magnética μ del cuerpo magnético en que se halla sumergido el imán, ya que la función del cuerpo magnético, como se ha dicho, depende de la forma de la cavidad que forma en él el imán.

§ 210. Trabajo del desplazamiento de un contorno con corriente por un campo magnético. En el § 200 se ha indicado que sobre un elemento de corriente que se halla en un campo magnético, actúa una fuerza que es $\Delta f = BI\Delta l \operatorname{sen} \alpha$, cuya dirección se determina por

la regla de la mano izquierda. De esto se deduce que el desplazamiento de un sector con corriente por un campo magnético está relacionado con el trabajo que realiza esta fuerza. Determinemos el valor de este trabajo.

Supongamos que tenemos un contorno con un sector rectilíneo y móvil de longitud l (fig. 240). Supongamos también que este contorno se halla en un campo magnético uniforme de sentido perpendicular al plano del dibujo alejándose del lector. El vector de inducción magnética B será, por consiguiente, constante y estará dirigido

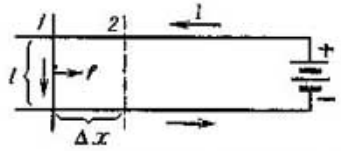


Fig. 240. Contorno con corriente y con un sector l móvil y rectilíneo.

perpendicularmente al sector l. Aplicando la regla de la mano izquierda vemos que sobre el sector móvil l del contorno actúa una fuerza f dirigida hacia la derecha. Como sen $\alpha=1$, la magnitud de esta fuerza será

$$f = IBl.$$

Bajo la acción de esta fuerza el sector se desplazará hacia la derecha. Consideraremos que la intensidad I de la corriente es siempre constante, por consiguiente, al desplazar el sector de la posición 1 a la posición 2, cuya distancia es Δx, la fuerza f realizará un trabajo:

$$\Delta A = f \cdot \Delta x = IBl\,\Delta x.$$

El producto $l\,\Delta x$ es igual a la superficie ΔS que barre el sector l al desplazarse, de donde

$$\Delta A = IB\,\Delta S. \qquad (1)$$

Introduciendo en la (1) el concepto de flujo de inducción magnética

$$\Delta\Phi = B \cdot \Delta S, \qquad (2)$$

tenemos que la expresión del trabajo será:

$$\Delta A = I \cdot \Delta\Phi. \qquad (3)$$

Esta misma expresión es justa también para el caso en que el sector l no se desplace paralelamente a la fuerza f, en cuyo caso

$$\Delta A = f\,\Delta x \cos\beta = IBl\,\Delta x \cos\beta.$$

Pero $I \Delta x \cos \beta$ es de nuevo la superficie barrida por el sector l, de donde

$$\Delta A = IB \Delta S = I \cdot \Delta \Phi.$$

De esta manera tenemos que *el trabajo mecánico de desplazamiento de un sector con corriente por un campo magnético es igual al producto de la intensidad de la corriente que fluye por el sector, por la magnitud del flujo de inducción magnética que atraviesa el sector.*

El resultado obtenido es fácil de generalizar para el caso de un campo cualquiera y una orientación mutua cualquiera entre el sector del contorno y el campo.

Sea un pequeño sector dl de un contorno con corriente. Dividamos el desplazamiento de este sector en pequeños desplazamientos dx. Consideraremos que el sector dl y el desplazamiento dx son tan pequeños que dentro de sus límites el

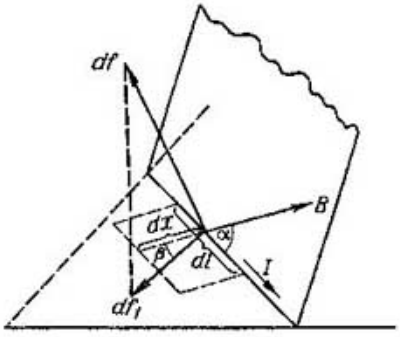


Fig. 241. Representación gráfica para calcular el trabajo de desplazamiento del sector con corriente dl en el campo magnético.

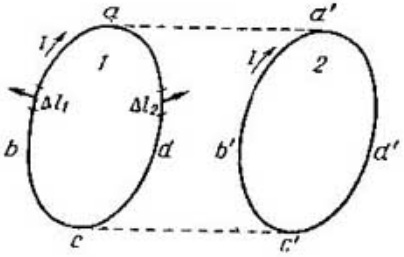


Fig. 242. Representación gráfica para calcular el trabajo de desplazamiento de un contorno cerrado con corriente en un campo magnético.

sector de inducción magnética es constante. Sea el vector B formando un ángulo α cualquiera con la dirección dl (fig. 241). La fuerza df que actúa sobre el sector dl es

$$df = IB \operatorname{sen} \alpha \cdot dl.$$

El sentido de la fuerza df, que es perpendicular a B y a dl, se determina por la regla de la mano izquierda. Al desplazarse el sector dl a una distancia dx, barrerá cierta superficie plana de área dS. En este desplazamiento la fuerza realiza el trabajo:

$$dA = df_1 \cdot \cos \beta \cdot dx,$$

donde df_1 es la proyección de la fuerza df sobre la superficie de desplazamiento, y β es el ángulo entre df_1 y dx. Como la fuerza que actúa sobre el elemento de la corriente en el campo magnético siempre es perpendicular al vector de inducción magnética, está claro que la proyección de la fuerza df_1, que está en el plano de desplazamiento, vendrá determinada por la componente del vector de inducción perpendicular al plano de desplazamiento, de donde

$$df_1 = IB \perp dl,$$

www.elsolucionario.org

donde $B_\perp$ es la proyección del vector de inducción magnética sobre la perpendicular a la superficie de desplazamiento. De aquí que

$$dA = IB_\perp \cos\beta \cdot dl\, dx.$$

Pero $\cos\beta\, dl\, dx = dS$, de donde

$$dA = IB_\perp dS.$$

El producto del área de la superficie atravesada dS por la proyección del vector de inducción magnética sobre la perpendicular a esta superficie $B_\perp$ es el flujo de inducción magnética $d\Phi$ atravesado por el elemento dl, de donde

$$dA = Id\Phi,$$

que coincide por el sentido con la fórmula (3).

El resultado obtenido se puede aplicar al cálculo del trabajo de un contorno cerrado recorrido por una corriente desplazándose por un campo magnético, si la intensidad de la corriente se conserva constante durante todo el desplazamiento del contorno. Para ello, claro está, tendremos que dividir mentalmente el contorno en sectores y sumar el trabajo de las fuerzas aplicadas a estos sectores. En la fig. 242 se representa un contorno con corriente que se desplaza de la posición *1* a la *2*. Supongamos que el desplazamiento del contorno tiene lugar en el plano del dibujo y el campo magnético es perpendicular al plano del dibujo alejándose del lector. La corriente fluye por el contorno según las agujas del reloj. En este caso, las fuerzas aplicadas a cada elemento Δl_1 de la mitad *abc* del contorno forman ángulo obtuso con la dirección del desplazamiento, por consiguiente, realizan un trabajo negativo. El trabajo total de las fuerzas aplicadas el sector *abc* se obtiene, si sumamos el trabajo de los distintos elementos. El trabajo de desplazamiento de cada elemento es igual al producto de la intensidad de la corriente, por el flujo de inducción que atraviesa el sector *abc* al pasar a la posición $a'b'c'$:

$$A_1 = -I\Phi_1.$$

En la fig. 242 se ve que Φ_1 es el flujo de inducción magnética a través del área de la figura $abcc'b'a'$. El trabajo de desplazamiento del sector *adc* a la posición $a'd'c'$ será positivo, ya que, según la regla de la mano izquierda, sobre los elementos Δl_2 de este sector actúan unas fuerzas que forman un ángulo agudo con la dirección del desplazamiento. El valor de este trabajo será el producto de la intensidad de la corriente I por el flujo de inducción magnética atravesado por el sector *adc*. Este flujo Φ_2, evidentemente será igual al flujo que atraviesa el área de la figura $adcc'd'a'$.

Así obtenemos que

$$A_2 = I\Phi_2.$$

El trabajo A resultante del desplazamiento del contorno es igual a la suma de los trabajos analizados:

$$A = A_1 + A_2 = I\,(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (4)$$

Es fácil ver que la diferencia $\Phi_2 - \Phi_1$ es igual *a la variación del flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno con corriente*. Efectivamente, el flujo a través de la superficie *adcc'b'a'* entra como parte componente del flujo Φ_1 y del Φ_2, y, por consiguiente, la diferencia $\Phi_2 - \Phi_1$ no contiene el flujo a través de esta superficie. Queda la diferencia de flujos a través de las superficies *a'b'c'd'* y *abcd*. Definitivamente tenemos que *el trabajo mecánico realizado en el desplazamiento de un contorno cerrado, recorrido por una corriente de intensidad constante, de una posición a otra es igual al producto de la intensidad de la corriente del contorno por la diferencia de flujos de inducción magnética que atraviesan la superficie limitada por el contorno en su posición inicial y final*. Por consiguiente, si el flujo de inducción magnética a través de una superficie limitada por un contorno no varía, el trabajo de desplazamiento es igual a cero. Si, por ejemplo, el contorno con corriente se desplaza con movimiento de traslación por un campo magnético uniforme, el flujo de inducción magnética a través de la superficie del contorno no varía y el trabajo resultante es igual a cero.

Al deducir las fórmulas (3) y (4) hemos supuesto que la intensidad I de la corriente permanece constante todo el tiempo. Después (cap. XX) veremos que el fenómeno de *inducción electromagnética*, en determinadas condiciones, puede variar la intensidad de la corriente del contorno durante su desplazamiento. Por eso, si en estas condiciones no se toman medidas especiales para mantener constante la intensidad I de la corriente en el contorno (por ejemplo, con ayuda de baterías o reóstatos complementarios conectados en el momento necesario), las fórmulas (3) y (4) serán justas *solamente para un desplazamiento infinitamente pequeño del conductor en cuyo tiempo invertido la intensidad I de la corriente se puede considerar constante*. En este caso, el trabajo de un desplazamiento finito se puede determinar integrando.

La expresión (4) nos da, además de la magnitud, el signo del trabajo realizado. Para ello hay que dejar establecido qué sentido del flujo de inducción se considera positivo. Consideremos que el flujo positivo crea las líneas de inducción magnética que forman un ángulo agudo con la dirección de la normal positiva a la superficie del contorno. El sentido positivo de la normal N está relacionado con el de la corriente del contorno mediante la regla del sacacorchos (fig. 243). Entonces, si el flujo de inducción a través de la superficie del contorno aumenta, las fuerzas que actúan sobre los

elementos del contorno realizan un trabajo total positivo; si el flujo a través de la superficie limitada por el contorno disminuye, el trabajo resultante de las fuerzas aplicadas al contorno es negativo.

Veamos unos cuantos casos particulares.

1. Trabajo de giro de un cuadro en un campo magnético uniforme. Sea un cuadro plano de superficie S por el cual fluye una corriente continua I. Tracemos la normal N al plano del cuadro relacionando su sentido positivo con el de avance del sacacorchos al girar éste según la corriente.

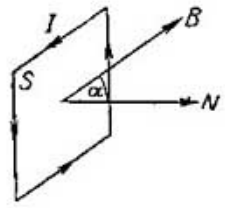


Fig. 243. Representación gráfica para calcular el flujo de inducción magnética a través de la superficie de un cuadro.

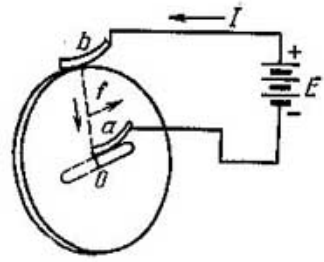


Fig. 244. Disco con contactos de corredera.

Sea α el ángulo que forma la normal N con la dirección de las líneas de inducción B del campo magnético; entonces, el flujo de inducción magnética Φ a través de la superficie del cuadro (fig. 243) será:

$$\Phi = BC \cos \alpha.$$

Al girar el cuadro se efectúa un trabajo [véase la fórmula (4)]:

$$A = IBC (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \qquad (5)$$

donde α_1 y α_2 son los valores de los ángulos que ha formado la normal con la dirección de las líneas de inducción antes y después del giro respectivamente. Observando que $IS = p_m$ es el momento magnético del cuadro, podemos escribir la ecuación (5) de la manera siguiente:

$$A = p_m B (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \qquad (6)$$

2. Trabajo de rotación de un disco con contactos de corredera. Sea un disco metálico normal a las líneas de fuerza del campo magnético. El disco puede girar alrededor del eje 0 (fig. 244), que pasa por su centro paralelamente a las líneas de fuerza. La corriente se comunica al disco mediante los contactos de corredera a y b y lo atraviesa radialmente.*) Si el campo magnético va en el sentido

*) En realidad, la corriente no fluirá solamente a lo largo de un radio solo; pero esta suposición se puede hacer para simplificar el cálculo.

www.elsolucionario.org

en que se aleja del lector y la corriente va según el radio del disco de arriba abajo, sobre la corriente, de parte del campo, actúa una fuerza dirigida hacia la derecha, y el disco girará. En este caso, el flujo de inducción a través del contorno de la corriente *EbaE* será constante, sin embargo, se realizará un trabajo. Esto es debido a que la corriente no fluye por conductores determinados, sino por diferentes radios del disco que gira continuamente. Al girar el disco un ángulo infinitamente pequeño $\Delta\varphi$ se puede considerar que el radio según el cual fluye la corriente, gira un ángulo $\Delta\varphi$ y barrerá la superficie

$$\Delta S = \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi,$$

donde R es el radio del disco. El flujo de inducción a través de esta superficie será $\Delta\Phi = B\Delta S$. Al girar el disco continuamente, nuevos y nuevos radios se pondrán en contacto con las correderas y la suma total de la superficie barrida por ello será

$$S = \sum \frac{1}{2} R^2 \Delta\varphi = \frac{1}{2} R^2 \sum \Delta\varphi;$$

para una vuelta del disco tendremos que $\Sigma\Delta\varphi = 2\pi$, de donde $S = \pi R^2$ y la variación del flujo de inducción $\Phi_2 - \Phi_1 = BS = \pi R^2 B$. Según la fórmula (4), el trabajo realizado en este caso será

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = \pi R^2 IB.$$

Este ejemplo demuestra que la fórmula (4) hay que utilizarla con cuidado en el caso cuando la corriente fluya por conductores móviles macizos, si hay contactos de corredera.

§ 211. **Leyes del circuito magnético.** El conjunto de cuerpos magnéticos por los cuales pasa un flujo de inducción magnética se denomina *circuito magnético*. Si el flujo pasa totalmente de un medio a otro, se dice que los flujos de inducción magnética de uno y otro medio están *conectados en serie*; si el flujo se bifurca en distintas partes que después vuelven a unirse, se dice que las partes bifurcadas del flujo están unidas en paralelo.

Ejemplo de circuito magnético no bifurcado puede ser el flujo de inducción Φ a través de las espiras de un toroide. Veamos un toroide, cuyo número de espiras sea N, la longitud del eje, l, y la sección transversal, S. Supongamos que las espiras están arrolladas sobre un núcleo, cuyo material posee una permeabilidad magnética igual a μ. Sea I la intensidad de la corriente que fluye por la bobina. Escribamos la ecuación del flujo Φ que atraviesa la sección transversal del toroide. Considerando el campo uniforme y paralelo al eje del toroide, tenemos que

$$\Phi = SB = \mu HS.$$

Según la fórmula (1) del § 199, la excitación magnética H en el interior del toroide es igual a $4\pi nI$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud del toroide, de donde

$$\Phi = 4\pi\mu nIS.$$

Observando que $n = \frac{N}{l}$, obtenemos que

$$\Phi = 4\pi\mu \frac{N}{l} IS,$$

que, evidentemente, se puede escribir de la manera siguiente:

$$\Phi = \frac{4\pi NI}{l/\mu S} \qquad (1)$$

Esta fórmula tiene un parecido formal con la de Ohm para un circuito de corriente no bifurcado.

Efectivamente, si llamamos a la expresión $4\pi NI$ del numerador de la fórmula (1) *fuerza magnetomotriz* $\mathcal{E}_m$, y a la expresión $l/\mu S$ del denominador *resistencia magnética* o reluctancia r_m, es decir, si hacemos

$$\mathcal{E}_m = 4\pi NI, \qquad (2)$$

$$r_m = \frac{l}{\mu S}, \qquad (3)$$

la fórmula (1) se transforma en:

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{r_m}. \qquad (1a)$$

De la fórmula (1a) se deduce que *el valor del flujo de inducción magnética es igual a la relación entre la fuerza magnetomotriz* $\mathcal{E}_m$ *y la resistencia magnética* r_m *del circuito*. Obsérvese que la resistencia magnética es directamente proporcional a la longitud del circuito e inversamente proporcional a la sección transversal y a la permeabilidad magnética del circuito. La fuerza magnetomotriz es proporcional al producto NI, que es la intensidad total de la corriente abarcada por el circuito magnético.

Si en la fórmula (1) expresamos la intensidad de la corriente I en unidades electromagnéticas absolutas, l y S en centímetros y en centímetros cuadrados respectivamente, el flujo de inducción Φ se obtendrá en maxwelios. Si en la fórmula (1) medimos la intensidad de la corriente en amperios y el flujo en maxwelios, habrá que introducirle un coeficiente numérico igual a 0,1; entonces,

$$\Phi\,(\text{Mx}) = 0{,}1\,\frac{4\pi NI\,(A)}{l/\mu S},$$

donde l y S, como antes, se expresan en centímetros y en centímetros cuadrados. Más abajo (§ 223) se hablará de las unidades de la

fuerza magnetomotriz $\mathcal{E}_m$ y del flujo de inducción magnética Φ en el sistema internacional de unidades.

La introducción de estas magnitudes, fuerza magnetomotriz y resistencia magnética (reluctancia), está justificada porque las analogías entre los circuitos eléctrico y magnético no se reducen solamente a lo examinado, sino que son más amplias. Para demostrar esto examinemos los sectores unidos en serie de un circuito magnético. Como ejemplo podemos citar el toroide arriba examinado, si suponemos que en el núcleo de longitud l_1 y de permeabilidad magnética μ, hay una rendija de longitud (anchura) l_0 con aire y de permeabilidad magnética μ_0 (fig. 245). Esta rendija, como ahora veremos, varía sensiblemente la magnitud del flujo.

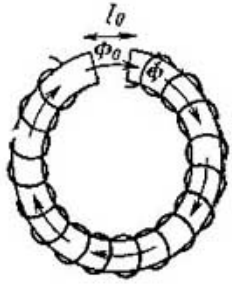


Fig. 245. Flujo magnético a través de la rendija l_0.

Para hallar el flujo utilizaremos la expresión de la circulación del vector H según el contorno que representa la línea media del toroide. La corriente total que abarca este contorno, es igual a IN (la corriente de todas las espiras del toroide), por lo tanto obtenemos que

$$\sum H_i \Delta l = 4\pi IN.$$

Como la dirección de la excitación magnética en el interior del toroide coincide con la de su línea media, llamando **H** y $\mathbf{H}_0$ a la excitación en el núcleo y en la rendija respectivamente, tenemos que

$$4\pi NI = Hl_1 + H_0 l_0$$

o, introduciendo en lugar de las excitaciones H y H_0 las inducciones magnéticas $B = \mu H$ y $B_0 = \mu_0 H_0$:

$$4\pi NI = \frac{B}{\mu} l_1 + \frac{B_0}{\mu_0} l_0. \qquad (4)$$

Introduzcamos en esta relación el flujo Φ, que es el mismo en el núcleo y en la rendija.

Sea S la sección transversal de las espiras del toroide y S_0, la sección transversal de la parte de la rendija por el cual pasa el flujo (se supone que la sección del flujo en la rendija es constante), de donde

$$B = \frac{\Phi}{S}, \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0},$$

después de lo cual, la fórmula (4) adquiere la forma:

$$4\pi NI = \Phi \left(\frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0 \mu_0} \right). \qquad (5)$$

www.elsolucionario.org

Pero $4\pi NI$ es la fuerza magnetomotriz $\mathcal{E}_m$, y $l_1/S\mu$ y $l_0/S_0\mu_0$ pueden representarse respectivamente como las resistencias magnéticas del núcleo r_m y de la rendija r_{m0}, de donde

$$\mathcal{E}_m = \Phi\,(r_m + r_{m0}), \quad \text{o} \quad \Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{r_m + r_{m0}}.$$

Llamando R_m a la suma de las resistencias $r_m + r_{m0}$, obtenemos que

$$\Phi = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m}. \tag{5a}$$

El flujo Φ de nuevo viene expresado por la relación entre la fuerza magnetomotriz $\mathcal{E}_m$ y la resistencia magnética R_m, en que *la resistencia magnética del circuito R_m es igual a la suma de resistencias magnéticas de sus sectores unidos en serie.*

Analicemos ahora el caso de conexión *en paralelo* de un circuito magnético. El esquema de esta conexión viene representado en la fig. 246.

En la parte media del circuito hay una bobina que crea la fuerza magnetomotriz $\mathcal{E}_m = 4\pi NI$. El flujo de inducción Φ en la parte media del circuito se bifurca formando los flujos Φ_1 y Φ_2 en las dos partes correspondientes del circuito, por consiguiente

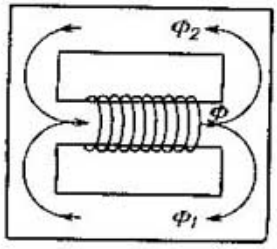


Fig. 246. Circuito magnético en paralelo (en derivación).

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2.$$

Para cada una de las partes paralelamente unidas tenemos las relaciones:

$$\Phi_1 = \frac{\mathcal{E}_m}{r_{m1}}, \quad \Phi_2 = \frac{\mathcal{E}_m}{r_{m2}},$$

donde r_{m1} y r_{m2} son las resistencias magnéticas de las partes del circuito por donde pasan los flujos, y $\mathcal{E}_m$, la fuerza magnetomotriz total. Como $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$,

$$\Phi = \mathcal{E}_m \left(\frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m2}} \right) = \frac{\mathcal{E}_m}{R_m},$$

de donde se deduce que la resistencia total R de las partes del circuito conectadas en paralelo viene determinada por la relación:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{r_{m1}} + \frac{1}{r_{m2}} \tag{6}$$

que es análoga a la resistencia de los conductores conectados en paralelo.

En estas leyes del circuito magnético se basa la construcción de los electroimanes, es decir, de los instrumentos que permiten obtener intensos campos magnéticos. En los electroimanes, el campo magnético lo crea la corriente que fluye por el solenoide. Para intensificar el campo del solenoide se introducen núcleos de hierro. Para aclarar la función del núcleo de hierro analicemos el siguiente caso. Sea un toroide de longitud de eje igual a l, de área de la sección transversal, S, y de número total de espiras, N. Al pasar la corriente de intensidad I por el interior del toroide, se crea un campo magnético de excitación:

$$H = 4\pi \frac{N}{l} I. \tag{7}$$

Introduzcamos ahora en el interior del toroide un núcleo de hierro de manera que llene casi todo el toroide, y que la parte no ocupada por el hierro sea una pequeña rendija (fig. 245). Determinemos la excitación magnética H_0 en la rendija (entrehierro). Para ello hallemos primeramente el flujo de inducción en el interior del toroide según la fórmula (5):

$$\Phi = \frac{4\pi NI}{\frac{l_1}{S\mu} + \frac{l_0}{S_0}}; \tag{8}$$

aquí, l_1 es la longitud del núcleo de hierro; μ, su permeabilidad magnética; l_0, la anchura de la rendija; S_0, el área de la sección del flujo en la rendija (la permeabilidad magnética del aire en la rendija μ_0 se considera igual a 1). Si la rendija es tan pequeña que $l_0 \ll \frac{l_1}{\mu}$, se puede despreciar el término $\frac{l_0}{S_0}$ del denominador de la fórmula (8) por ser muy pequeño en comparación con el $\frac{l_1}{S\mu}$, y tendremos que

$$\Phi = 4\pi \frac{N}{l_1} IS\mu.$$

La inducción en el núcleo, $B = \frac{\Phi}{S}$, será

$$B = 4\pi \frac{N}{l_1} I\mu.$$

Si la rendija es muy estrecha, las líneas de inducción pasarán normalmente a la superficie divisoria del núcleo y de la rendija, por eso la inducción B_0 en la rendija será igual a la inducción B en el núcleo (véase el § 206).

En la zona del entrehierro, donde la permeabilidad magnética es $\mu_0 = 1$, la excitación magnética es $H_0 = B_0$; de donde, suponiendo

aproximadamente que $l_1 = l$, tenemos que

$$H_0 = 4\pi \frac{N}{l} I\mu.$$

Comparando esta ecuación con la (7) vemos que en una rendija bastante estrecha, la excitación magnética es μ veces mayor que la creada en el toroide sin núcleo.

Estos toroides con núcleo son los electroimanes anulares. Habitualmente, a los electroimanes de laboratorio se les da otra forma; pero para que sea efectivo el empleo del núcleo de hierro, el circuito magnético debe estar casi cerrado, con una pequeña rendija. En la

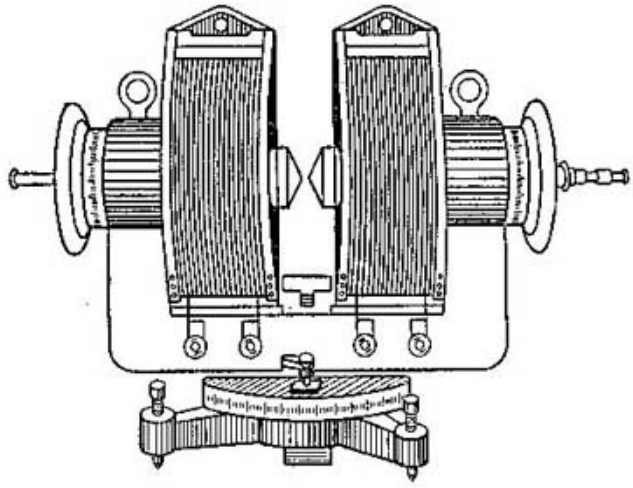


Fig. 247. Electroimán.

fig. 247 se representa uno de los tipos usuales de electroimanes de laboratorio. Para apreciar en lo justo la función del núcleo de los electroimanes, hay que recordar que para el hierro, material de que se hace siempre el núcleo, la permeabilidad magnética μ depende de la excitación magnética; por eso, la función del núcleo a distintas excitaciones magnéticas es diferente. Si la rendija del circuito magnético del electroimán es estrecha, la excitación magnética H_0 en ella será igual a la inducción B en el núcleo. La relación de dependencia entre B y la excitación magnética H en el núcleo viene representada en la fig. 220. La excitación magnética H en el núcleo es proporcional a la intensidad de la corriente I de la bobina del electroimán. De aquí que la relación de dependencia entre B, y, por consiguiente, entre la excitación magnética H_0, en la rendija,

www.elsolucionario.org

y la intensidad I de la corriente de la bobina se exprese por una curva parecida a la de la fig. 220. En la fig. 248 se representa esta relación de dependencia entre H_0 e I para un electroimán determinado con un núcleo de hierro de clase determinada. En la misma figura se representa una recta que indica el incremento de H con el aumento de la intensidad I de la corriente. Si en el electroimán no hubiese núcleo, el campo magnético que crearía tendría la excitación H. Como se ve, al principio H_0 aumenta con la intensidad de la corriente mucho más de prisa que H; esto tiene lugar hasta que se llegue a la saturación y sea grande el valor de la permeabilidad magnética μ del hierro. Alcanzada la saturación, el aumento de H_0 es de carácter lineal, permaneciendo todo el tiempo la excitación magnética H_0 mayor que H en la misma magnitud, determinada por el segmento ab.

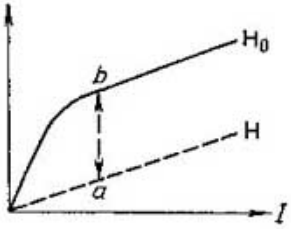


Fig. 248. Dependencia entre la excitación magnética H_0 del campo entre los polos del electroimán y la intensidad de la corriente I de la bobina.

Analicemos el siguiente ejemplo concreto. Sea $l_1=60$ cm la longitud del núcleo de hierro del toroide (fig. 245); $l_0=0{,}1$ cm, la anchura de la rendija; $S=12$ cm^2, el área de la sección transversal del toroide; $N=1000$, el número total de espiras, y supongamos que por las espiras fluye una corriente de 1 A de intensidad. La permeabilidad magnética μ, como se ha indicado, no sólo depende de la clase del hierro, sino también de la magnitud de la excitación magnética H determinada por la intensidad I de la corriente. Supongamos que para las condiciones del ejemplo dado sea $\mu=600$.

Determinemos la excitación magnética H_0 en el entrehierro. El flujo de inducción en el toroide será

$$\Phi=\frac{0{,}4\pi N I_a}{\frac{l_1}{S\mu}+\frac{l_0}{S_0}},$$

donde I_a es la intensidad de la corriente en amperios. Si la rendija es estrecha, la inducción en ella es igual a la del núcleo, y S_0 se puede suponer igual a S. La excitación magnética H_0 en el entrehierro, numéricamente igual a la inducción magnética, se expresará, por consiguiente, en función del flujo Φ de la siguiente manera:

$$H_0=\frac{\Phi}{S}=\frac{0{,}4\pi N I_a}{\frac{l_1}{\mu}+l_0}.$$

Colocando en esta ecuación los datos del problema hallamos que

$$H_0=\frac{0{,}4\cdot 3{,}14\cdot 1\,000\cdot 1}{\frac{60}{600}+0{,}1}\ Oe\cong 6\,280 \text{ oerstedios}.$$

Si el toroide no tuviese el núcleo de hierro, la excitación magnética sería igual a

$$H = 0{,}4\pi \frac{N}{l} I_a = 0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{1\,000}{60} 1\ Oe \cong 21 \text{ oerstedios.}$$

Así vemos que si hay núcleo, la excitación magnética en el entrehierro es 300 veces mayor. Si el entrehierro es más ancho, la excitación magnética en él será menor.

§ 212. Ecuación de Kirchhof para el circuito magnético. Los cálculos del circuito magnético complejo se realizan con ayuda de ecuaciones análogas a las de Kirchhof en el circuito eléctrico.

En la fig. 246 se representa un circuito con sectores conectados en paralelo. En los lugares donde el flujo se bifurca, la magnitud del flujo que arriba es igual a la suma de los flujos que se alejan. Si convenimos en considerar positivos los flujos que llegan, y negativos los que se alejan, en cada lugar de bifurcación ("nudo") se cumplirá la condición de que la suma algebraica de los flujos del "nudo" es igual a cero:

$$\sum \Phi = 0. \tag{1}$$

Las ecuaciones (1) son análogas a las primeras ecuaciones de Kirchhof en el circuito con corrientes bifurcadas.

Si se separa en un circuito magnético un contorno cerrado cualquiera, aplicándole la ecuación de la circulación del vector H, obtenemos que

$$\sum Hl = 4\pi \sum NI. \tag{2}$$

Aquí la suma se extiende a todos los sectores del contorno cerrado: ΣNI expresa la suma de los productos de los números de espiras que abarca el contorno, por la intensidad de la corriente que fluye por ellos. La magnitud NI se debe considerar positiva, si el recorrido se hace en el mismo sentido que el del campo creado por la corriente I, y negativa, en el caso contrario. Expresando la excitación magnética en función del flujo

$$H = \frac{\Phi}{S\mu},$$

donde S es la sección transversal del flujo, y μ es la permeabilidad magnética del medio, podemos escribir la ecuación (2) de la forma siguiente:

$$\sum \frac{\Phi l}{S\mu} = 4\pi \sum NI \tag{3}$$

o

$$\sum \Phi r_m = \sum \mathcal{E}_m.$$

Esta relación es análoga al segundo sistema de ecuaciones de Kirchhof: la suma de los productos de los flujos magnéticos por las resistencias magnéticas de un circuito cerrado es igual a la suma de las fuerzas magnetomotrices que actúan en el circuito.

Es importante señalar que el parecido de las leyes del circuito magnético y del circuito eléctrico es puramente formal, ya que los fenómenos físicos no tienen nada de común.

Para ilustrar la comodidad del empleo de estas relaciones examinemos unos ejemplos de cálculo de circuitos magnéticos.

Ejemplo 1. Sea un electroimán, cuyo núcleo tiene la forma representada en la fig. 249. Determinar la excitación magnética en la rendija del electroimán, cuyo medio es el aire, si el número de amperio-vueltas es

NI_a=1 800, la anchura de la rendija es l_0=2 cm, y la resistencia magnética en la rendija es 30 veces mayor que la de cada uno de los sectores a, b, y c del circuito. Las resistencias de los sectores a, b y c son iguales.

Solución. Llamemos Φ_a, Φ_b, y Φ_c, a los flujos de inducción magnética respectivos en los sectores a, b y c, y Φ_0 al flujo en la rendija. Como la permeabilidad magnétitica de la rendija es igual a la unidad, la excitación magnética en la rendija será

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{S}, \tag{4}$$

donde S es el área de la sección transversal de la rendija.

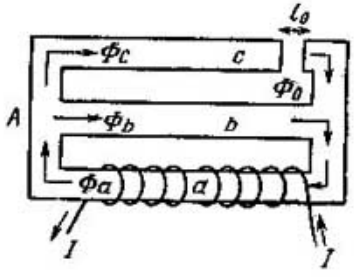


Fig. 249. Electroimán con el circuito magnético en derivación.

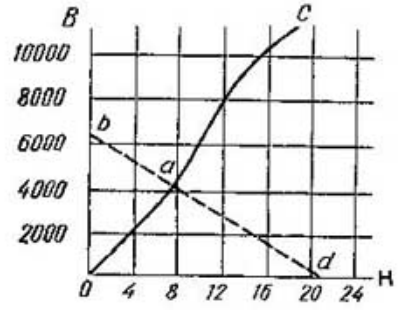


Fig. 250. Método gráfico para hallar la inducción magnética B del electroimán.

El segundo sistema de ecuaciones de Kirchhof para el contorno cerrado formado por los sectores a, c y la rendija, y para el contorno formado por los sectores a y b, será

$$\Phi_a r_m + \Phi_c r_m + \Phi_0 \cdot 30 r_m = 0{,}4\pi N I_a; \tag{5}$$
$$\Phi_a r_m + \Phi_b r_m = 0{,}4\pi N I_a. \tag{6}$$

La fuerza magnetomotriz de ambos contornos es la misma y viene expresada en las unidades correspondientes suponiendo que I_a se da en amperios. Debido a la continuidad del flujo de inducción magnética, tenemos que

$$\Phi_b = \Phi_c, \tag{7}$$

ya que todo el flujo del sector c pasa por la rendija. Examinando la bifurcación en el "nudo" A obtenemos la primera ecuación de Kirchhof:

$$\Phi_a = \Phi_0 + \Phi_b. \tag{8}$$

Utilizando las ecuaciones (7) y (8) escribiremos las (5) y (6) de la siguiente manera:

$$\Phi_a r_m + 31\Phi_0 r_m = 0{,}4\pi N I_a; \tag{5a}$$
$$\Phi_a r_m - \Phi_0 r_m = 0{,}4\pi N I_a; \tag{6a}$$

Multiplicando la (5a) por 2 y restándole la (6a), hallamos que

$$63\Phi_0 r_m = 0{,}4\pi N I_a. \tag{9}$$

La resistencia magnética de la rendija es igual a l_0/S, y la resistencia de los

www.elsolucionario.org

sectores, según se ha establecido, es 30 veces menor, de donde

$$r_m = \frac{l_0}{S \cdot 30}.$$

Colocando este valor de r_m en la (9), hallamos el valor del flujo de inducción:

$$\Phi_0 = \frac{0{,}4 \cdot \pi N I_a}{63 r_m} = \frac{0{,}4 \cdot \pi N I_a}{63 \cdot \dfrac{l_0}{S \cdot 30}},$$

de donde la excitación magnética H_0 en la rendija, según la (4), será

$$H_0 = \frac{\Phi_0}{S} = \frac{0{,}4 \cdot \pi N I_a}{63 \cdot \dfrac{l_0}{30}} = \frac{0{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 1800}{63 \cdot \dfrac{2}{30}} \text{ Oe} \cong 540 \text{ Oe}.$$

Ejemplo 2. Determinar el valor de la excitación magnética H_0 en la rendija del electroimán anular descrito en el ejemplo de la pág. 396, si la anchura de la rendija se aumenta hasta el valor de 0,2 cm. La relación de dependencia entre la inducción magnética B en el hierro del núcleo y la excitación magnética H viene dada por la curva OC de la fig. 250.

Solución. Llamando Φ al flujo en el núcleo, Φ_0, al de la rendija y r_m y r_{m0} respectivamente a las resistencias magnéticas del núcleo y de la rendija, el segundo sistema de ecuaciones de Kirchhof para el circuito del electroimán será

$$\Phi r_m + \Phi_0 r_{m0} = 0{,}4\pi N I_a \qquad (10)$$

Considerando, como antes, que las áreas de las secciones de los flujos en el núcleo y en la rendija son iguales a S, tenemos que

$$\Phi = BS = \mu HS, \quad \Phi_0 = B_0 S,$$

$$r_m = \frac{l_1}{\mu S}, \quad r_{m0} = \frac{l_0}{S}.$$

Colocando estos valores de Φ, Φ_0, r_m y r_{m0} en la (10) hallamos que

$$Hl_1 + B_0 l_0 = 0{,}4\pi N I_a$$

y sustituyendo l_1, l_0, N e I_a por sus valores:

$$60H + 0{,}2B_0 = 1256.$$

Como la inducción magnética B_0 en la rendija es igual a la inducción magnética B en el núcleo, esta ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$60H + 0{,}2B = 1256. \qquad (11)$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas: la excitación magnética H y la inducción magnética B en el núcleo.

La segunda ecuación será la relación entre H y B expresada por la curva de la fig. 250. Para resolver estas ecuaciones utilizaremos el método gráfico, a saber, hallando el punto a de intersección de la recta bd, correspondiente a la ecuación (11), con la curva del gráfico (fig. 250). A este punto de intersección le corresponde la inducción $B = 4\,000$ gausios. Como $B = B_0$, y B_0, a su vez, es igual numéricamente a la excitación magnética H_0 en la rendija, la excitación magnética buscada será

$$H_0 = 4000 \text{ Oe}.$$

Si la anchura de la rendija es de 0,1 cm, la excitación magnética será $H_0 = 6\,280$ Oe (véase la pág. 398). Como se ve, el aumento de la anchura de la rendija disminuye notablemente la excitación magnética.

§ 213. Instrumentos de medición. Las acciones recíprocas entre conductores por los cuales fluye una corriente, o entre conductores con corriente e imanes permanentes pueden servir para medir intensidades de corrientes. En estas acciones recíprocas se basa el funcionamiento de gran número de instrumentos de medición, los cuales se pueden dividir en tres clases: 1) instrumentos de acción recíproca entre imanes permanentes y conductores con corriente (magnetocléctricos); 2) instrumentos, en los cuales las partes de

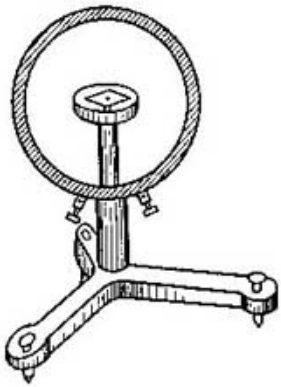


Fig. 251. Galvanómetro de tangentes.

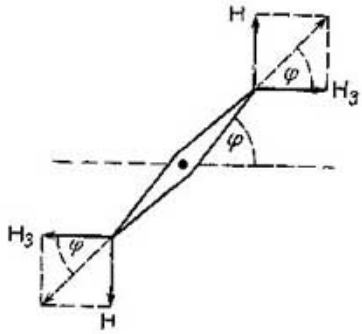


Fig. 252. Representación gráfica para determinar la posición de equilibrio de la aguja del galvanómetro de tangentes.

hierro dulce se introducen en las bobinas con corriente (electromagnéticos); 3) instrumentos, en los cuales actúan recíprocamente dos bobinas con corriente (electrodinámicos).

El instrumento más simple de la primera clase es el *galvanómetro de tangentes*, que consta de un arrollamiento circular en el interior del cual hay una pequeña aguja magnética (fig. 251) que puede girar alrededor del eje vertical. La aguja magnética debe ser muy pequeña para que la excitación magnética de la corriente de las espiras se pueda considerar constante en la zona donde se halla la aguja, e igual a la excitación en el centro de las espiras. De donde, según lo dicho en el § 194, tenemos que

$$H = \frac{2\pi n I}{R}, \qquad (1)$$

donde I es la intensidad de la corriente que fluye por las espiras, n, el número de espiras por unidad de longitud del conductor circular, y R, su radio. Si no hay corriente, la aguja se orienta según el meridiano magnético terrestre. Si en este momento hacemos coincidir el plano de las espiras con el del meridiano, con lo cual la aguja

se hallará en el plano de las espiras, el instrumento estará listo para su funcionamiento. Al conectarle la corriente, el campo magnético H de las espiras estará dirigido perpendicularmente al plano de las espiras y la aguja magnética se orientará según la dirección de la fuerza resultante de las dos que actúan sobre ella: de la del campo magnético y de la componente horizontal del campo magnético terrestre. En este caso, como se ve en la fig. 252, el ángulo φ que forma la aguja con el plano de las espiras, viene determinado por la relación:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{H_T},$$

donde H_T es la componente horizontal de la excitación magnética del campo de la Tierra. Colocando en lugar de H su valor según la (1), tenemos que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi nI}{RH_T},$$

de donde

$$I = \frac{RH_T}{2\pi n}\operatorname{tg}\varphi. \qquad (2)$$

Si en esta ecuación se mide la componente horizontal de la excitación magnética del campo de la Tierra H_T en oerstedios y R en centímetros, la intensidad de la corriente se medirá en unidades electromagnéticas de intensidad de la corriente. La magnitud $RH_T/2\pi n$ es constante para el instrumento dado en el punto dado de la esfera terrestre, de donde

$$I = C \cdot \operatorname{tg}\varphi, \qquad (2a)$$

es decir, la intensidad de la corriente I es proporcional a la tangente del ángulo de inclinación φ. La constante C del galvanómetro se puede calcular, conociendo R y H_T, o se puede determinar graduando el galvanómetro, haciendo pasar por él corrientes de intensidades conocidas.

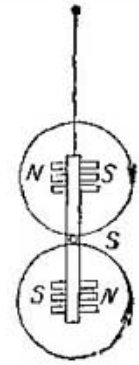


Fig. 253. Esquema del galvanómetro con un sistema astático de imanes.

Una variante de este tipo es el instrumento de medición con un sistema móvil de imanes representado en la fig. 253. El sistema de imanes empleado en este instrumento se denomina *astático*. Consta de dos grupos de imanes, en uno de los cuales los polos norte de todos los imanes están dirigidos hacia un lado, y en el otro, en sentido contrario. Gracias a esta disposición de los imanes, la acción ejercida sobre ellos de parte del campo magnético de la Tierra está compensada. Cada uno de los grupos de imanes se coloca en el interior de una

www.elsolucionario.org

bobina, por cuyas espiras fluye la corriente a medir. La corriente fluye por las bobinas en sentidos opuestos, por eso la acción de las bobinas se suma. Las fuerzas elásticas del hilo del cual se suspende el sistema de imanes, los mantiene en el plano de las bobinas cuando no hay corriente. Al pasar la corriente por las bobinas, el sistema de imanes gira y el ángulo de giro permite medir la intensidad de la corriente. Construyendo un sistema muy ligero de imanes suspendidos de un hilo fino de cuarzo y observando su inclinación por la desviación del rayo de luz reflejado de un espejo fijo en el hilo, se pueden medir corrientes de intensidades muy pequeñas, del orden de 10^{-12}A.

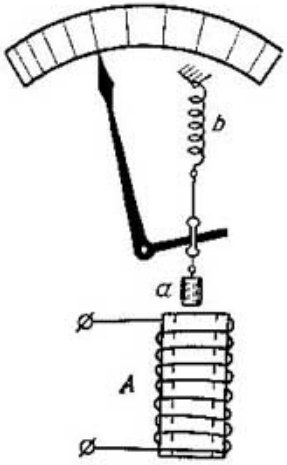


Fig. 254. Amperímetro de Dolivo-Dobrovolski.

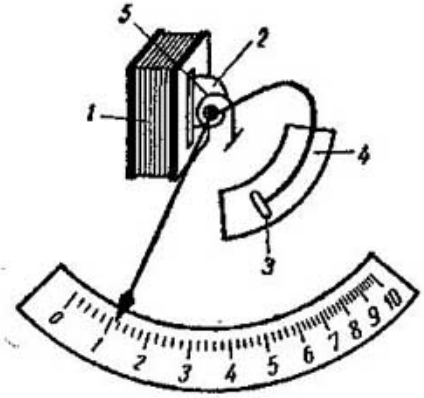


Fig. 255. Amperímetro técnico de corriente continua.

Al segundo tipo pertenecen unos instrumentos muy difundidos, pero menos sensibles, cuyo funcionamiento se basa en la atracción de un trozo de hierro hacia el interior de la bobina. El primero en proponer y en construir un instrumento de esta clase fue M. O. Dolivo-Dobrovolski, ingeniero electrotécnico ruso. El esquema de este instrumento se representa en la fig. 254, donde *A* es la bobina por la cual fluye la corriente a medir; *a* es una barra de hierro suspendida del resorte *b*. La corriente que fluye por la bobina, crea un campo magnético, bajo cuya acción se magnetiza la barra de hierro *a* y es atraída hacia la zona donde el campo magnético es más intenso, es decir, hacia el interior de la bobina. La barra está unida a la aguja indicadora, la cual gira al ser atraída la barra por la bobina.

En este mismo principio se basa la construcción de los amperímetros modernos para fines industriales. En la fig. 255 se representa el corte de un amperímetro de corriente continua, donde *1* es la bobina, *2*, el pedazo de hierro que se magnetiza, mantenido por el

resorte 5. Al fluir la corriente por la bobina, el trozo de hierro 2 es atraído por la bobina introduciéndose en ella y haciendo girar la aguja indicadora. Para que el trozo de hierro y la aguja no realicen oscilaciones periódicas, se utiliza un amortiguador, que consta del émbolo 3 que se desplaza por el interior del cilindro 4.

Al primer tipo de instrumentos de medición pertenecen también *los galvanómetros de cuadro (o bobina) móvil.* En ellos, el campo magnético lo crea un imán permanente en forma de herradura. Los extremos polares *N* y *S* (fig. 256) están uno enfrente de otro con sus superficies cóncavo-cilíndricas de igual radio. Entre los polos se fija inmóvil un cilindro de hierro de radio un poco menor, con lo cual, el circuito magnético casi se cierra por completo, y las líneas de inducción se concentran en la rendija cilíndrica entre los polos y el cilindro. En esta rendija se coloca un cuadro *ad* que consta de varias espiras de un conductor por el cual fluye la corriente a medir. Un fino resorte *c* mantiene el cuadro en una posición determinada.

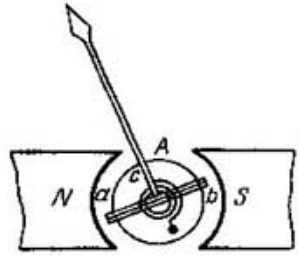


Fig. 256. Esquema de un galvanómetro de cuadro (bobina) móvil.

Al pasar la corriente por el cuadro, éste girará hasta que el momento de las fuerzas electromagnéticas que actúan sobre el cuadro, se equilibre con el momento mecánico del resorte. Una ligera aguja unida al cuadro indicará el ángulo de giro. Debido a la forma radial del campo magnético en la rendija en que se halla el cuadro, su ángulo de giro será proporcional, en amplios límites, a la intensidad de la corriente.

Los galvanómetros de este tipo son muy cómodos debido a la constancia de su sensibilidad y a la pequeña dependencia de sus indicaciones respecto a los campos exteriores. El principio en que se basa su funcionamiento se utiliza en la construcción de la mayoría de instrumentos de medición de corriente continua, tanto para fines técnicos como para los laboratorios. Se pueden utilizar como voltímetros y amperímetros, conectando en serie con el cuadro una gran resistencia constante, o en paralelo con el mismo una resistencia en derivación (véase lo dicho en el § 158).

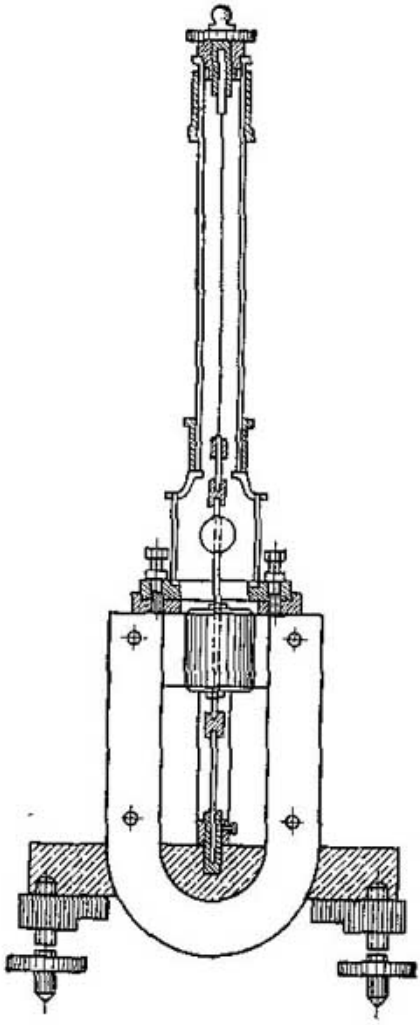


Fig. 257. Galvanómetro de espejo.

Instrumentos más sensibles se hacen suspendiendo el cuadro con corriente de un hilo fino (fig. 257). El ángulo de giro del cuadro se determina por la inclinación del rayo de luz que se refleja en un espejo fijo en el cuadro. Este galvanómetro se denomina *galvanómetro de espejo (de reflexión o galvanómetro D'Arsonval)*.

Al tipo de instrumentos de medición con conductor móvil pertenece también el *galvanómetro de cuerda (de hilo)*. Este galvanómetro consta de un conductor *ab* muy fino (fig. 258) extendido entre los polos de un imán de intenso campo. Al pasar la corriente por el conductor, éste se desplaza en correspondencia con la regla de la mano izquierda (véase el § 196). El desplazamiento del conductor se observa con ayuda de un microscopio de medición a través del núcleo de imán. La sensibilidad del galvanómetro de cuerda puede ser de 10^{-12} A. Debido a la pequeña inercia del conductor fino, este galvanómetro se puede utilizar para medir y registrar en fotografía las corrientes que varían con el tiempo.

El límite de sensibilidad de todos los galvanómetros lo restringen las fluctuaciones de la intensidad de la corriente (véase el § 186).

Por último, se puede construir un instrumento de medición de tercer tipo (electrodinámico), en el cual no hay ninguna clase de imanes permanentes, y cuyas indicaciones se basan en la acción recíproca de los conductores con corrientes. El esquema más simple de un instrumento de esta clase es un cuadro con corriente suspendido en el interior de un solenoide (compárese con lo dicho en el § 197). La magnitud del momento de torsión aplicado al cuadro es proporcional a la intensidad de la corriente I_1, que fluye por el

www.elsolucionario.org

cuadro, y a la intensidad de la corriente I_2 que fluye por el solenoide. Si por el solenoide y por el cuadro fluye la misma corriente I a medir, la magnitud del momento de torsión del cuadro es proporcional a I^2.

La acción recíproca de dos bobinas con corriente también se utiliza para construir *vatímetros*, es decir, instrumentos que miden la potencia absorbida en el sector dado del circuito. Hay que recordar que la potencia del sector dado del circuito es proporcional

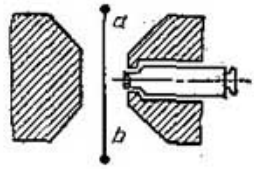


Fig. 258. Galvanómetro de cuerda.

a la intensidad de la corriente que fluye por el sector y a la diferencia de potencial $V_1—V_2$ de sus extremos. El vatímetro consta de dos bobinas de acción recíproca. Una de ellas tiene un arrollamiento de poca resistencia y está conectada en serie con el sector del circuito, y la otra, de gran resistencia conectada en paralelo con el sector del circuito. Por lo tanto, la intensidad de la corriente de la primera bobina será igual a la intensidad I de la del circuito, y la corriente I' de la segunda bobina será proporcional a la diferencia de potencial $V_1—V_2$. A cada una de las bobinas se aplica un momento de torsión, cuya magnitud es proporcional a II', es decir, proporcional a $I\ (V_1—V_2)$, o, en otras palabras, es proporcional a la potencia W consumida en el sector del circuito.

En este mismo principio de utilización de dos bobinas se basa la construcción del *contador* que mide la energía eléctrica consumida en el tiempo t.

CAPITULO XIX

Desviación de las partículas cargadas en los campos eléctrico y magnético

§ 214. Fuerza que actúa sobre una carga que se desplaza por un campo magnético. En el § 196 se ha indicado que, según la ley de Ampere, sobre un elemento de conductor de longitud Δl, por el cual fluye una corriente de intensidad I, de parte de un campo magnético exterior de excitación H actúa una fuerza:

$$f = I\,\Delta l H \operatorname{sen}\alpha, \qquad (1)$$

donde α es el ángulo entre la dirección de la corriente y la excitación magnética. Todas las magnitudes de esta fórmula se deben medir en el sistema *CGSM*. El sentido de la fuerza f se determina por la regla de la mano izquierda (véase el § 196). Pero toda corriente es debida a un desplazamiento de partículas cargadas: electrones o iones. De aquí que sea natural considerar la fuerza que en un

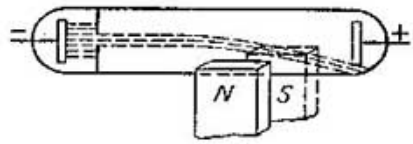


Fig. 259. Desviación del haz de electrones en un campo magnético.

campo magnético exterior actúa sobre un conductor recorrido por una corriente, como resultado de las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas cargadas de parte del campo magnético. Esta deducción se puede comprobar directamente en la práctica: si a un tubo en el cual surge un haz de electrones, se aplica un campo magnético exterior creado, por ejemplo, por un imán permanente (fig. 259), el haz electrónico se desvía, lo cual se puede observar fácilmente por la desviación de la mancha luminosa que se forma en una pantalla fluorescente. En el tubo, en el cual se ha hecho el vacío, los electrones se desplazan libremente y solicitados por las fuerzas del campo magnético, se desvían recorriendo una trayectoria curvilínea. Si los electrones u otras partículas cargadas se desplazan por el interior de un cuerpo compacto (sólido o líquido), debido a las colisiones que sufren con los átomos del cuerpo, la fuerza que actúa sobre ellos se transmite a este cuerpo. Esta clase de transferencia de fuerzas se puede demostrar con ayuda del disco que gira,

representado en la fig. 244. En este caso los electrones se desplazan por el interior del disco según uno de sus radios. El campo magnético, perpendicular al plano del disco, los desvía hacia un lado. Debido a las continuas colisiones de los electrones con los átomos, la fuerza que actúa sobre los electrones se comunica al disco y éste gira. Un experimento análogo se puede realizar también en el caso de conducción electrolítica. Para ello se toma un recipiente en forma de anillo de paredes metálicas y de fondo de material aislador. Las paredes del recipiente servirán de electrodos. La corriente fluye en dirección radial a través del electrólito, que se halla entre las paredes. En el electrólito, la corriente es debida al movimiento de iones de ambos signos, teniendo en cuenta que los iones de diferente signo se desplazan en sentidos opuestos. Supongamos que el recipiente se introduce en un campo magnético perpendicular a su fondo. Esto se puede hacer colocando el recipiente, por ejemplo, en el extremo de un imán rectilíneo colocado verticalmente (fig. 260). En este caso, de parte del campo magnético actuarán sobre los iones en movimiento fuerzas perpendiculares a la dirección

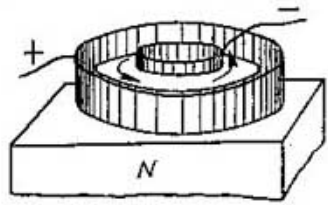


Fig. 260. Desviación de los iones electrolíticos en el campo magnético.

de su movimiento y dirigidas paralelamente a la superficie del líquido. Estas fuerzas tienen la misma dirección para con los iones de ambos signos, ya que éstos se desplazan en sentidos opuestos. Bajo la acción de estas fuerzas los iones empiezan a desviarse de su trayectoria y arrastran al líquido, en el cual surge una corriente circular.

Hallemos ahora la expresión de la fuerza que actúa de parte del campo magnético sobre una carga en movimiento. Para ello utilicemos la expresión (1) de la fuerza que actúa sobre un elemento del conductor recorrido por una corriente, es decir, por el cual se desplazan cargas. La intensidad I de la corriente numéricamente es igual a la carga transportada por unidad de tiempo a través de la sección transversal del conductor. Si la magnitud de una carga es e y el número de cargas transportadas a través de la sección transversal del conductor por unidad de tiempo es igual a n, tenemos que $I=en$. Está claro que $n=n_0 vS$, donde n_0 es el número de cargas

www.elsolucionario.org

por unidad de volumen que se desplazan, v, su velocidad, y S, el área de la sección transversal del conductor. Por consiguiente, para I obtenemos que

$$I = en_0vS.$$

Colocando este valor de I en la (1), tenemos que

$$f = en_0vS\,\Delta l\,H\,\mathrm{sen}\,\alpha. \qquad (2)$$

Esta fuerza actúa sobre el elemento del conductor de longitud Δl, por consiguiente, es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre todas las cargas que se desplazan por dicho elemento del conductor; el número de estas cargas es $n' = n_0S\Delta l$. De aquí que la fuerza que actúa sobre una carga sea

$$\Delta f = \frac{f}{n'} = \frac{f}{n_0S\,\Delta l}.$$

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza f por su valor según la (2), obtenemos que

$$\Delta f = evH\,\mathrm{sen}\,\alpha. \qquad (3)$$

Esta fórmula, que se denomina *fórmula de Lorentz*, nos da la fuerza buscada que actúa sobre una carga que se desplaza a la velocidad v por un campo magnético de excitación H. Si $v=0$, según la fórmula de Lorentz tendremos también que $\Delta f=0$, que corresponde al hecho de que sobre una carga en reposo (que es el caso que tiene lugar en electrostática), el campo magnético no ejerce ninguna acción. En la fórmula de Lorentz hay que considerar la velocidad v respecto al sistema de coordenadas en que se mide la fuerza Δf y la excitación magnética **H**. La fuerza es perpendicular a la velocidad **v** de la carga y a la excitación magnética **H**, es decir, la fuerza **Δf** es perpendicular al plano que contiene los vectores **v** y **H**. En el caso de desplazamiento de una carga positiva, el sentido de la fuerza se determina por la regla de la mano izquierda: si los dedos (excepto el pulgar) señalan el sentido de movimiento de la carga y la palma de la mano es perpendicular a las líneas del campo magnético de modo que éstas penetren en aquélla, el sentido de la fuerza **Δf** vendrá indicado por el dedo pulgar, perpendicular a los otros. Si se desplaza una carga negativa, esta fuerza irá en sentido contrario (fig. 261).

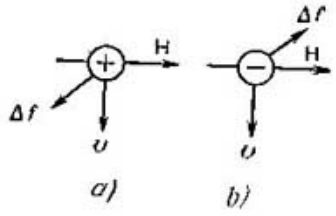


Fig. 261. Sentido de la fuerza de Lorentz Δf que actúa sobre una carga que se desplaza a la velocidad v por un campo magnético de excitación H.

La magnitud de la fuerza de Lorentz depende no sólo del valor de la velocidad v y de la excitación magnética H, sino también

del sen α, es decir, de sus direcciones relativas. La fuerza adquiere el valor máximo cuando la carga se desplaza perpendicularmente a la dirección de la excitación magnética H, y es igual a cero, cuando se desplaza a lo largo de las líneas de fuerza del campo.

En la fórmula (3), en la cual no se ha introducido ningún coeficiente de proporcionalidad, todas las magnitudes deben medirse en unidades del sistema *CGSM*. Generalmente se utiliza un sistema mixto de unidades: e se mide en unidades *CGSE*, y la excitación magnética, en oerstedios; entonces, en la fórmula (3) hay que introducir un coeficiente de proporcionalidad:

$$\Delta f = \frac{1}{c} evH \operatorname{sen} \alpha, \tag{3a}$$

donde

$$\frac{1}{c} \cong \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{\text{seg}}{\text{cm}}.$$

La fórmula (3a) se puede escribir en forma vectorial observando que la dirección de la fuerza Δf coincide con la del producto vectorial [v×H], de donde

$$\Delta \mathbf{f} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \tag{3b}$$

Si además del campo magnético hay un campo eléctrico de intensidad E, la fuerza total que actúa sobre la carga e que se desplaza a la velocidad v, es la suma de la fuerza eléctrica eE, y de la fuerza de Lorentz (3b):

$$\Delta \mathbf{f} = e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\}. \tag{3c}$$

La fuerza de Lorentz actúa no solamente sobre la carga elemental en movimiento (electrón o ion), sino también sobre cualquier carga macroscópica que se desplace por el campo magnético. Así, por ejemplo, si cargamos una esfera y la hacemos desplazarse por el campo magnético, aparece una fuerza que actúa sobre ella en dirección perpendicular a la de su movimiento y a la dirección del campo, y su magnitud vendrá determinada por la fórmula (3) o (3a). Sin embargo, como se puede ver fácilmente, en las cargas, campos y velocidades que habitualmente se logran, esta fuerza será pequeña. Así, por ejemplo, si una esfera de 1 cm de radio se carga hasta alcanzar el potencial de 3 000 V, su carga será igual a $e = VC = \frac{3000}{300} \cdot 1\ CGSE = 10\ CGSE$. Si esta esfera se desplaza perpendicularmente al campo de excitación magnética $H = 1\,000$ Oe a la velocidad de $v = 10^5$ cm/seg (¡velocidad de una bala!), aparece una fuerza:

$$\Delta f = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \cdot 10 \cdot 10^5 \cdot 1\,000 \text{ dinas} = \frac{1}{30} \text{ dinas},$$

es decir, es una fuerza muy insignificante, como se puede apreciar. A primera vista puede parecer que este resultado se halla en contradicción con la circunstancia de que sobre un conductor recorrido por una corriente, actúan en un campo magnético fuerzas considerables. Pero el caso es que en las corrientes de intensidad habitual, las cargas transportadas son muy grandes; es suficiente recordar que si la intensidad de la corriente es de 1 A, a través de la sección transversal del conductor se transporta por segundo 1 culombio, es decir, $3 \cdot 10^9$ unidades *CGSE*.

Veamos, además, la acción del campo magnético sobre un electrón que se mueve alrededor de una carga positiva inmóvil según una órbita circular de radio

r y con una velocidad angular ω. El movimiento del electrón se debe a la influencia de la fuerza de Coulomb $f = \frac{eE}{r^2}$, donde e es la carga del electrón, y E, la magnitud de la carga positiva. Llamemos w_n a la aceleración centrípeta del electrón; entonces, según la segunda ley de Newton, tendremos que

$$mw_n = \frac{eE}{r^2}. \tag{4}$$

Supongamos ahora que tenemos un campo magnético uniforme de excitación H perpendicular al plano de la órbita del electrón. En este caso, a la fuerza de Coulomb f se debe añadir la fuerza de Lorentz:

$$\Delta f = \frac{e}{c} vH.$$

Introduciendo la velocidad angular del electrón ω, obtenemos que $v = \omega r$, después de lo cual, la expresión de la fuerza de Lorentz adquiere la forma de

$$\Delta f = \frac{e}{c} r\omega H.$$

La fuerza de Lorentz va dirigida a lo largo del radio y, por consiguiente, si hay un campo magnético, la ecuación del movimiento (4) se sustituye por la ecuación:

$$mw_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H.$$

Introduzcamos ahora un sistema de coordenadas que gire a una velocidad angular constante $\Delta\omega$ alrededor del eje perpendicular al plano de la órbita del electrón. Si queremos escribir la ecuación respecto a este sistema que gira, a esta fuerza que actúa $f + \Delta f$ deberemos añadir la fuerza centrífuga de inercia $mr\Delta\omega^2$ y la fuerza de Coriolis $2mr\omega\Delta\omega$ (véase el § 24 del t. I).

De esta manera, la ecuación del movimiento respecto al sistema que gira, adquiere la forma:

$$mw_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\,\Delta\omega + mr\,\Delta\omega^2.$$

Considerando que $\Delta\omega$ es pequeño, despreciemos el miembro $mr\Delta\omega^2$; entonces

$$mw_n = \frac{eE}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega H + 2mr\omega\,\Delta\omega.$$

Si se elige la magnitud $\Delta\omega$ de manera que

$$\frac{e}{c} r\omega H + 2mr\,\omega\Delta\omega = 0, \tag{5}$$

la ecuación del movimiento respecto a un sistema que gira, adquiere la forma de

$$mw_n = \frac{eE}{r^2}.$$

Comparando esta ecuación con la (4) tenemos que con respecto a un sistema de coordenadas que gira y para el cual se cumple la condición (5), se conserva la forma primitiva de la ecuación del movimiento, y, por consiguiente, la trayectoria primitiva del electrón. De esto se deduce que *con respecto a un sistema de coordenadas inmóvil, el electrón continúa desplazándose en el campo magnético según una circunferencia de radio r, pero con otra velocidad angular* $\omega + \Delta\omega$.

www.elsolucionario.org

De la condición (5) hallamos el valor de $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = -\frac{eH}{2mc}. \qquad (6)$$

En el caso general, cuando la dirección del campo magnético H forma un ngulo cualquiera con el plano de la órbita, el electrón conserva el aspecto primitivo de la trayectoria con relación a un sistema de coordenadas que gire respecto al vector H con una velocidad angular $\Delta\omega$ constante. Esta perturbación de a órbita se denomina *precesión*, y la magnitud $\omega\Delta$, *velocidad angular de precesión*.

El resultado obtenido es justo, si el campo magnético exterior es de tal naturaleza, que la fuerza de Lorentz sea pequeña en comparación con la fuerza de Coulomb f, ya que sólo en este caso se puede despreciar el miembro $mr\Delta\omega^2$.

Debido a que la carga del electrón es de signo negativo, si $H>0$, según la órmula (6), la velocidad angular de precesión es $\Delta\omega>0$. Como, por otro lado, iendo $\omega<0$, el momento magnético del electrón que se desplaza según una órbita ircular, es positivo (véase el § 201), se llega a la siguiente conclusión: el campo nagnético exterior acarrea una disminución del valor numérico de la velocidad de raslación del electrón por la órbita, si el momento magnético de esta órbita stá dirigido según el campo. De resultas de ello disminuye también el momento nagnético inicial del electrón que gira. De esta manera, suponiendo la existenia de electrones que giran en el interior de los átomos y de las moléculas, se puede explicar el efecto diamagnético.

§ 215. Campo magnético de una carga en movimiento. Si un campo magnético exterior actúa sobre una carga en movimiento, a su vez, la carga en movimiento crea en el espacio que la circunda un campo magnético. Esto es debido a que la corriente eléctrica, que no es más que un conjunto de cargas en movimiento, crea en el espacio circundante un campo magnético. La magnitud del campo creado por la carga en movimiento se puede determinar partiendo de la fórmula de Biot-Savart-Laplace (véase el § 193), según la cual, un elemento de corriente Δl crea en el punto que se halla a la distancia r de este elemento, un campo magnético de excitación:

$$\Delta H = \frac{I\Delta l}{r^2}\operatorname{sen}\alpha,$$

donde α es el ángulo entre la dirección de la corriente y el radio vector r.

Sustituyendo en esta fórmula la intensidad I de la corriente por su valor en función de la magnitud de las cargas e en movimiento, de su número por unidad de volumen n_0 y de su velocidad v, es decir, suponiendo que $I=en_0vS$, obtenemos que

$$\Delta H = \frac{en_0vS\,\Delta l}{r^2}\operatorname{sen}\alpha,$$

donde S es el área de la sección transversal del conductor. Como por el elemento del conductor que examinamos, se desplazan $n'=n_0S\Delta l$ partículas cargadas, se puede considerar que cada una de ellas crea

un campo de excitación:

$$\Delta H = \frac{ev}{r^3} \operatorname{sen} \alpha. \qquad (1)$$

En esta fórmula, la velocidad v de la carga se considera con respecto al sistema de coordenadas en que se mide ΔH.

Las líneas de excitación magnética $\Delta \mathbf{H}$ del campo creado por una carga en movimiento, son perpendiculares al plano que contiene al vector velocidad **v** y al radio vector **r**. Si la carga en movimiento es positiva, la dirección de la excitación magnética $\Delta \mathbf{H}$ se determina mediante la regla del sacacorchos: si el sentido del movimiento de

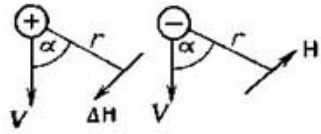


Fig. 262. Sentido de la excitación magnética $\Delta \mathbf{H}$ del campo creado por una carga que se desplaza a la velocidad **v**.

avance del sacacorchos lo hacemos coincidir con el de la velocidad **v**, el sentido de giro de su manilla nos dará el sentido de $\Delta \mathbf{H}$; si la carga en movimiento es negativa, el sentido de $\Delta \mathbf{H}$ será el opuesto (fig. 262). La fórmula (1), tal como se ha dado en este párrafo, es justa si se miden todas sus magnitudes en un mismo sistema de unidades, indiferentemente de que sea el *CGSM* o el *CGSE*.

Esto es debido a que la fórmula de Biot-Savart-Laplace sin coeficientes de ninguna clase, es justa tanto para el sistema *CGSM* como para el *CGSE*. Sin embargo, la fórmula de Ampere no tiene coeficiente numérico solamente en el sistema *CGSM* (véase el § 195), por eso, la fórmula de Lorentz (§ 214) también es justa solamente con unidades del sistema *CGSM*; si se quiere aplicar el sistema *CGSE*, el término de la derecha tiene que llevar el factor $1/c^2$.

Si se utiliza el sistema mixto de unidades midiendo la carga e en unidades *CGSE*, la magnitud ΔH, en oerstedios, v, en cm/seg y r en centímetros, hay que introducir el coeficiente $1/c$ en el término de la derecha de la fórmula (1):

$$\Delta H = \frac{1}{c} \frac{ev}{r^2} \operatorname{sen} \alpha. \qquad (1a)$$

La fórmula (1a) determina la excitación magnética en el punto que se halla a la distancia r de la carga en movimiento. Pero los valores de ΔH obtenidos por esta fórmula serán justos del todo solamente en el caso de distancias r y velocidades v no muy grandes; de lo contrario hay que tener en cuenta la velocidad finita de propagación del campo electromagnético.

La fórmula (1a), lo mismo que la fórmula de Lorentz, se puede escribir en forma vectorial. Como se ve en la fig. 262, la excitación magnética $\Delta\mathbf{H}$ tiene el mismo sentido que el producto vectorial $[\mathbf{v}\times\mathbf{r}]$, de donde

$$\Delta\mathbf{H}=\frac{e}{c}\,\frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{r}]}{r^3}\,. \tag{2}$$

Si al mismo tiempo se desplazan dos cargas, entre ellas, además de las fuerzas eléctricas de acción recíproca, surge una fuerza magnética de acción recíproca debida a que cada una de las cargas crea un campo magnético en el espacio que la circunda y la segunda carga se mueve en este campo magnético. Comparemos las magnitudes de estas fuerzas. Sean dos cargas e y e' de un mismo signo situadas a la distancia r una de otra. Según la ley de Coulomb, la fuerza de acción recíproca de estas cargas es

$$f_e=\frac{ee'}{r^2}\,. \tag{3}$$

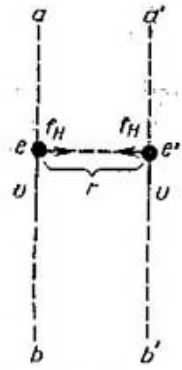


Fig. 263. Representación gráfica para calcular la acción recíproca de cargas que se desplazan.

En la forma indicada, la ley de Coulomb no lleva ningún coeficiente de proporcionalidad distinto de la unidad, es decir, se ha supuesto que las cargas e y e' se miden en el sistema *CGSE*.

Supongamos ahora que ambas cargas se desplazan según las rectas paralelas ab y $a'b'$ (fig. 263) a la misma velocidad v. La carga e, según la fórmula (1a), en el lugar en que está la segunda carga, crea un campo magnético, cuya excitación en unidades del sistema *CGSE* será

$$H=\frac{1}{c}\cdot\frac{ev}{r^2}\,.$$

Este campo será perpendicular al plano que contiene los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$.

Según la fórmula de Lorentz [(3a) del § 214], este campo actuará sobre la carga e' con una fuerza

$$f_H=\frac{1}{c}\,e'\,vH=\frac{ee'}{r^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2, \tag{4}$$

y esta fuerza estará dirigida hacia el lado de la carga e. Con una fuerza de igual magnitud actuará la carga e' sobre la e. Así tenemos que en la acción recíproca de dos cargas del mismo signo que se desplazan paralelamente una con respecto a la otra y a una velocidad constante, interviene, además de la fuerza de Coulomb, una fuerza magnética complementaria.

www.elsolucionario.org

Comparando las magnitudes de las fuerzas magnética y de Coulomb, (4) y (3), obtenemos que

$$\frac{f_H}{f_e} = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \qquad (5)$$

Como la relación de las dos fuerzas f_H/f_e es una magnitud sin dimensiones, de la fórmula (5) se deduce claramente que la constante electrodinámica c tiene las mismas dimensiones que la velocidad.

Como se ha indicado (véase el § 195), la constante electrodinámica c numéricamente es igual a la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas en el vacío. Teniendo esto en cuenta vemos que de las fórmulas (4) y (5) se deduce que la magnitud de la fuerza magnética de acción recíproca de las cargas viene determinada por el cuadrado de la relación de su velocidad v a la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas c. Como en la mayoría de los casos $v \ll c$, la fuerza magnética de acción recíproca entre las cargas generalmente es pequeña en comparación con la fuerza de Coulomb.

A la existencia de la fuerza magnética de acción recíproca entre las cargas expresada por la fórmula (4) se debe la atracción de dos conductores paralelos recorridos por corrientes de un mismo sentido.

§ 216. Estudio experimental del campo magnético de las cargas en movimiento. Históricamente, el revelar experimentalmente la existencia de un campo magnético de las cargas en movimiento ha tenido gran importancia, ya que ha confirmado la opinión de que, en los conductores, la corriente eléctrica es un transporte de cargas. Además, los resultados del estudio del campo magnético de las cargas en movimiento han sido muy importantes por la influencia que han ejercido en el desarrollo de la teoría del campo electromagnético y, en particular, en la teoría del éter.

La corriente eléctrica debida al transporte de cualquier cuerpo macroscópico cargado se denomina *corriente de convección*.

El que más plenamente ha estudiado el campo magnético de la corriente de convección, ha sido A. Eijenvald, profesor de la Universidad de Moscú, a principios de nuestro siglo.

El esquema del experimento de Eijenvald es el siguiente. Una lámina circular B de material aislador (fig. 264) está recubierta por los bordes con una hoja de estaño a en forma de anillo. La placa se fija a un eje de rotación O con contacto de corredera, con ayuda del cual el revestimiento a se carga de una batería hasta un potencial constante determinado. Este revestimiento a es una de las armaduras del condensador; la segunda armadura es la caja metálica inmóvil

AC, que al mismo tiempo desempeña la función de protección electrostática.

Al disco B junto con el anillo a se le comunicaba un rápido movimiento. De esta manera, la carga eléctrica concentrada en el anillo a se hallaba en movimiento y creaba un campo magnético en el espacio circundante. La excitación magnética H de este campo se medía con ayuda de la aguja magnética b suspendida de un hilo largo y fino. El giro de la aguja se medía por la desviación del rayo de luz reflejado en el espejo s fijo en el mismo hilo. La aguja magnética se situaba en el interior de una caja metálica para preservarla contra las posibles perturbaciones de parte del campo eléctrico. La excitación magnética medida de esta manera estaba en completa consonancia con la calculada según la fórmula (1) del § 215.

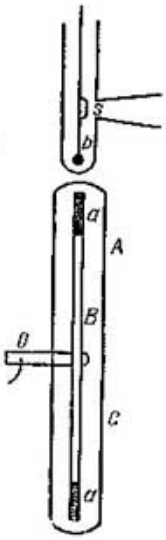


Fig. 264. Esquema del experimento de Eijenvald.

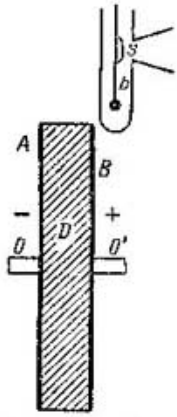


Fig. 265. Esquema del experimento de Eijenvald para determinar el campo magnético de un dieléctrico en movimiento.

El profesor A. Eijenvald también investigó experimentalmente el campo magnético creado al desplazarse un dieléctrico con cargas superficiales que aparecen al polarizarse éste. En una de las variantes de su experimento, Eijenvald hizo girar alrededor del eje OO' (fig. 265) un condensador de dos armaduras circulares A y B y con un dieléctrico D entre ellas. El condensador junto con el dieléctrico giraba formando un todo. Supongamos que la aguja magnética b está tan cerca de una de las armaduras del condensador, que prácticamente mida el campo magnético creado solamente por

el movimiento de esta armadura y de la superficie más próxima del dieléctrico. Supongamos también que el condensador está cargado hasta la diferencia de potencial $V_1 - V_2$. Entonces, en su armadura surgirán unas cargas de densidad superficial:

$$\sigma = C(V_1 - V_2)\,\varepsilon, \qquad (1)$$

donde ε es la constante dieléctrica del medio entre las armaduras, y C, una constante que depende solamente de las dimensiones y forma del condensador. En la superficie del dieléctrico colindante con la armadura surgirán cargas superficiales de signo contrario. Según lo dicho en el § 139, la densidad de estas cargas será:

$$\sigma' = \frac{4\pi\varkappa\sigma}{\varepsilon},$$

donde $\varkappa$ es la susceptibilidad eléctrica. Como la susceptibilidad eléctrica $\varkappa$ está relacionada con la constante dieléctrica ε mediante la ecuación $\varepsilon = 1 + 4\pi\varkappa$, la ecuación anterior se puede escribir de la forma:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\,\sigma$$

o, sustituyendo σ por su valor según la (1):

$$\sigma' = C(V_1 - V_2)(\varepsilon - 1). \qquad (2)$$

Las densidades σ y σ' de las cargas tienen signos contrarios, por eso, al desplazarse las armaduras y el dieléctrico crean campos magnéticos de sentido contrario. El valor resultante de la excitación magnética H vendrá determinado por la diferencia de densidades de las cargas $\sigma - \sigma'$.

Según las ecuaciones (1) y (2) tenemos que

$$\sigma - \sigma' = C(V_1 - V_2).$$

Como se ve, este valor de la diferencia de densidades $\sigma - \sigma'$ no depende de la constante dieléctrica ε. De esta manera tenemos que para un condensador de dimensiones, formas y diferencia de potencial $V_1 - V_2$ dadas, gracias a la polarización del dieléctrico, la carga total que crea el campo magnético no depende de la naturaleza del dieléctrico. Efectivamente, Eijenvald observó que al girar los discos A y B cargados a determinada diferencia de potencial $V_1 - V_2$, el campo magnético creado por ellos no dependía de la naturaleza del dieléctrico D que se colocaba entre ellos. Con esto se demostró también que las cargas aparentes del dieléctrico polarizado, en su movimiento crean un campo magnético en el espacio que las rodea.

Por último, el académico A. Yoffe midió el campo magnético de los electrones libres en movimiento. Un cátodo caliente K (fig. 266) era el manantial de electrones que después se aceleraban en

www.elsolucionario.org

el espacio entre el cátodo K y el ánodo A. Luego, después de pasar por el orificio a, los electrones se desplazaban uniformemente sin colisiones. Al final del trayecto iban a parar a la caja de Faraday F y le comunicaban su carga; la corriente creada por éstas se medía en el galvanómetro G. Aproximadamente en la parte media del tubo se colocaba un sistema astático de imanes. El campo magnético excitado por el flujo de electrones causaba una desviación de estos imanes.

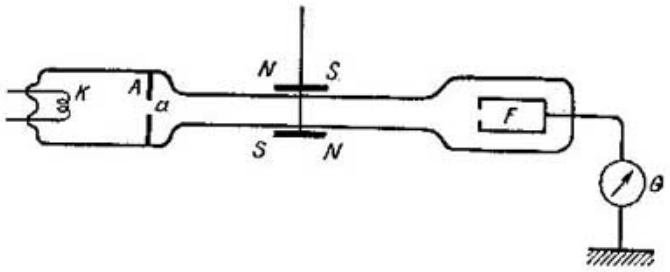


Fig. 266. Esquema del experimento de Yoffe para determinar el campo magnético de un haz de electrones.

El haz de electrones se podía sustituir por un conductor recorrido por una corriente eléctrica. Para obtener esta misma desviación de las agujas magnéticas había que hacer pasar por el conductor una corriente de intensidad igual a la indicada por el galvanómetro G en el caso del haz electrónico. Así se demostró la equivalencia del fenómeno de excitación del campo magnético por un haz electrónico y por la corriente habitual de un conductor.

Es importante señalar que en las fórmulas del § 215, por velocidad v de la carga hay que entender la velocidad *respecto al sistema de coordenadas en que se mide la fuerza f*. A fines del siglo pasado, cuando se suponía que el portador de los procesos electromagnéticos era el éter, que llenaba todo el espacio formando un medio continuo, se creía que el campo magnético debía aparecer al moverse las cargas *respecto al éter*. Por lo tanto, cabía esperar que la observación del campo magnético de las cargas permitiera poner de manifiesto el movimiento respecto al éter. Como el éter se consideraba un medio que llenaba todo el espacio al alcance de las observaciones, este movimiento debía considerarse absoluto. Según el principio mecánico de la relatividad (véase el § 19 del t. I) era imposible revelar el movimiento absoluto de traslación con ayuda de procesos mecánicos.

En el § 215 hemos examinado el movimiento de dos cargas e y e' recorriendo trayectorias paralelas a la misma velocidad v. Además de actuar con la fuerza de Coulomb, estas cargas actúan recíprocamente con una fuerza magnética:

$$f_H = \frac{ee'}{r^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2. \qquad (3)$$

En este caso sobre todo se ve claramente la alternativa de si la creación del campo magnético se debe: 1) al movimiento relativo de la carga respecto al siste-

ma de coordenadas en que se mide la fuerza f, o 2) al movimiento respecto al éter. Efectivamente, en el primer caso no debe haber fuerzas magnéticas si ambas cargas están inmóviles respecto al sistema dado de coordenadas, aunque junto con este sistema intervengan en el movimiento general de traslación. En el segundo caso las fuerzas magnéticas deben existir incluso cuando las cargas estén en reposo respecto al sistema de coordenadas que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme. Supongamos que en un laboratorio de la esfera terrestre hay cargas inmóviles respecto a la misma. La esfera terrestre se desplaza en su movimiento diario y anual junto con todo el sistema solar respecto a otras estrellas. Se pregunta: ¿existen, además de las fuerzas de Coulomb, otras fuerzas magnéticas complementarias de acción recíproca entre las cargas? Basándonos en la primera suposición, no debe haber esta clase de acción recíproca; en el segundo caso, esta fuerza complementaria debe existir. Directamente no se puede revelar esta fuerza. Como se ve de la fórmula (3), esta fuerza se diferencia de la de Coulomb en el factor $\left(\frac{v}{c}\right)^2$, donde v es la velocidad de las cargas y c es la constante electrodinámica, que es igual a la velocidad de propagación de las perturbaciones electromagnéticas en el vacío, o, lo que es lo mismo, igual a la velocidad de la luz. Debido a que la velocidad de la luz es muy grande ($3 \cdot 10^{10}$ cm/seg), esta relación, como se ha indicado, generalmente es muy pequeña. No obstante, se puede concebir una variante del experimento en que se deban observar estas fuerzas complementarias. En 1904 Trouton y Noble propusieron y realizaron un experimento de esta clase.

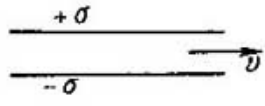


Fig. 267. Esquema del experimento de Trouton y Noble.

Sea un condensador plano desplazándose a una velocidad v paralela a las armaduras del mismo (fig. 267). Si el condensador está cargado, cada una de sus placas creará un campo magnético en el espacio que la rodea. Por la fórmula (1a) del § 125 se puede calcular que la excitación magnética H en el espacio entre las placas del condensador (si las densidades superficiales de sus cargas son respectivamente iguales a $+\sigma$ y a $-\sigma$ y la permeabilidad magnética del medio entre las mismas es $\mu=1$) es igual a

$$H = \frac{4\pi}{c} \sigma v.$$

Además, entre las placas del condensador hay un campo eléctrico de intensidad

$$E = 4\pi\sigma.$$

(Se considera que la constante dieléctrica del medio entre las placas es $\varepsilon=1$).

Fuera del condensador, la excitación magnética y la intensidad del campo eléctrico son iguales a cero. En el § 138 se ha visto que el campo electrostático posee una energía de densidad volumétrica $ED/8\pi$. De donde se obtiene que la energía eléctrica de todo el condensador es

$$W_e = 2\pi\sigma^2 V,$$

donde V es el volumen del espacio comprendido entre las placas del condensador.

En el § 227 veremos que el campo magnético también posee una energía de densidad volumétrica $HB/8\pi$, de donde la energía magnética del condensador será

$$W_m = 2\pi\sigma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 V.$$

Por consiguiente, la energía total del condensador será

$$W = W_e + W_m = 2\pi\sigma^2 V + 2\pi\sigma^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2 V$$

o

$$W = W_e \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Si la velocidad v forma un ángulo α con las placas del condensador, habrá que tener en cuenta solamente la proyección de la velocidad sobre la dirección paralela a estas placas con lo cual la fórmula (4) adquiere la forma:

$$W = W_e \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cos^2\alpha\right]. \tag{4a}$$

Así tenemos que la energía del condensador depende del ángulo α y su valor será el mínimo cuando sea $\alpha = \frac{\pi}{2}$, es decir, cuando el condensador se oriente perpendicularmente a la dirección del movimiento. El estado más estable corresponderá al mínimo de energía; por eso el condensador tendrá a volver a la posición en que $\alpha = \frac{\pi}{2}$. El momento del par orientador es igual a la derivada de la energía respecto al ángulo α tomada con signo negativo:

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = W_e \left(\frac{v}{c}\right)^2 \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Trouton y Noble intentaron descubrir la existencia de este momento de fuerzas de la siguiente manera. Un pequeño condensador se suspendía de un hilo fino y largo. El condensador se cargaba hasta alcanzar la diferencia de potencial de 3 000 V. Con ayuda de un rayo de luz reflejado de un espejo unido al condensador, observaron sus oscilaciones de torsión. De aquí dedujeron la posición de equilibrio del condensador. Esta posición de equilibrio se determinaba por las propiedades elásticas del hilo y la existencia del momento M. La dirección y velocidad del movimiento de la Tierra respecto al éter son desconocidas. Pero por lo menos, en el transcurso de un día, el ángulo α varía debido a la rotación de la Tierra y, por consiguiente, debía variar la posición de equilibrio del condensador. Las observaciones demostraron que no había ninguna clase de desviaciones sistemáticas durante el día. Las desviaciones diarias, según su magnitud, no eran superiores a las que podrían ser originadas por el movimiento de la Tierra respecto al éter a la velocidad de 12 km/seg. Mientras que en la realidad, la velocidad del movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol es de 30 km/seg. Los experimentos se repitieron en distintas estaciones del año de manera que no hubiese lugar a ninguna posibilidad de compensación recíproca casual de las velocidades de la Tierra y del movimiento de todo el sistema solar en el espacio. Después se repitió reiteradamente este experimento. En 1926, Tomasek elevó a tal grado la sensibilidad del método de Trouton y Noble, que podría haber notado el movimiento de la Tierra respecto al éter a la velocidad de 0,5 km/seg. Todas las observaciones de Tomasek tampoco revelaron la presencia del momento M.

Así, las observaciones demostraron sin lugar a dudas que el campo magnético de las cargas es debido a su movimiento respecto al sistema en que se lleva a cabo la medición. Los experimentos sobre los fenómenos electromagnéticos, lo mismo que los experimentos puramente mecánicos, no permiten revelar el movimiento absoluto uniforme de un sistema en el espacio. El éter no puede servir de sistema de referencia (compárese con lo dicho en el § 152). Después veremos (t. III)

www.elsolucionario.org

que las observaciones de los fenómenos luminosos tampoco permiten revelar el movimiento absoluto uniforme. Todos estos hechos fueron generalizados en la teoría de la relatividad de Einstein, que aclaró totalmente la función de la relatividad del movimiento.

La esencia de la teoría de la relatividad se examinará detalladamente en el t. III. Aquí solamente señalaremos que la afirmación de la dependencia de los procesos físicos respecto a la velocidad relativa de los sistemas de referencia, de ninguna manera está relacionada con el falso relativismo filosófico que afirma la relatividad de todos nuestros conocimientos. La teoría de la relatividad revela al fin y al cabo la independencia de las leyes físicas respecto al sistema de referencia en que se formulan (ofrece el método de hallar la forma invariante, o, como se ha convenido en denominar, "covariante", de las leyes respecto al paso de un sistema de referencia a otro que se desplaza en movimiento rectilíneo y uniforme respecto al primero).

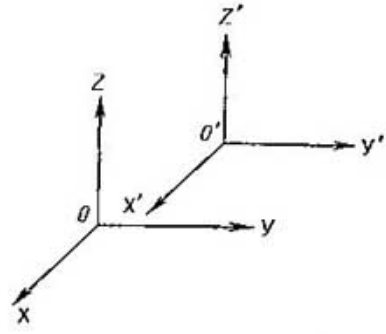


Fig. 268. Dos sistemas de coordenadas.

Sean dos sistemas de referencia: XYZ y $X'Y'Z'$ (fig. 268). Supongamos que el sistema $X'Y'Z'$ se desplaza respecto al XYZ a la velocidad constante $\mathbf{v}$. Llamemos E y H respectivamente a los valores de la intensidad del campo eléctrico y a la excitación magnética del campo medidas en el sistema XYZ, y E' y H', a los correspondientes valores medidos en el sistema $X'Y'Z'$. Supongamos que en el sistema $X'Y'Z'$ hay unos manantiales de campos eléctricos y magnéticos, cuyas intensidad y excitación respecto a este sistema de coordenadas son E' y H'. Entonces, en el sistema $X'Y'Z'$, según la fórmula de Lorentz, sobre la carga e, inmóvil en el sistema de coordenadas XYZ, actuará una fuerza:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{E}'e + \frac{1}{c}e[\mathbf{H}' \times \mathbf{v}]. \tag{5}$$

En comparación con la fórmula (3c) del § 214, aquí se ha cambiado el orden de los factores del producto vectorial, ya que la velocidad de la carga respecto al sistema $X'Y'Z'$ es igual a $\mathbf{v}$.

Si la velocidad v es pequeña en comparación con la de la luz c, la fuerza $\mathbf{f}'$ será igual a la fuerza $\mathbf{f}$ medida en el sistema XYZ. Así tenemos que en el sistema de coordenadas XYZ sobre la carga e, inmóvil respecto a este sistema, actúa una fuerza

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}'e + \frac{1}{c}e[\mathbf{H}' \times \mathbf{v}]. \tag{5a}$$

En electrostática, la intensidad del campo eléctrico se mide mediante la relación entre la fuerza f, que actúa sobre la carga, y la magnitud de la carga: f/e. Por eso, la presencia de la fuerza f dada por la fórmula (5a) equivale a lo mismo que si en el sistema XYZ existiese un campo eléctrico de intensidad:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \frac{1}{c}[\mathbf{H}' \times \mathbf{v}]. \tag{6}$$

En este mismo sistema de coordenadas XYZ, además de la excitación magnética H' hay otro campo magnético complementario debido a que cualquier carga e' inmóvil en el sistema $X'Y'Z'$ se mueve con respecto al sistema XYZ a la

velocidad v. La excitación de este campo complementario es

$$\mathbf{H}_1=\frac{e'}{c}\frac{[\mathbf{v}\times\mathbf{r}]}{r^3}=\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times\frac{e'\mathbf{r}}{r^3}\right].$$

Pero $e'\mathbf{r}/r^3$ es la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}'$ medida en el sistema $X'Y'Z'$ en el punto que se halla a la distancia r de la carga e'. Por lo tanto tenemos que

$$\mathbf{H}_1=\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{E}']$$

y, por consiguiente, la excitación magnética total $\mathbf{H}$ en el sistema XYZ será

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}'+\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{E}']. \tag{7}$$

Las fórmulas (6) y (7) expresan la relación entre la intensidad del campo eléctrico y la excitación magnética de magnético medidas en dos sistemas que se desplazan uno respecto al otro. Estas fórmulas permiten analizar cualquier caso de movimiento relativo.

Supongamos, por ejemplo, que en el sistema $X'Y'Z'$ se tiene solamente la carga e' inmóvil respecto a este sistema. En cierto punto B de este sistema a la distancia r de la carga, la intensidad del campo eléctrico será $E'=\frac{e'\mathbf{r}}{r^3}$. En el sistema $X'Y'Z'$ no habrá ningún campo magnético ($H'=0$). Por consiguiente, si en el punto B se coloca otra carga e, inmóvil también respecto al sistema $X'Y'Z'$, entre las cargas no habrá ninguna otra fuerza aparte de la de Coulomb, aunque el sistema $X'Y'Z'$ se desplace a la velocidad v respecto al sistema XYZ. Esto corresponde a las condiciones del experimento de Trouton y Noble y a su resultado negativo.

Sin embargo, en el sistema XYZ se debe observar, según la fórmula (7), además del campo eléctrico, un campo magnético de excitación:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{E}']=\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times\frac{e'\mathbf{r}}{r^3}\right]. \tag{8}$$

Este campo se puede notar colocando en el punto B una aguja magnética. Un esquema de esta clase corresponde al experimento de Eijenvald, en el cual la carga que se mueve con respecto a un sistema de coordenadas crea un campo magnético en este sistema.

Por último, en el punto B se puede colocar una carga e en lugar de una aguja magnética. Si esta carga está inmóvil respecto al sistema XYZ, sobre ella, según la fórmula (6), actuará solamente un campo eléctrico de intensidad $\mathbf{E}=\mathbf{E}'$. Esto corresponde al hecho de que sobre las cargas eléctricas inmóviles no actúa el campo magnético. Sin embargo, si a la carga e se le comunica un movimiento respecto al sistema XYZ de velocidad $\mathbf{v}_1$, según la fórmula de Lorentz sobre esta carga actuará, además, una fuerza:

$$f=\frac{e}{c}[\mathbf{v}_1\times\mathbf{H}]. \tag{9}$$

Si el vector velocidad $\mathbf{v}_1$ se hace igual al vector $\mathbf{v}$, la carga e permanecerá inmóvil respecto a la carga e', pero ambas cargas se moverán con respecto al sistema de coordenadas XYZ según rectas paralelas a la misma velocidad. Si, para simplificar, suponemos además que la velocidad v es perpendicular a $\mathbf{r}$, la fórmula (8) adquirirá la forma:

$$H=\frac{1}{c}\frac{e'v}{r^2},$$

y la fórmula (9), la forma:

$$f = \frac{ee'}{r^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2,$$

que coincide con la fórmula(3) y corresponde al caso de atracción de dos conductores paralelos recorridos por corrientes de una misma dirección.

Las fórmulas (6) y (7) de transformación de los campos son justas solamente para el caso cuando la velocidad v de las cargas es pequeña en comparación con la de la luz c. La teoría de la relatividad da fórmulas generales de paso de un sistema de referencia a otro, justas para cualesquiera velocidades.

§ 217. Efecto Hall. La existencia de la fuerza de Lorentz actuando sobre una carga eléctrica que se desplaza por un campo magnético, permite explicar el siguiente fenómeno: al fluir una corriente I a lo largo de una lámina perpendicular a las líneas de un campo magnético exterior de excitación H (fig. 269), entre los bordes A y B de la lámina surge una diferencia de potencial $V_A - V_B$. Este fenómeno se denomina *efecto Hall*.

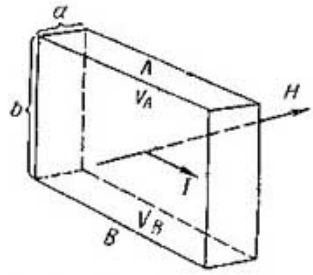


Fig. 269. Diferencia de potencial $V_A - V_B$ en el campo magnético.

La diferencia de potencial creada $V_A - V_B$ es directamente proporcional al producto de la intensidad de la corriente por la excitación magnética IH e inversamente proporcional al espesor de la lámina d:

$$V_A - V_B = K\frac{IH}{d}, \qquad (1)$$

donde K es una constante.

Si la corriente se debe al transporte de cargas e, en el campo magnético H actuará sobre ellas la fuerza de Lorentz que las desvía en dirección perpendicular a la de la corriente. Debido a ello, las cargas empezarán a acumularse hacia el borde A de la lámina hasta que el campo eléctrico creado por ellas equilibre la acción de la fuerza magnética.

Según la fórmula de Lorentz [(3) del § 214], la fuerza que actúa sobre la carga, (en nuestro caso $\alpha = \frac{\pi}{2}$), será

$$f_H = e\bar{v}H,$$

donde $\bar{v}$ es la velocidad media de las cargas en la dirección en que fluye la corriente.

La intensidad del campo eléctrico creado al surgir la diferencia de potencial $V_A - V_B$, será

$$E = \frac{V_A - V_B}{b},$$

donde b es la anchura de la lámina.

www.elsolucionario.org

Por consiguiente, la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga, será

$$f_e = e\frac{V_A - V_B}{b}.$$

El estado estacionario tendrá lugar cuando las fuerzas sean iguales: $f_H = f_e$, de donde obtenemos la relación:

$$e\frac{V_A - V_B}{b} = e\bar{v}H. \qquad (2)$$

La velocidad media $\bar{v}$ de las cargas en el conductor se obtendrá utilizando la relación entre la intensidad I de la corriente, el número de cargas n por unidad de volumen y las velocidades de sus desplazamientos (véase el § 214):

$$I = bdne\bar{v}, \quad \text{de donde,} \quad \bar{v} = \frac{I}{bdne}.$$

Colocando este valor de $\bar{v}$ en la (2), obtenemos que

$$V_A - V_B = \frac{1}{ne}\cdot\frac{IH}{d}. \qquad (3)$$

De esta manera, en correspondencia con la fórmula empírica (1), la magnitud $V_A - V_B$ es directamente proporcional al producto IH e inversamente proporcional al espesor d de la lámina. La constante K ha resultado ser igual a

$$K = \frac{1}{ne}. \qquad (4)$$

De esto se ve que el signo de la constante K debe depender del signo de la carga e. El signo positivo de la constante K indica que el potencial del punto A (fig. 269) es mayor que el del punto B.

Según lo dicho en el § 161, la conductibilidad eléctrica de los metales es debida a la presencia de electrones libres, teniendo en cuenta que por cada átomo del metal hay aproximadamente un electrón libre. De esta manera, para los metales, la constante K debe ser negativa y su valor numérico debe venir determinado por la carga del electrón e y el número de electrones libres n por unidad de volumen del metal.

La deducción de la fórmula (4) para la constante K no es exacta. Efectivamente, no se puede expresar la fuerza f_H que actúa sobre una carga en un campo magnético, en función de la velocidad media $\bar{v}$ de la carga. Si se tiene en cuenta que en el recorrido libre del electrón su velocidad en el sentido en que fluye la corriente, aumenta uniformemente, en la expresión para el valor de K tendrá que entrar, además, el factor numérico 2/3; entonces

$$K = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{ne}. \qquad (4a)$$

Llamemos n_0 al número de átomos por unidad de volumen del metal y supongamos que $n=zn_0$; entonces z indicará en términos medios qué número de electrones libres le corresponde a un átomo. El número de átomos por unidad de volumen n_0 es fácil de relacionar con el número de Avogadro N. Efectivamente, la masa de un átomo, por un lado, es igual a A/N, donde A es el peso atómico, y de otro lado, es igual a ρ/n_0, donde ρ es la densidad. De aquí que

$$\frac{\rho}{n_0}=\frac{A}{N} \quad \text{o} \quad n_0=\frac{N\rho}{A},$$

de donde

$$n=\frac{N\rho}{A}\cdot z.$$

Colocando este valor de n en la (4a), obtenemos que

$$K=\frac{2}{3}\frac{A}{Ne\rho z};$$

Pero $Ne=-F$, donde F es el número de Faraday; de donde para la constante K en los metales obtenemos que

$$K=-\frac{2}{3}\frac{A}{F\rho z}. \tag{5}$$

Efectivamente, muchos metales nos dan una constante K negativa de magnitud esperada. Del valor de K hallado en el experimento se puede determinar la magnitud z. Para una serie de metales monovalentes z es igual aproximadamente a la unidad; así, por ejemplo, para el sodio el valor es $z=0{,}65$, para la plata, $z=0{,}75$, para el oro, $z=0{,}9$. Para los metales de valencia más elevada z es mayor, por ejemplo, para el aluminio, $z=2{,}0$. Sin embargo, hay metales (como el Zn, Cd, Pb, Fe y otros) que dan un valor positivo de la constante K. Este hecho es incomprensible desde el punto de vista de la teoría elemental aducida y sólo se puede explicar basándose en la mecánica cuántica.

El efecto Hall solamente se observa en los conductores de conductibilidad electrónica. En los electrólitos, con su conducción iónica, no hay ningún efecto perceptible. Esto se explica porque los iones pesados poseen una velocidad mucho menor que los electrones.

En los semiconductores, la constante K aumenta intensamente con la disminución de la temperatura, lo cual corresponde a la rápida disminución del número de electrones libres por unidad de volumen al disminuir la temperatura. En los semiconductores, el signo del efecto Hall nos permite juzgar si la conducción es por exceso (electrónica) o por huecos (véase el § 171). Para el semiconductor de conducción mixta, el fenómeno tiene un carácter más complicado.

§ 218. Determinación de la carga específica de los electrones. La ecuación de la fuerza de Lorentz nos permite determinar la relación de la carga e de una partícula móvil respecto a su masa m. Esta relación e/m se denomina *carga específica*.

Sea un haz de partículas cargadas que se desplazan a velocidad constante v en el vacío y según el plano perpendicular a la dirección de la excitación magnética H de un campo exterior (fig. 270; aquí la excitación magnética H es perpendicular al plano del dibujo).

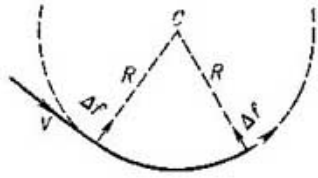


Fig. 270. Fuerza Δf actúa sobre la carga que se desplaza perpendicularmente a la dirección del campo magnético.

El ángulo formado entre la dirección de la velocidad v de la partícula y la excitación magnética H es igual a $\pi/2$, y, según la fórmula (3a) del § 214, sobre la partícula actúa una fuerza constante:

$$\Delta f = \frac{1}{c} evH. \qquad (1)$$

Esta fuerza será perpendicular a la dirección del vector velocidad v de la partícula durante todo el transcurso del movimiento. Como en este caso, sobre la partícula, según las condiciones establecidas, no actúa ninguna otra fuerza, la magnitud de su velocidad v será constante y, por consiguiente, la trayectoria de la partícula será una circunferencia. Si el radio de esta circunferencia es R, la aceleración centrípeta de la partícula será igual a v^2/R y, según la segunda ley de Newton, la relación entre esta aceleración y la fuerza Δf vendrá expresada por la ecuación:

$$\Delta f = \frac{mv^2}{R}.$$

Sustituyendo en esta ecuación la fuerza Δf por su valor según la (1), tenemos que

$$\frac{1}{c} evH = \frac{mv^2}{R},$$

de donde, para la carga específica de la partícula hallamos que

$$\frac{e}{m} = \frac{cv}{RH}. \qquad (2)$$

www.elsolucionario.org

El radio de curvatura R de la trayectoria de las partículas y la excitación magnética H se pueden medir directamente. Así, para la determinación de e/m queda por saber la velocidad v de la partícula. Esta velocidad se puede determinar de distintas maneras. Se puede determinar, por ejemplo, por la diferencia aceleradora de potencial $V_1 - V_2$. Al desplazarse la partícula por el vacío, todo el trabajo de las fuerzas eléctricas $e\,(V_1 - V_2)$ se invierte en aumentar su energía cinética $mv^2/2$, de donde

$$\frac{mv^2}{2} = e\,(V_1 - V_2)$$

y, por consiguiente,

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \sqrt{V_1 - V_2}\,.$$

Colocando este valor de v en la (2) y elevando al cuadrado los términos de la derecha y de la izquierda, obtenemos, después de simplificar, que

$$\frac{e}{m} = \frac{2c^2}{R^2 H^2}\,(V_1 - V_2). \qquad (3)$$

Thomson utilizó otro método para despejar la velocidad v de la ecuación de la carga específica e/m. Para ello hizo desplazarse al mismo tiempo el haz de partículas por un campo magnético y

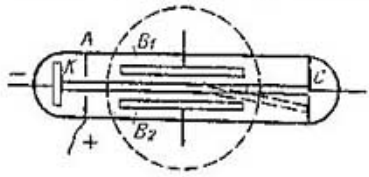


Fig. 271. Esquema del experimento de Thomson para determinar la carga específica del electrón.

otro eléctrico perpendicular al primero. El esquema del experimento de Thomson realizado para determinar la carga específica del electrón viene representado en la fig. 271, donde K es el cátodo, fuente de electrones; y A, un diafragma para crear el haz electrónico. Entre K y A se ha aplicado una diferencia de potencial que comunica a los electrones la velocidad v con que después se desplazan por el espacio tras el diafragma. La circunferencia de puntos indica la zona donde se excita un campo magnético H perpendicular al plano del dibujo. Este campo se obtiene con ayuda de un electroimán entre cuyos polos se coloca el tubo. B_1 y B_2 son dos placas paralelas, entre las cuales se crea un campo eléctrico. C es una pantalla fluorescente en que una mancha luminosa determina el lugar sobre el cual incide el haz catódico. Supongamos que la dirección del campo

magnético desvía hacia abajo al haz electrónico. Entonces, si solamente hay un campo magnético, los electrones se desplazarán por la zona del campo según una circunferencia (línea de puntos) y la mancha luminosa de la pantalla fluorescente se desplazará hacia abajo. Por la magnitud de esta desviación se calcula el radio de curvatura R. Después, al mismo tiempo que el campo magnético, se crea un campo electrostático entre las placas B_1 y B_2 de intensidad E y de tal dirección, que la fuerza eléctrica eE que actúa sobre el electrón, sea de sentido opuesto a la de la fuerza magnética Δf (en nuestro caso la fuerza eléctrica debe ir dirigida hacia arriba). La magnitud del campo eléctrico se elige de manera que el haz de electrones no sufra ninguna desviación, lo cual tendrá lugar cuando sean iguales las fuerzas eléctrica y magnética:

$$eE = \frac{1}{c} evH, \quad \text{de donde} \quad v = \frac{cE}{H}.$$

Colocando este valor de v en la (2), hallamos que

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2 E}{RH^2}.$$

De esta manera, basándose en la intensidad del campo eléctrico E, en la excitación H del magnético y en el radio R de curvatura se determina la carga específica e/m.

Existe una serie de variantes del método de Thomson (véase el texto de cuerpo menor), cuyos fines son elevar la exactitud de las mediciones. Como ya se ha indicado, a pequeñas velocidades de electrones tenemos que

$$\frac{e}{m} = 5{,}273 \cdot 10^{17} \frac{\text{unidades } CGSE \text{ de carga}}{g}.$$

De esta ecuación, por el valor conocido de la carga e del electrón, se calcula su masa m.

Si los electrones se desplazan a grandes velocidades, se hace perceptible la dependencia entre la masa y la velocidad en correspondencia con el principio de la relatividad, y, como resultado de ello, la relación e/m disminuye con el aumento de la velocidad. Como las velocidades de los electrones pueden ser muy grandes, la disminución de e/m con el aumento de la velocidad resulta completamente perceptible y es una confirmación experimental de la relación de dependencia entre la masa y la velocidad. Para los electrones, una investigación experimental minuciosa de la relación e/m en función de la velocidad ha demostrado que se halla en muy buena concordancia con las deducciones teóricas.

En la fig. 272 se representan con puntos las mediciones de la masa del electrón a diferentes velocidades; la curva de línea continua

representa la dependencia entre la masa y la velocidad según la fórmula de la teoría de la relatividad:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

donde m es la masa a la velocidad dada v; m_0, la masa correspondiente a una velocidad infinitamente pequeña ("masa en reposo"), y $\beta = \frac{v}{c}$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Como se ha indicado en la pág. 160, la "masa en reposo" del electrón es

$$m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-28}\ g.$$

Cuando se descubrió la relación de dependencia entre la masa y la velocidad, muchos científicos burgueses intentaron aprovechar este hecho para fundamentar la falsa afirmación de que la materia, al parecer, desaparece. Desenmascarándolos, Lenin escribió *:«"La materia desaparece": quiere decir que el límite hasta el que conocimos la materia hasta ahora se esfuma, y que nuestro conocimiento

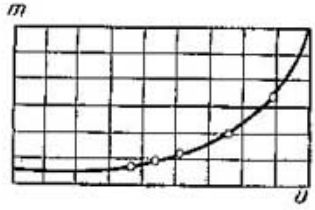


Fig. 272. Dependencia entre la masa del electrón y su velocidad.

se profundiza; desaparecen propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia"».

Veamos ahora el método de determinación de la magnitud e/m mediante el *enfoque de un haz de electrones por un campo magnético longitudinal*. Sea un electrón que se desplaza a una velocidad constante v que forma un ángulo α con la dirección del campo magnético H. En este caso se determina fácilmente el aspecto que adquiere la trayectoria del electrón, si descomponemos su movimiento en dos: uno a lo largo del campo magnético y otro, perpendicular al mismo. La componente de la velocidad que va a lo largo del campo magnético es $v_{\parallel} = v \cos \alpha$, y la componente perpendicular al mismo es $v_{\perp} = v \operatorname{sen} \alpha$.

* V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Ediciones Pueblos Unidos, Uruguay, 1948, pág. 290.

www.elsolucionario.org

La proyección del trayecto recorrido por el electrón sobre el plano perpendicular a H es una circunferencia, cuyo radio viene determinado por la relación (2):

$$R = \frac{cv_{\perp} m}{eH}. \tag{4}$$

La proyección del movimiento del electrón sobre la dirección paralela a **H** será un movimiento uniforme de velocidad $v_{\parallel}$, ya que en el campo magnético no hay ninguna componente de fuerza que actúe sobre la carga a lo largo del campo. De esta manera tenemos que la propia trayectoria del electrón será una *espiral*.

El tiempo t necesario para que el electrón recorra una vuelta de esta espiral, será:

$$t = \frac{2\pi R}{v_{\perp}}.$$

Sustituyendo en esta ecuación R por su valor según la (4) obtenemos que

$$t = \frac{2\pi c}{\frac{e}{m} H}. \tag{5}$$

Así pues, el tiempo t no depende ni de la magnitud, ni de la dirección de la velocidad del electrón v, sino que viene determinado solamente por la excitación magnética H y la carga específica del electrón e/m. En esta ecuación se basa el método de determinación de e/m, el cual consiste en lo siguiente.

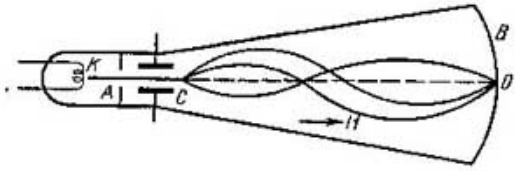


Fig. 273. Esquema del aparato para determinar la carga específica del electrón por el método del enfoque magnético (método de Busch).

Los electrones emitidos por el cátodo caliente K situado en el interior de un tubo en el que se ha hecho el vacío (fig. 273), pasan a través del orificio del diafragma A. Entre el cátodo K y el diafragma A se aplica un campo acelerador de diferencia de potencial $V_1 - V_2$. De esta manera se crea un haz de electrones, cuya velocidad v se determina por la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2} mv^2 = e(V_1 - V_2). \tag{6}$$

Después, el haz de electrones pasa entre las armaduras del condensador C, entre las cuales se excita un campo eléctrico variable de intensidad E. Solicitados por este campo variable, los electrones se desviarán, en diferentes instantes de tiempo, en distintos ángulos α con respecto al eje de la instalación. Entre el condensador C y la pantalla fluorescente B se excita un campo magnético longitudinal mediante un solenoide, en cuyo interior se coloca el tubo. Según lo dicho, en estas condiciones los electrones se mueven describiendo una espiral.

En el tiempo t, durante el cual los electrones describen una vuelta de la espiral, avanzan un espacio de:

$$l = v_{\parallel} t.$$

Sustituyendo en esta ecuación el tiempo t por su valor según la (5), obtenemos que

$$l = \frac{2\pi c v \cdot \cos\alpha}{\frac{e}{m} \cdot H}.$$

Si el ángulo α es pequeño, tendremos que $\cos\alpha \simeq 1$, y

$$l \simeq \frac{2\pi c v}{\frac{e}{m} H}. \qquad (7)$$

Así, pues, el espacio l, con un grado bastante elevado de aproximación, es independiente del ángulo α de desviación de los electrones en el condensador C.

Como en este intervalo de tiempo t todos los electrones llegan a realizar una vuelta de espiral, todos ellos pasarán por el eje de la instalación a la misma distancia l del condensador C. En la fig. 273 se representan varias trayectorias de electrones. Se ve que todas las trayectorias se cortan en el punto O. Este punto, por analogía con el lugar en que se intersecan los rayos ópticos, se denomina *foco de*

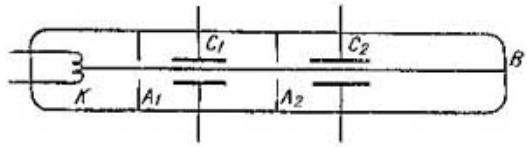


Fig. 274. Esquema del aparato para determinar la carga específica del electrón por el método del filtro de velocidades.

electrones. La posición del foco varía al variar la excitación H del campo magnético longitudinal. La excitación H puede elegirse de manera que el foco venga a caer sobre la pantalla B, lo cual se establece fácilmente viendo la huella ostensible (punto luminoso) del haz en la pantalla. En este caso, la distancia l será la que hay entre el condensador C y la pantalla B, y, por consiguiente, se puede medir. Conociendo l, es fácil determinar la carga específica del electrón e/m. Efectivamente, de la (7) tenemos que

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi c v}{lH}.$$

Sustituyendo en esta ecuación la velocidad v por su valor según la (6), hallamos que

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 c^2 (V_1 - V_2)}{l^2 H^2}.$$

En esta ecuación, las magnitudes de la derecha se pueden medir directamente, determinando de esta manera la magnitud e/m.

Otro método exacto de determinación de la carga específica del electrón e/m es el denominado *método del filtro de velocidades*. En un tubo en que se ha hecho el vacío (fig. 274), con ayuda del cátodo caliente K y del diafragma A_1 se obtiene un haz de electrones. Luego, este haz pasa por entre las armaduras de dos condensadores C_1 y C_2. Entre los condensadores se coloca un segundo dia-

fragma A_2 que solamente deja pasar los electrones que no han sido desviados por el condensador C_1. A las armaduras de ambos condensadores se les aplica al unísono una diferencia de potencial alterna, que varío con el tiempo según una ley sinusoidal de período T. Entonces, a través del diafragma pasarán solamente los electrones que atravesaron el espacio entre las armaduras del condensador C_1 cuando la diferencia de potencial entre ellas era igual a cero. En el tiempo t, durante el cual los electrones llegan al segundo condensador, la diferencia de potencial aplicada a los condensadores varía y los electrones se desvían. No habrá desviación solamente cuando el tiempo t sea múltiplo de $T/2$. En este caso el haz de electrones dejará una huella en el centro de la pantalla fluorescente B.

Así, pues, para que el haz no lo desvíe ninguno de los dos condensadores, se debe satisfacer la condición:

$$t = n\frac{T}{2}, \tag{8}$$

donde n es un número entero.

Por otro lado, el tiempo t se determina de la siguiente manera: supongamos que l es la distancia entre los condensadores, entonces $t = \frac{l}{v}$, donde v es la velocidad de los electrones. Esta velocidad se puede hallar en función de la diferencia aceleradora de potencial $V_1 - V_2$, aplicada entre el cátodo K y el diafragma A_1, según la ecuación:

$$\frac{1}{2}mv^2 = e(V_1 - V_2), \quad \text{de donde} \quad t^2 = \frac{l^2}{v^2} = \frac{l^2 m}{2e(V_1 - V_2)}.$$

Utilizando este valor de t^2 y la fórmula (8), obtenemos que

$$\frac{e}{m} = \frac{2l^2}{n^2 T^2 (V_1 - V_2)}. \tag{9}$$

La medición se realiza disminuyendo el período T hasta que el haz de electrones empiece a concentrarse en el centro de la pantalla B. Esto corresponderá al valor de $n = 1$, de donde, según la (9) y conociendo l y $V_1 - V_2$ se halla la carga específica e/m.

§ 219. Determinación de la carga específica de los iones positivos. Los métodos indicados, que se basan en la desviación de las partículas en los campos eléctrico y magnético, en principio son útiles para determinar no sólo la carga específica e/m de los electrones, sino también de cualquier clase de iones. Sin embargo, la dificultad de su aplicación para determinar la carga específica e/m de los iones atómicos o moleculares consiste en que el manantial de iones no es un electrodo sólido cualquiera, sino un gas en el cual se producen descargas. En este caso, los iones surgen en distintos sitios, en zonas de diferentes potenciales, con lo cual sus velocidades son distintas. Pero a distintas velocidades, los iones se desplazarán de manera diferente en los mismos campos, lo cual hace imposible la medición. Para evitar la influencia de la velocidad, Thomson utilizó un método que se denominó el *método de las parábolas*. Este método se basa en la aplicación de los campos eléctrico y magnético dirigidos hacia un mismo lado. Representémonos una partícula

www.elsolucionario.org

que se desplaza a lo largo del eje OZ con una velocidad inicial de v_0 (fig. 275). Supongamos que la intensidad **E** del campo eléctrico y la excitación **H** del magnético van dirigidas a lo largo del eje OX y actúan sobre un mismo trayecto z de la partícula. De parte del campo electrostático, sobre la partícula de carga e actúa una fuerza constante dirigida a lo largo del eje OX:

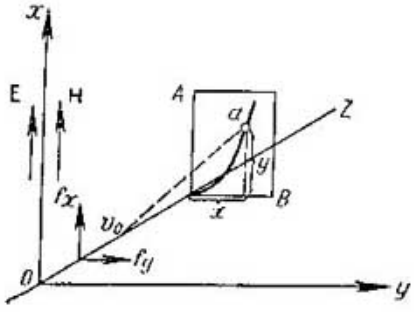


Fig. 275. Esquema del método de las parábolas.

$$f_x = eE. \qquad (1)$$

Del lado del campo magnético, sobre la misma partícula actúa la fuerza de Lorentz dirigida, según la regla de la mano izquierda, a lo largo del eje OY:

$$f_y = \frac{1}{c} ev_0 H. \qquad (2)$$

De esta manera, el campo eléctrico y el magnético desviarán a la partícula en direcciones perpendiculares mutuamente, y la partícula atravesará el plano AB, paralelo al XOY, en un punto a de coordenadas x e y.

Sea m la masa de la partícula, de donde la componente w_x de su aceleración, según la (1), será

$$w_x = \frac{f_x}{m} = \left(\frac{e}{m}\right) E.$$

Como esta componente de la aceleración es constante, la desviación de la partícula según el eje OX tendrá el carácter de un movimiento uniformemente acelerado, y en el tiempo Δt, durante el cual la partícula recorre el trayecto z, se desviará a lo largo del eje OX en la magnitud:

$$x = \frac{1}{2} w_x \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) \cdot E \Delta t^2;$$

pero $\Delta t = \frac{z}{v_0}$, de donde

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right) \cdot Ez^2 \frac{1}{v_0^2}.$$

La magnitud $\frac{1}{2} Ez^2$, que es constante en las condiciones dadas del experimento, la llamaremos C_1, de donde

$$x = C_1 \left(\frac{e}{m}\right) \cdot \frac{1}{v_0^2}. \qquad (3)$$

De la (2), hallaremos de la misma manera que la componente w_y de la aceleración de la partícula es

$$w_y = \frac{f_y}{m} = \frac{1}{c}\left(\frac{e}{m}\right) v_0 H.$$

Como w_y también es constante, la desviación de la partícula a lo largo del eje OY será

$$y = \frac{1}{2} w_y \Delta t^2 = \frac{1}{2c}\left(\frac{e}{m}\right) v_0 H \Delta t^2,$$

y, sustituyendo como antes Δt por su valor z/v_0, hallamos que

$$y = \frac{1}{2c}\left(\frac{e}{m}\right) H z^2 \frac{1}{v_0}.$$

Llamando C_2 a la magnitud $\frac{1}{2c} H z^2$, que es constante en las condiciones dadas del experimento, obtenemos que

$$y = C_2 \left(\frac{e}{m}\right) \frac{1}{v_0}. \qquad (4)$$

Las fórmulas (3) y (4) determinan las coordenadas de la desviación de la partícula en los campos eléctrico y magnético. Como se ve, en las condiciones dadas del experimento, las coordenadas de la desviación vienen determinadas por dos factores: por la carga específica de la partícula e/m y por su velocidad v_0. A las partículas de iguales cargas específicas e/m, pero de distintas velocidades v_0, les corresponderán diferentes puntos de intersección de sus trayectorias con el plano AB. Todos estos puntos de intersección vendrán a colocarse a lo largo de una curva determinada, cuya ecuación obtendremos eliminando la velocidad v_0 de las ecuaciones (3) y (4):

$$y^2 = \frac{C_2^2}{C_1}\left(\frac{e}{m}\right) x. \qquad (5)$$

Como se ve, es la ecuación de una parábola. Thomson colocó en el trayecto de las partículas una placa fotográfica, en la cual se revelaron las huellas de las partículas en forma de curvas parabólicas. Cada parábola corresponde a una misma relación e/m, pero a distintas velocidades. Diferentes parábolas corresponden a partículas con distintas relaciones e/m. Hallando para la parábola examinada $y^2 = px$, el valor de su parámetro $p = \frac{C_2^2}{C_1}\left(\frac{m}{e}\right)$ y conociendo C_1 y C_2, se puede hallar la relación entre las cargas de los iones y sus masas.

En los experimentos de Thomson no se observaron solamente iones de una carga, sino también de varias cargas. Si estos iones

son de la misma naturaleza (por ejemplo, O^+ y O^{++}) sus cargas específicas e_1/m y e_2/m se relacionarán exactamente como números enteros y múltiples de la carga del electrón e, ya que las cargas e_1 y e_2 pueden ser solamente múltiplos de e.

Si se trata de iones de la misma carga, pero de distinta naturaleza (por ejemplo, H^+ y O^+), sus cargas específicas e/m_1 y e/m_2 se relacionarán como las masas m_1 y m_2 de dichas partículas. De esta

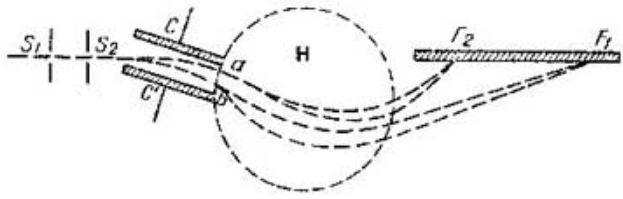


Fig. 276. Espectógrafo de masas.

manera, el método de las parábolas nos permite comparar directamente las masas de los átomos o de las moléculas entre sí. Observando las parábolas correspondientes al neón, Thomson descubrió junto a la intensa parábola correspondiente al peso atómico del neón 20, otra más débil que correspondía a otra relación e/m distinta; las mediciones demostraron que esta relación correspondía a átomos de peso atómico 22. Así resultó que existían dos clases de átomos de neón de una misma carga, pero de masas algo diferentes.

En la actualidad se sabe que la mayor parte de los elementos es una mezcla de dos y más isótopos, es decir, sustancias bastante parecidas por sus propiedades físicas y químicas, pero de pesos atómicos algo diferentes.

El método de comparación de las masas de los iones según su desviación en los campos eléctrico y magnético lo modernizó Aston. En el método de Aston, los iones pasan consecutivamente por las zonas de acción de los campos eléctrico y magnético que causan su desviación en direcciones contrarias.

El esquema del instrumento de Aston se representa en la fig. 276. Los diafragmas S_1 y S_2 delimitan un haz fino de iones que a continuación pasa por entre las armaduras paralelas C y C'. A las armaduras C y C' se les comunica una diferencia de potencial determinada de modo que entre ellas se forme un campo eléctrico de intensidad E. Supongamos que del haz hemos aislado unas partículas de una misma carga específica e/m. Estas partículas tendrán diferentes velocidades, por lo tanto se inclinarán en una magnitud distinta y el haz se ensanchará. El extremo b corresponderá a las partículas más lentas, y el a, a las más rápidas. En la zona que abarca

www.elsolucionario.org

la circunferencia de puntos, las partículas pasan a través del campo magnético, que es perpendicular al plano del dibujo. Aquí sufren una desviación hacia el lado contrario a que se han desviado en el campo eléctrico. Las partículas de distintas velocidades se desviarán de nuevo de manera diferente: las más lentas, *b*, se desviarán más, y las más rápidas, *a*, menos. Gracias a ello, las trayectorias de las partículas de diferentes velocidades se interceptarán en un punto F_1. De la misma manera, para las partículas de otra carga específica e/m se obtendrá una intercepción de las trayectorias de las partículas de distintas velocidades en cierto punto F_2. Los lugares

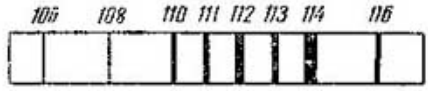


Fig. 277. Espectrograma de masas.

de intercepción de las trayectorias de las partículas con otras relaciones e/m se dispondrán aproximadamente a lo largo de la recta F_1F_2. Así, pues, si a lo largo de la recta F_1F_2 se coloca una placa fotográfica, se obtendrán en ella rayas netas, "imágenes" de las rendijas, cada una de las cuales corresponderá a las partículas de determinada carga específica e/m. En el caso de iones de una misma carga, la posición de las rayas se determinará solamente por las relaciones de sus masas m. Midiendo las distancias relativas de estas rayas se puede hallar la relación de las masas m.

El fotograma obtenido (fig. 277) recuerda al espectro lineal obtenido en el espectrógrafo óptico. Por eso Aston denominó a su instrumento *espectrógrafo de masas*.

Con ayuda del espectrógrafo de masas se puede determinar con gran exactitud la relación de las masas de diferentes isótopos.

En la tabla XIX se dan los resultados de algunas mediciones de las masas de isótopos.

Los resultados de los experimentos sobre los isótopos, que son de valor excepcional para la teoría de la estructura de los átomos, se estudian en el t. III.

De otros métodos de determinación de la carga específica de los iones indicaremos el basado en el enfoque de las partículas de velocidad determinada en un campo magnético transversal. En la fig. 278 se representa el esquema del aparato (para simplificar, en el esquema no viene indicada la caja metálica en la cual se ha hecho el vacío y va parte del instrumento). El filamento incandescente D es el ánodo, que se recubre de una fina capa de sales que contienen el elemento a investigar. En estas condiciones, el filamento es un manantial de iones positivos. El campo eléctrico con una diferencia de potencial $V_1 - V_2$ aplicado entre el filamento D y la rendija S_1, acelera a los iones. Los iones, después de pasar

Tabla XIX

Masas de los isótopos

Atomo	Peso atómico químico	Masas de los isótopos comparadas con el O^{16}
N	1,00756	1,00812 2,01471
He	4,00128	4,00391
Li	6,940	6,0167 7,0180
O	16,0000 (por definición)	16,0000 17,0046 18,0057
Cl	35,457	34,9800 36,9775

por la rendija, van a parar a la zona en que sobre ellos actúa un campo magnético uniforme de excitación **H** perpendicular al plano del dibujo. Solicitados por este campo se desplazan según una circunferencia de radio r que se determina por la fórmula (2) del § 218:

$$r = \frac{cv}{H} \cdot \frac{m}{e}, \qquad (6)$$

donde m es la masa de los iones; e, sus cargas, y v, la velocidad.

Por la rendija S_1 pasan los iones, cuyas velocidades poseen direcciones algo diferentes debido a las dimensiones finitas del filamento D. La línea de trazo

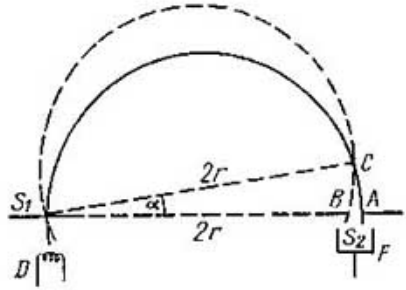


Fig. 278. Esquema de la desviación de las partículas en un campo magnético transversal.

continuo representa la trayectoria de los iones que se desplazan por el espacio entre D y S_1 perpendicularmente al plano de la rendija S_1. Estos iones atravesarán por segunda vez el plano que contiene la rendija S_1 en el punto A a la distancia $2r$ de S_1. Los iones que pasan entre D y S_1 formando un ángulo α con la trayectoria examinada, interceptarán el plano que contiene la rendija S_1, en el

punto B. Suponiendo pequeño el ángulo α (véase la fig. 278), tenemos que

$$AB = AS_1 - BS_1 = 2r - S_1C\cos\alpha$$

o, como $S_1C = 2r$,

$$AB = 2r\,(1-\cos\alpha) = 4r\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Como el ángulo α es pequeño, aproximadamente tendremos que

$$AB = r\,\alpha^2.$$

Si el ángulo α es pequeño, la magnitud $r\alpha^2$ es muy pequeña en comparación con r; por consiguiente, todas las trayectorias de los iones interceptarán el plano S_1A dentro de los límites de un pequeño segmento AB. En este lugar se coloca la rendija S_2 y detrás de ella la caja de Faraday F. Esta caja se conecta con un electrómetro y de esta manera se registran los iones que vienen a parar a ella. La velocidad de los iones v se determina en función de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ con ayuda de la ecuación:

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\,(V_1 - V_2). \qquad (7)$$

Excluyendo la velocidad v de las fórmulas (6) y (7) tenemos que

$$\frac{m}{e} = \frac{1}{2}\left(\frac{rH}{c}\right)^2 \cdot \frac{1}{V_1 - V_2}.$$

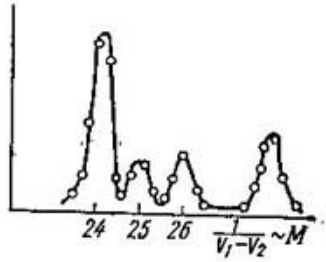


Fig. 279. Curva de los isótopos de magnesio.

De esta manera, a la distancia dada $2r$ entre las rendijas S_1 y S_2 y a la excitación magnética H dada, a la caja de Faraday vienen a parar iones de relación m/e inversamente proporcional a la diferencia aceleradora de potencial $V_1 - V_2$. Variando $V_1 - V_2$ se pueden registrar diferentes iones. En la fig. 279 se representa la curva obtenida cuando se recubre el ánodo D con una sal de magnesio. En el eje de las abscisas se indican las magnitudes inversas a la diferencia aceleradora de potencial $V_1 - V_2$, y en el eje de las ordenadas, las desviaciones n del electrómetro. La curva ofrece cuatro vértices. El del extremo de la derecha corresponde a los iones moleculares del nitrógeno (N_2^+) de peso molecular 28. Los otros tres corresponden a los iones de una carga de los isótopos del magnesio de pesos atómicos 24, 25 y 26.

Ultimamente se han modernizado aún más los métodos de determinación de las masas de los isótopos. Por ejemplo, se utiliza el espectrógrafo de masas de doble enfoque con campos eléctrico y magnético. El poder resolutivo (separador) de este aparato es tan alto, que se pueden observar independientemente las huellas de los iones del isótopo pesado del hidrógeno de peso atómico 2,01471 y del ion molecular del isótopo ligero del hidrógeno de peso molecular 2,01624.

§ 220. Aplicación técnica del haz electrónico. En la actualidad el haz electrónico se utiliza para diferentes fines técnicos. Describamos primeramente la construcción del *oscilógrafo de rayos catódicos*, aparato para estudiar los procesos eléctricos rápidos y alternos. En la fig. 280 se representa esquemáticamente la estructura del oscilógrafo de rayos catódicos. En el interior de un tubo de vidrio en que se ha hecho el vacío, hay un cátodo incandescente K, manantial de electrones. Un campo constante acelera los electrones.

www.elsolucionario.org

Con ayuda de los diafragmas a y b se limita el haz haciéndolo muy fino. Este haz pasa a través de todo el tubo y en la pared opuesta C, cubierta de sustancia fluorescente, forma una mancha luminosa. En su trayectoria, el haz electrónico pasa por entre dos pares de placas AA' y BB' situadas en planos perpendiculares mutuamente. A las placas AA' se aplica la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, cuya dependencia del tiempo se desea estudiar. Generalmente se trata de diferencia de potencial que varía periódicamente con el tiempo.

Entre las placas AA' se crea un campo, cuya intensidad E varía en función del tiempo con el mismo período que la diferencia de potencial $V_1 - V_2$. Bajo la acción de este campo, el haz electrónico se desviará, con la particularidad de que, debido a la masa excesivamente pequeña de los electrones, sus desviaciones concordarán prácticamente con las del campo. El punto luminoso formado por el haz de electrones en la pantalla C, debido a las desviaciones del haz, también empezará a oscilar. Si la frecuencia es bastante elevada,

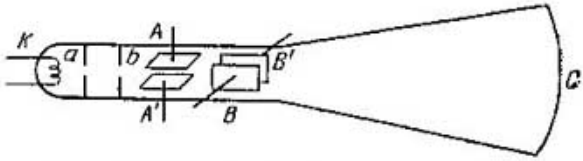


Fig. 280. Oscilógrafo de rayos catódicos.

que es lo que ocurre en la mayoría de los casos, estas oscilaciones no se pueden observar a simple vista, el punto luminoso se extiende transformándose en una raya continua. Para poder observar las oscilaciones, entre el segundo par de placas BB' se crea un campo E_0 que varíe con el tiempo de manera conocida. Por ejemplo, entre el par de placas BB' se puede crear un campo que varíe con el tiempo según la ley de oscilaciones armónicas de frecuencia angular conocida ω_0; entonces:

$$E_0 = A_0 \cos \omega_0 t.$$

Si la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que se estudia, también varía armónicamente con el tiempo,

$$V_1 - V_2 = A \cos (\omega t + \delta),$$

el haz electrónico participará de dos movimientos oscilatorios armónicos perpendiculares entre sí (véase el t. 1), y el punto luminoso describirá en la pantalla C una de las figuras de Lissajous. Determinando la forma de esta figura y conociendo la frecuencia y la amplitud que caracterizan la variación con el tiempo de E_0, se puede determinar el carácter de la variación con el tiempo de la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ que se estudia. Si las frecuencias ω y ω_0 coin-

ciden, en la pantalla fluorescente C se forma una elipse que en casos particulares puede transformarse en una circunferencia o en una recta. Las figuras observadas en la pantalla C se pueden fotografiar, obteniendo en este caso el llamado *oscilograma*.

Ultimamente se ha empezado a utilizar otra exploración más cómoda de oscilaciones del haz electrónico creadas por influencia del campo variable excitado entre las placas AA', que se denomina "tiempo lineal básico". Para ello, entre las placas BB' se crea un campo de intensidad E_0 que durante cierto intervalo de tiempo aumente proporcionalmente con el tiempo:

$$E_0 = At.$$

Esto se consigue conectando en paralelo a las placas BB' un condensador que durante este intervalo de tiempo se cargue continuamente. Entonces, el punto luminoso describe en la pantalla C la

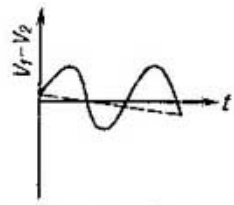


Fig. 281. Oscilograma.

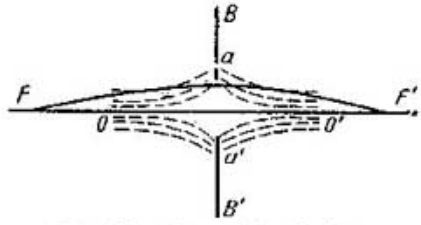


Fig. 282 Lente electrónica.

curva que obtendríamos, si marcásemos en el eje de ordenadas los valores de V_1-V_2, que es una función del tiempo $f(t)$, y en el de abscisas, el tiempo t (fig. 281). Como el aumento continuo del campo E_0 sacaría al haz fuera de los límites de la pantalla C, al cabo de cierto tiempo $t=\tau$ se hace que el valor de E_0 disminuya bruscamente hasta cero, después de lo cual vuelve a aumentar proporcionalmente con el tiempo. Esta caída súbita de la intensidad E_0 hasta el valor cero se puede conseguir, por ejemplo, conectando en los terminales del condensador un tubo de descarga; mientras la diferencia de potencial de las armaduras del condensador sea menor que el potencial de encendido, la resistencia del tubo es tan grande, que la presencia de éste no influye en el proceso de carga del condensador. En cuanto la diferencia de potencial alcance el potencial de encendido, el tubo produce una descarga y el condensador pierde la carga. Al proceso de descarga del condensador le corresponde el rápido retorno del punto luminoso a la posición inicial (recta de puntos de la fig. 281). Luego, el punto luminoso empieza de nuevo a describir la curva. Si la variación de la diferencia de potencial que se estudia V_1-V_2 tiene carácter puramente periódico, se puede conseguir, con el tiempo, que la nueva curva coincida con la inicial.

Los oscilógrafos modernos permiten estudiar las oscilaciones de frecuencia hasta 10^7 seg^{-1} y producen una desviación del punto luminoso de hasta 1 mm por voltio.

Los oscilógrafos tienen gran aplicación en el estudio de las corrientes alternas (véase el § 232).

Otra de las aplicaciones del haz electrónico está relacionada con su desviación en un campo eléctrico o magnético variable. En este caso resulta posible enfocar el haz electrónico. Con ello se establece la analogía entre la desviación de los haces electrónicos y la refracción de los haces luminosos en las lentes. Debido a ello, los fenómenos de propagación de los haces electrónicos en los campos variables se han denominado *óptica electrónica.*

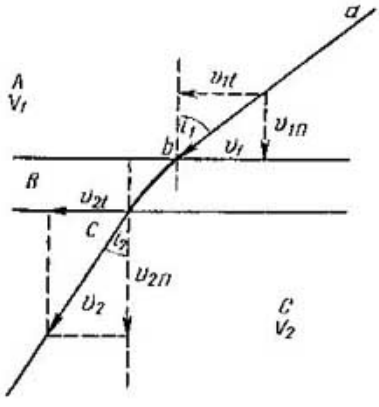


Fig. 283. Refracción del haz electrónico.

Un ejemplo muy elemental de "lente electrónica" puede ser el campo eléctrico uniforme creado junto a un agujero circular aa' de la placa BB' (fig. 282) cargada negativa y uniformemente. Las líneas de fuerza en las proximidades de un agujero de éstos se representan con líneas de puntos. Los electrones que se desplazan a lo largo del eje OO' del orificio, gracias a la simetría del campo no sufren ninguna desviación. Cualquier electrón que se desplace interceptando el eje OO' en cierto punto F, se desviará y su desviación será tanto mayor, cuanto más cerca pase del borde del orificio aa'.

Así, pues, por detrás de la placa, la trayectoria del electrón interceptará de nuevo al eje OO' en cierto punto F'.

Si por el punto F pasa un haz de trayectorias comprendidas en los límites de un ángulo sólido pequeño, todas volverán de nuevo a interceptarse en un mismo punto F', que será de esta manera la imagen del punto F. Si los haces son más anchos, no todas las trayectorias se cortarán en el punto F', es decir, se observará el fenómeno correspondiente a la aberración esférica de la óptica.

Los métodos de la óptica electrónica se basan en la analogía formal de las leyes a que se subordina la difusión de los haces electrónicos en un campo eletrostático variable y la propagación de los rayos luminosos en las sustancias diáfanas de coeficiente de refracción variable. Aclaremos esta analogía con un simple ejemplo. Supongamos que los electrones se desplazan con movimiento rectilíneo a la velocidad constante v_1 en la zona A del espacio (fig. 283), donde el potencial

www.elsolucionario.org

V_1 tiene un valor constante. Luego van a parar a la zona C, donde el potencial también es constante, pero tiene otro valor V_2. Aquí los electrones se desplazan también en línea recta. En la zona límite B, el potencial varía desde el valor V_1 hasta el valor V_2, con lo cual en esta zona hay una intensidad del campo E diferente de cero y, por consiguiente, sobre cada electrón actúa una fuerza perpendicular a la línea divisoria de las zonas. Bajo la influencia de esta fuerza variará la componente normal v_n de la velocidad del electrón, mientras que la tangencial v_t seguirá invariable. Llamando i_1 e i_2 a los ángulos que forman las trayectorias de los electrones ab y cd en ambas zonas con las normales a sus líneas divisorias, obtenemos que

$$\operatorname{sen} i_1 = \frac{v_{1t}}{v_1}, \quad \operatorname{sen} i_2 = \frac{v_{2t}}{v_2}.$$

Como $v_{1t} = v_{2t}$, se deduce que

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Esta relación es análoga a la ley de la refracción óptica:

$$\frac{\operatorname{sen} i_1}{\operatorname{sen} i_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción de dos sustancias diáfanas.

El método de enfoque electrostático encuentra una amplia aplicación en la técnica moderna. En la fig. 284 se indica el sistema de enfoque de un oscilógrafo

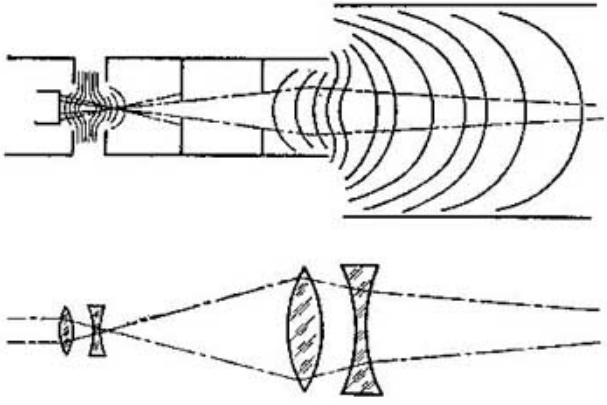


Fig. 284. Sistema de enfoque de un oscilógrafo.

moderno que consta de una serie de cilindros y diafragmas con orificios circulares. En la parte inferior de la misma se representa el correspondiente sistema análogo de lentes ópticas.

En la fig. 285 se representa el esquema de un aparato que se denomina *transformador de imágenes* que ha adquirido gran aplicación en los últimos tiempos. En éste, g es el objeto, cuya imagen real lanza sobre la placa transparente B

la lente óptica L. La superficie de la placa B se ha cubierto de una fina capa de métal, que se utiliza como cátodo K. De este cátodo se desprenden electrones arrancados por los rayos ópticos emitidos por el objeto g (véase el efecto fotoeléctrico en el t. III). El flujo de estos electrones se enfoca con ayuda de las lentes electrostáticas A_1 y A_2 sobre la pantalla fluorescente E. De esta manera, en la pantalla E se obtiene una imagen visible del objeto g. El objetivo de esta transformación consiste en lo siguiente: el objeto g puede emitir rayos ultravioletas o infrarrojos, que son invisibles; el transformador de imágenes, sin embargo, nos permite obtener la imagen del objeto en rayos visibles emitidos por la pantalla

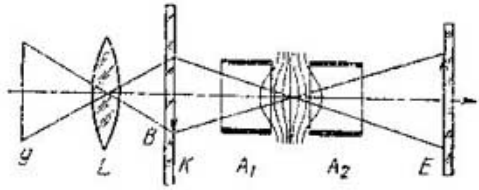


Fig. 285. Transformador de imágenes.

fluorescente E. Además, el transformador de imágenes puede funcionar como "amplificador": la intensidad de la emisión del objeto puede ser muy pequeña, mientras que la emisión de la pantalla fluorescente puede ser mucho más clara gracias a la gran energía adquirida por los electrones en el campo electrostático acelerador.

La acción enfocadora del campo magnético se ha indicado ya al describir el método de determinación de la carga específica del electrón (§ 218). El electrón que viene a parar a un campo magnético uniforme con una velocidad inicial que forme un ángulo agudo α con la dirección del campo, se desplazará en éste describiendo una espiral. Si los ángulos α son pequeños el paso de esta espiral prácticamente no depende del valor de α. Gracias a ello, el haz de electrones, cuyas trayectorias están dentro de los límites de un cono de pequeño ángulo de abertura, se concentra en un foco puntual por el campo magnético dirigido según el eje del cono. De esta manera, el campo magnético actúa análogamente a una simple lente colectora en óptica. El campo magnético variable creado en las proximidades de unas bobinas con terminales de forma especial también puede enfocar haces de electrones.

La posibilidad de enfocar haces electrónicos permite construir *microscopios electrónicos*. El haz de electrones emitido por el cátodo atraviesa el objeto que se investiga, cuyas diferentes partes retienen en mayor o menor grado a los electrones. Con ayuda de un sistema de lentes electrónicas se obtiene una imagen final aumentada del objeto. La imagen se revela con ayuda de una pantalla fluorescente, o con una placa fotográfica que tiene la propiedad de ennegrecer

al choque de los rápidos electrones. En la fig. 286 se comparan los esquemas del microscopio electrónico con lentes magnéticas y el microscopio óptico con cámara fotográfica. Las partes análogas de ambos microscopios se indican con las mismas letras: para el microscopio electrónico con letras mayúsculas A, B, C, ..., y para el óptico, con minúsculas a, b, c, ... En el microscopio electrónico A es el manantial de electrones; B, la lente magnética colectora que dirige el haz de electrones hacia el objeto C; D, el objetivo magnético; E, la imagen intermedia; F, el ocular (de proyección), y G, la imagen final formada en la placa fotográfica H. Todas las partes del microscopio electrónico están encerradas en un tubo hermético en el cual se ha hecho un vacío tal, que el recorrido libre medio de los electrones sea mayor que la distancia desde el manantial hasta la placa fotográfica. En el microscopio óptico (luminoso): a es el manantial de luz; b, el condensador; c, el objeto; d, el objetivo; e, la imagen real (intermedia); f, el ocular; g, la imagen virtual (final), y h, la placa fotográfica. Los modernos microscopios electrónicos permiten alcanzar aumentos enormes de 40 000 veces y mayores. Estos aumentos superan notablemente los alcanzados por los mejores microscopios luminosos (que es de unas 2 000 veces). Así, pues, los microscopios electrónicos permiten estudiar objetos que no pueden ser estudiados con ayuda de los microscopios luminosos corrientes. En el t. III se hablará de las causas que permiten obtener aumentos mayores con ayuda de los microscopios electrónicos que con los luminosos.

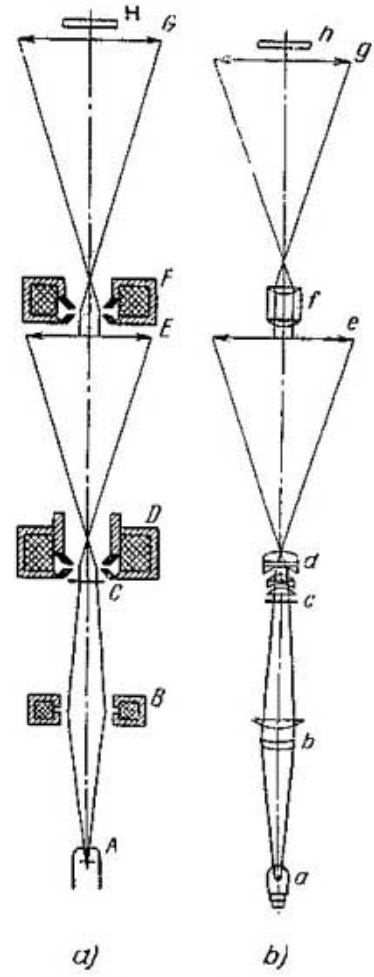


Fig. 286. Esquemas de los microscopios electrónico (a) y luminoso (b).

www.elsolucionario.org

En la fig. 287 se representa la fotografía de partículas de ZnO pulverizadas obtenida en el microscopio electrónico. Las partículas son cristales aciculares extremadamente pequeños. A la izquierda

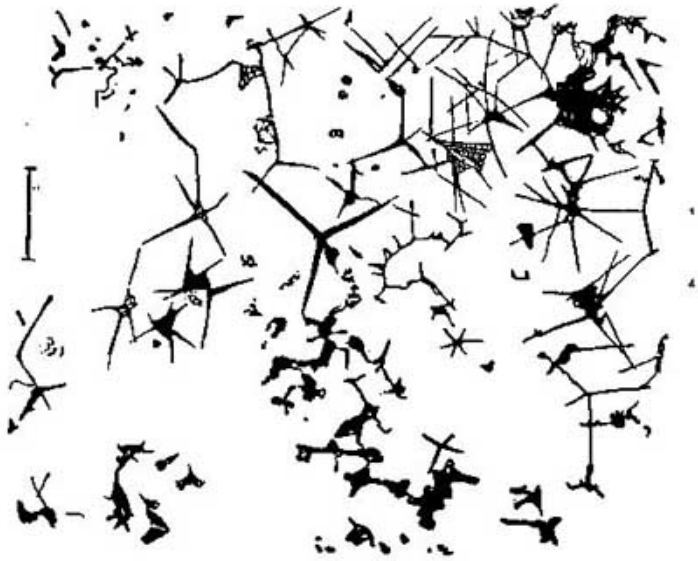


Fig. 287. Fotografía de las partículas de ZnO obtenida mediante el microscopio electrónico.

de la fotografía se indica la escala correspondiente a 1 μ. Una construcción original de microscopio electrónico ha sido realizada en la Unión Soviética por los académicos A. Lébedev y V. Vértsner.

CAPITULO XX

Inducción electromagnética

§ 221. Fenómeno de inducción electromagnética. El fenómeno de inducción electromagnética lo descubrió Faraday en 1831. Este fenómeno consiste en lo siguiente: *en cualquier contorno conductor cerrado, al variar el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por este contorno, se crea una corriente eléctrica. Esta corriente se denomina corriente inducida.*

El fenómeno de inducción electromagnética se puede observar en los siguientes experimentos.

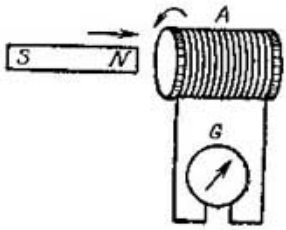


Fig. 288. Inducción de corriente en un solenoide al desplazar un imán.

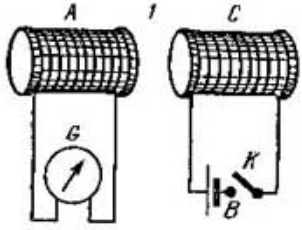


Fig. 289. Inducción de corriente en un solenoide al conectar o desconectar la corriente en un solenoide vecino.

1. Sea un solenoide A (fig. 288) cerrado a través de un galvanómetro G. Acerquemos a uno de sus extremos un imán permanente. En el solenoide se crea una corriente eléctrica que revela la inclinación de la aguja del galvanómetro. Esta corriente cesa de fluir al cesar de moverse el imán. Si empezamos a alejar el imán, en el solenoide se crea de nuevo una corriente, pero de sentido contrario. El mismo fenómeno tendrá lugar si conservamos inmóvil al imán y desplazamos el solenoide. Por último, en lugar del imán se puede utilizar un segundo solenoide, por el cual fluye una corriente continua: al desplazarlo, en el primer solenoide se crea una corriente.

2. Sean dos solenoides inmóviles A y C (fig. 289). Supongamos que el solenoide A se cierra igual que antes, a través de un galvanómetro G y que el solenoide C está conectado a un circuito con una pila B y un interruptor k. Al conectar la corriente al solenoide C con el interruptor k, en el A se crea una corriente instantánea que revela el salto de la aguja del galvanómetro G. Al continuar fluyendo por

el solenoide C una corriente continua, en el solenoide A no se observa ninguna corriente. En el momento de desconectar la corriente en el solenoide C, en el A se crea de nuevo una corriente instantánea; pero de sentido contrario a la primera.

Estos mismos experimentos se pueden realizar utilizando, en lugar de solenoides, contornos de una espira; pero el fenómeno será más débil.

Examinemos los resultados de estos experimentos. En el primero es característica la circunstancia de que en el solenoide A la corriente fluye solamente mientras el imán se acerque o se aleje del solenoide, es decir, mientras varíe el campo en las proximidades del solenoide, o mientras el propio solenoide se desplace en el campo magnético variable del imán. En cuanto cese el desplazamiento del imán respecto al solenoide (o el del solenoide respecto al imán), el campo magnético en las proximidades del solenoide se hace constante y la corriente deja de fluir por el solenoide. En el segundo experimento, el fenómeno es análogo: en este caso, la aparición o el cese de la corriente en el solenoide C crea la variación del campo magnético. En ambos casos, en las proximidades del contorno conductor, varía la magnitud del campo magnético y, por consiguiente, *varía también el flujo de inducción magnética* a través de la superficie que comprende el contorno. Que todo esto consiste precisamente en la variación del *flujo* de inducción magnética, se deduce de lo siguiente: la corriente inducida surge, si *se hace girar un contorno conductor cerrado en un campo magnético uniforme*. En este caso, la magnitud de la inducción magnética del campo en las proximidades del conductor permanece constante, varía solamente el flujo a través de la superficie del contorno. Si el contorno cerrado *se desplaza en movimiento de traslación por un campo magnético uniforme*, el flujo de inducción a través del contorno será constante y no habrá corriente de inducción. Así se explica lo expuesto al principio del párrafo de que la corriente inducida se crea en un contorno conductor cerrado al variar el flujo de inducción a través de la superficie del contorno.

No obstante hay que observar que en los experimentos descritos no se ve si la aparición de la corriente inducida viene determinada por la variación del flujo de inducción magnética B o de la excitación magnética H. Si no hay cuerpos magnéticos, esto no tiene importancia, ya que la inducción magnética B y la excitación magnética H son iguales; pero si hay un cuerpo magnético, debe reflejarse la diferencia entre B y H. Prácticamente es difícil llenar todo el espacio en que están los contornos conductores, con un cuerpo magnético de permeabilidad magnética μ suficiente, ya que un cuerpo magnético de esta clase (hierro, níquel, etc.) es un cuerpo sólido. Sin embargo, se puede realizar el experimento de manera que, aun-

www.elsolucionario.org

que el cuerpo magnético llene parte del espacio, todo el campo magnético esté concentrado solamente en el interior de aquél. Para ello, tomemos el toroide A entrelazado con el contorno conductor C de la misma manera con que se enganchan mutuamente dos eslabones consecutivos de una cadena (fig. 290). Supongamos que por el toroide A fluye una corriente. El campo magnético creado por ella se concentra solamente en el interior del toroide y, por consiguiente,

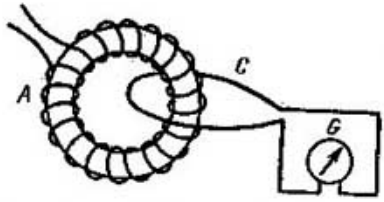


Fig. 290. Inducción de corriente en el conductor entrelazado con el toroide.

todo el flujo de este campo atraviesa el contorno C. Si desconectamos la corriente del toroide A, habrá una variación del flujo (desaparece) y en el contorno se crea una corriente de inducción. Llenemos ahora el interior del toroide A con hierro. El campo magnético del toroide, como antes, estará concentrado en el interior del mismo. En este caso, la excitación magnética H sigue siendo la misma, ya que la excitación magnética del campo de la corriente no depende de que haya o no un cuerpo magnético (si éste llena por completo el espacio en que el campo es diferente de cero); pero la inducción magnética $B=\mu H$ aumentará μ veces. Desconectando otra vez la corriente del toroide A (la intensidad de la corriente inicial se considera la misma) se observa un aumento notable de la corriente inducida en el contorno C. Esto demuestra que la creación de la corriente inducida es debida a la variación del flujo de inducción magnética.

Determinemos ahora la dirección de la corriente inducida. Lenz, generalizando en 1833 los resultados de los experimentos expuso la regla siguiente: *la corriente que se crea en un contorno cerrado tiene un sentido tal, que esta corriente crea a través de la superficie limitada por el contorno, un propio flujo de inducción magnética que se opone a la variación del flujo de inducción magnética que la origina.*

Basándonos en la regla de Lenz examinemos los experimentos descritos. En el primer experimento, al acercar al solenoide el polo norte del imán, en el solenoide se crea una corriente dirigida contra las agujas del reloj, si se mira el solenoide del lado en que se le acerca el imán (fig. 288). En este caso, el flujo de inducción creado

por el imán, va hacia el interior del solenoide y al acercarse el imán, aumenta. El campo magnético de la corriente de inducción en el solenoide irá dirigido desde el solenoide hacia afuera y, por consiguiente, compensará el incremento del campo del imán. Al alejar el polo norte del imán en el solenoide se crea una corriente dirigida según las agujas del reloj, si de nuevo miramos el solenoide por el lado del imán. El flujo de inducción creado por el imán, lo mismo que antes, va dirigido hacia el interior del solenoide; pero ahora va decreciendo. El campo magnético de la corriente de inducción en el solenoide, en este caso, va dirigido hacia el interior del solenoide y, por consiguiente, compensa el decrecimiento del campo del imán. Así tenemos que ambos casos se hallan en concordancia con la regla de Lenz.

Analizando los resultados de estos dos casos se puede llegar a otra conclusión: al acercar al solenoide el polo norte del imán, la dirección de la corriente de inducción es tal, que el extremo del solenoide más cercano al imán se transforma en manantial de líneas de fuerza magnéticas y, por consiguiente, el imán y el solenoide se repelen, es decir, entre ellos surge una fuerza *que se opone* al movimiento del imán que conduce a la creación de la corriente de inducción. Al alejar el imán, éste y el solenoide se atraen, es decir, de nuevo surge entre ellos una fuerza que se opone al movimiento del imán.

Ahora veremos también que en el caso del segundo experimento analizado al principio de este párrafo, es justa la regla de Lenz. Al conectar la corriente en el solenoide C, en el A se crea una corriente de *dirección contraria*. Al *desconectar* la corriente del solenoide C, en el A se crea una corriente del *mismo sentido*. Estos resultados corresponden precisamente a la regla de Lenz: supongamos que en el solenoide C, al conectarlo, fluye una corriente contra las agujas del reloj, si lo miramos desde su extremo *1* (fig. 289). El flujo de inducción magnética creado por esta corriente penetrará en el solenoide A y aumentará al conectar la corriente. El flujo de inducción magnética creado por la corriente de inducción en el solenoide A, saldrá del mismo y, por consiguiente, compensará el incremento del flujo del solenoide. Con la misma facilidad se puede uno convencer de que al desconectar la corriente del solenoide C, el campo magnético de la corriente de inducción del A compensa el decrecimiento del flujo del solenoide C.

§ 222. Determinación de la fuerza electromotriz de inducción. La creación de la corriente inducida en un contorno cerrado es debida a que en este contorno, bajo la influencia de la variación del flujo magnético de inducción, aparece una f. e. m. Faraday fue el primero en relacionar la magnitud de esta f. e. m. con la velocidad

de variación del flujo de inducción magnética. Esta relación, dada por Faraday, se deduce de la ley de la conservación de la energía.

Hagamos el cálculo energético de un caso particular utilizando un contorno con una parte móvil AC (fig. 291). Este contorno ya se ha estudiado al calcular el trabajo de desplazamiento del contorno con corriente en un campo magnético (§ 210).

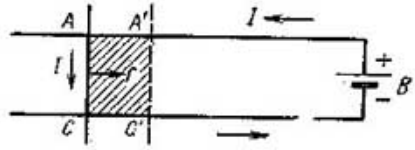


Fig. 291. Representación gráfica para deducir la expresión de la fuerza electromotriz de inducción.

Supongamos que en el contorno está conectada una pila B de f. e. m. igual a $\mathcal{E}$. El trabajo total realizado por esta f. e. m. durante el tiempo Δt es igual a $\mathcal{E}I\Delta t$, donde I es la intensidad de la corriente del contorno. Si el contorno se halla fuera del campo magnético, todo el trabajo se invertirá en desprender el calor de Lenz-Joule, $I^2R\Delta t$. En este caso, la intensidad de la corriente, según la ley de Ohm, es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \qquad (1)$$

Supongamos ahora que el contorno se halla en un campo magnético constante todo el tiempo. Para simplificar consideraremos que este campo es uniforme y va dirigido perpendicularmente al plano del contorno alejándose por detrás del plano del dibujo. Sobre la parte móvil AC actuará la fuerza f dirigida perpendicularmente a AC y hacia la derecha. Solicitada por esta fuerza, la parte móvil AC del contorno se desplazará. Supongamos que en el tiempo Δt se desplaza hasta la posición indicada en la figura por una línea de puntos $A'C'$. Según lo dicho en el § 210, en este caso se habrá realizado un trabajo:

$$\Delta A = I \cdot \Delta\Phi,$$

donde $\Delta\Phi$ es el flujo de inducción magnética a través de la parte rayada $ACA'C'$ del contorno, e I, la intensidad de la corriente que pasará por el contorno durante el desplazamiento que examinamos. Este trabajo se realizará a costa del trabajo de la f. e. m. de la pila B. De esta manera tenemos que el trabajo total de la f. e. m. de la pila, $\mathcal{E}I\Delta t$, se invierte en este caso, no sólo en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule, sino también en el trabajo de desplazamiento

www.elsolucionario.org

del sector AC del contorno:

$$\mathcal{E}I\Delta t = I^2R\Delta t + I\Delta\Phi.$$

Hablando en general, la intensidad I de la corriente puede no permanecer constante en el intervalo de tiempo Δt; por eso hay que considerar un intervalo de tiempo dt tan pequeño, que en este instante de tiempo no llegue a variar notablemente la intensidad I de la corriente. Entonces,

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + Id\Phi. \qquad (2)$$

En esta ecuación, $d\Phi$ es el flujo de inducción a través de la parte rayada $ACA'C'$ del contorno, que en este caso tiene la forma de una franja infinitamente estrecha. Despejando la intensidad I de la corriente de la ecuación (2) hallamos que

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R}.$$

Comparando esta ecuación con la ley de Ohm para el circuito cerrado (1) vemos que en ella, la función de f. e. m. la desempeña una magnitud que se compone de dos términos: de la f. e. m. $\mathcal{E}$ de la pila y de la magnitud $-\frac{d\Phi}{dt}$. Este término es una f. e. m. complementaria de inducción que se debe a la variación del flujo de inducción Φ a través de la superficie limitada por el contorno. Llamándola $\mathcal{E}_i$, tenemos que

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (3)$$

La ecuación (3) se denomina *ley de Faraday*.

La ley de Faraday de la f. e. m. de inducción se ha obtenido examinando el caso cuando el flujo de inducción a través de un contorno varía a costa de la variación de la forma del propio contorno. Sin embargo, se puede demostrar que esta ecuación es justa para todos los casos de variación del flujo de inducción a través del contorno independientemente de las causas que originen esta variación, como son, la variación de su forma, su giro, desplazamiento por un campo variable, o, por último, la variación con el tiempo de la inducción magnética del propio campo.

A la derecha de la ecuación (3) tenemos la derivada con respecto al tiempo del flujo de inducción Φ a través del contorno. Esto significa que el valor numérico de la f. e. m. *de inducción $\mathcal{E}_i$ es proporcional a la velocidad de variación del flujo de inducción respecto al tiempo*. Queda por aclarar el sentido del signo (menos) de la parte derecha de la ecuación (3). Para ello elijamos como positivo un sentido cualquiera de recorrido del contorno. El sentido de la co-

rriente lo consideraremos positivo, si coincide con el sentido positivo de recorrido del contorno. También consideraremos positiva la f.e.m., si crea en el circuito una caída de potencial en el sentido del recorrido positivo del contorno. Tracemos una normal al contorno, cuyo sentido positivo esté relacionado con el sentido positivo de recorrido del contorno mediante la regla indicada en la pág. 389. El flujo positivo de inducción a través de la superficie del contorno lo crearán las líneas de inducción que van paralelas a la normal o que forman con ella un ángulo agudo.

El flujo negativo de inducción a través del contorno lo crearán las líneas de inducción de sentido opuesto al de la normal, o que forman con ella un ángulo obtuso. Entonces, el signo menos de la derecha de la ecuación (3) indica que *el aumento del flujo de inducción* $\left(\frac{d\Phi}{dt}>0\right)$ *crea una f. e. m. que actúa en el sentido negativo de recorrido del contorno*; *la disminución del flujo de inducción* $\left(\frac{d\Phi}{dt}<0\right)$ *crea una f. e. m. que actúa en el sentido positivo de recorrido del contorno.* De esta manera tenemos que la expresión (3) nos da al mismo tiempo la dirección y la magnitud de la f. e. m. de inducción. Es fácil comprobar que este sentido concuerda con la regla de Lenz.

Queda por analizar la cuestión de las unidades en que se mide la f. e. m. de inducción. Si el flujo de inducción se mide en maxwelios, es decir, en unidades *CGSM*, y el tiempo t en segundos, la fórmula (2), en la cual no hay coeficiente alguno de proporcionalidad, determinará la unidad *CGSM* de f. e. m. Esta nueva unidad de f. e. m. se puede denominar Mx/seg y numéricamente es igual a la f. e. m. de inducción creada en un contorno cerrado al variar el flujo de inducción magnética a través de la superficie de este contorno en 1 Mx por 1 seg.

La relación entre la unidad *CGSM* de f. e. m. Mx/seg y la unidad *CGSE* de f. e. m. se obtiene basándose en lo siguiente. La magnitud $I\mathcal{E}$ es una potencia y si se mide la intensidad de la corriente I y la f. e. m. $\mathcal{E}$ en unidades *CGSE* o en unidades *CGSM*, en ambos casos la potencia se expresará en erg/seg. Por lo tanto debe cumplirse la relación:

$$I_{CGSE}\cdot\mathcal{E}_{CGSE}=I_{CGSM}\cdot\mathcal{E}_{CGSM},$$

donde los subíndices *CGSE* y *CGSM* indican respectivamente en qué unidades se han medido I y $\mathcal{E}$. De donde:

$$\frac{\mathcal{E}_{CGSE}}{\mathcal{E}_{CGSM}}=\frac{I_{CGSM}}{I_{CGSE}}. \qquad (4)$$

Pero, según lo dicho en el § 195, la unidad *CGSM* de intensidad de la corriente es c veces mayor que la unidad *CGSE* de intensidad

de la corriente, donde c es la velocidad de la luz, aproximadamente igual a 3.10^{10} cm/seg. Por consiguiente, de la relación (4), obtenemos que

1 unid. *CGSM* de f. e. m. $= \frac{1}{3\ 10^{10}}$ unid. *CGSE* de f. e. m.

(Sobre las unidades de medición de las magnitudes de la fórmula (3) en el sistema internacional, véase el § 223).

Analicemos la ley de inducción desde el punto de vista electrónico. Sea el sector *ab* de un conductor colocado en un campo magnético de excitación H dirigido hacia la parte posterior del dibujo (fig. 292). Los electrones libres, en movimiento térmico desordenado, en el campo magnético sufren la acción de la fuerza de Lorentz. No obstante, como término medio, esta fuerza no crea ninguna corriente, ya que las direcciones de las fuerzas aplicadas a distintos electrones, son desordenadas. Si ahora empezamos a desplazar el sector *ab* del conductor, por ejemplo, hacia la derecha a la velocidad v, los electrones del metal adquirirán una componente complementaria de la velocidad igual a v. Por consiguiente, sobre los electrones actuará una fuerza complementaria de Lorentz de la misma dirección y sentido para todos los electrones e igual a

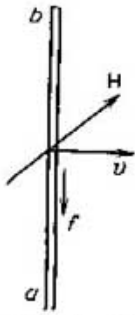


Fig. 292. Sentido de la fuerza de Lorentz que actúa sobre una carga al desplazar el conductor por un campo magnético H exterior.

$$f_L = evH.$$

Si el campo va dirigido hacia la parte posterior del dibujo y el sector *ab* se desplaza hacia la derecha, la fuerza que actúa sobre los electrones (carga negativa) irá dirigida hacia abajo. Los electrones, solicitados por esta fuerza se desplazarán hacia abajo, por consiguiente se creará una corriente dirigida hacia arriba. La fuerza eléctrica equivalente, $f = eE$, que comunicaría este mismo desplazamiento a los electrones, se determina de la ecuación:

$$f = eE = evH.$$

Por consiguiente, la intensidad equivalente del campo eléctrico E será

$$E = vH$$

e irá dirigida hacia arriba.

La fuerza electromotriz que se crea en el sector, se mide por la diferencia de potencial que crearía la fuerza eléctrica equivalente en los extremos del sector. Como la intensidad del campo es el cociente de dividir la diferencia de potencial en los extremos del sector por la longitud del mismo, la f. e. m. será el producto de la intensidad equivalente E del campo eléctrico por la longitud del sector l, es decir,

$$\mathcal{E}_i = lE = vHl. \qquad (5)$$

Pero el producto vl es el área de la superficie que barre el sector al desplazarse por unidad de tiempo y, por consiguiente, todo el término de la derecha de la ecuación (5) expresará el flujo de la excitación magnética H que atraviesa el sector del conductor en la unidad de tiempo. Ya que cuando no hay cuerpos magnéticos, el flujo de excitación magnética coincide con el de inducción, tendremos

www.elsolucionario.org

que $vHl = \frac{d\Phi}{dt}$. De donde el valor de la f. e. m. de inducción será

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt},$$

que coincide con la fórmula (3).

La f. e. m. va dirigida hacia el lado en que se desplazan las cargas positivas, es decir, en el caso de la fig. 292, hacia arriba. Es cómodo hallar esta dirección *con ayuda de la regla de la mano derecha*: si se coloca la mano derecha, con el dedo pulgar extendido formando ángulo recto con los demás, de manera que las líneas de inducción magnética penetren por la palma perpendicularmente y el pulgar indicando la dirección del desplazamiento del conductor, los demás dedos extendidos indicarán la dirección y sentido de la f. e. m. de inducción. Para un contorno cerrado, esta regla nos dará la dirección de la f. e. m. total en correspondencia con la regla de Lenz.

De esta manera tenemos que la creación de la corriente inducida *al desplazar el conductor* por un campo magnético exterior viene explicada por la acción de la fuerza de Lorentz sobre los electrones del conductor. Sin embargo, como se ha visto, la corriente inducida aparece también en el caso de que el contorno conductor permanezca inmóvil y varíe en las proximidades del mismo la magnitud de la inducción magnética. Para este caso no es aplicable la explicación aducida. Para explicar en este caso la creación de la corriente inducida, hay que admitir que *en cada punto del espacio, al variar la magnitud de la inducción magnética con el tiempo, se crea una fuerza eléctrica*. Esta suposición es la base de la teoría de Maxwell, que analizamos más abajo (§§ 243, 244).

§ 223. Cantidad de electricidad transportada por la corriente inducida. Unidades de las magnitudes magnéticas en el sistema internacional. Al crearse en el contorno una corriente de inducción, por el conductor hay un transporte de cargas. Si $\mathcal{E}_i$ es la f. e. m. de inducción y R, la resistencia total del contorno examinado, la intensidad de la corriente creada en él será

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}.$$

El valor de la fuerza electromotriz de inducción, según lo dicho en el § 222, será

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt},$$

de donde

$$I = \frac{d\Phi/dt}{R}. \qquad (1)$$

La cantidad de electricidad dq transportada durante el tiempo dt a través de la sección transversal del conductor, es igual a Idt, de donde, basándonos en la (1), se tiene que

$$dq = \frac{1}{R} d\Phi. \qquad (2)$$

donde $d\Phi$ es la variación del flujo de inducción magnética a través del contorno durante el tiempo dt.

Supongamos que al comienzo de un intervalo finito de tiempo el flujo de inducción magnética a través del contorno que se examina es Φ_1, y al final del intervalo de tiempo, es Φ_2. La cantidad q tota de electricidad que pasa por la sección transversal del conducto debido a la creación de la corriente inducida, vendrá expresada po la ecuación que se obtenga sustituyendo en la fórmula (2) la varia ción infinitamente pequeña del flujo de inducción $d\Phi$, por la varia ción total $\Phi_2-\Phi_1$:

$$q=\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R}. \qquad (2a$$

La fórmula (2a) nos permite determinar la cantidad de electricida que pasa por la sección transversal del contorno en función de l variación del flujo de inducción magnética a través de la superfici del contorno, y viceversa, determinar la variación del flujo d inducción magnética $\Phi_2-\Phi_1$ a través de la superficie del contorn en función de la cantidad de electricidad q.

La fórmula (2a) se utiliza en el sistema internacional de unidade para establecer la unidad del flujo magnético. Por unidad de fluj magnético Φ se toma el flujo a través de un contorno cerrado d 1Ω de resistencia, en el que disminuyendo el flujo hasta cero bajo la acción de la f. e. m. de inducción, por el contorno fluye un cantidad de electricidad de 1 C. Esta unidad de flujo se denomin *weber*. Como es fácil de calcular, 1 Wb $=10^8$ Mx. La unidad d inducción magnética B en el sistema internacional de unidades s establece basándose en la relación:

$$B_n=\frac{\Phi}{S},$$

de donde la unidad de inducción magnética se toma en Wb/m^2 A esta unidad, la 11ª Conferencia General de pesos y medidas (1960 la denominó *tesla*. Entre esta unidad de inducción magnética y e gausio hay la siguiente relación:

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gausios}.$$

Fácilmente se ve que, si en la ley de Faraday [(3) del § 222] s mide el flujo de inducción magnética Φ en webers y el tiempo en segundos, la fuerza electromotriz de inducción $\mathscr{E}_i$ resultará e voltios. Así tenemos que en el sistema internacional de unidades

$$\mathscr{E}_i(\mathrm{V})=-\frac{d\Phi}{dt}\left(\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{seg}}\right). \qquad (3$$

Si se mide la f. e. m. de inducción $\mathscr{E}_i$ en voltios y la variación de flujo de inducción $\frac{d\Phi}{dt}$ en Mx/seg, la ecuación (3) se transforma en

$$\mathscr{E}_i(\mathrm{V})=-10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}\left(\frac{\mathrm{Mx}}{\mathrm{seg}}\right). \qquad (3a$$

Veamos un ejemplo numérico: un cuadro de superficie $S=1\ 000\ cm^2$ y de resistencia óhmica $R=0,5\ \Omega$, al principio está paralelo a las líneas de inducción del campo magnético de la Tierra; después, el cuadro gira de manera que su plano se oriente perpendicularmente a las líneas de inducción magnética. ¿Qué cantidad de electricidad se induce en el cuadro, si la inducción magnética del campo de la Tierra es $B=0,5$ gausios?

S o l u c i ó n. La variación del flujo de inducción a través de la superficie del cuadro es igual, en el caso dado, al flujo a través del cuadro en su segunda posición:

$$\Phi_2-\Phi_1=BS.$$

Expresando, en esta ecuación, B en gausios y S en cm^2, se obtiene el flujo en unidades *CGSM*. Para pasar al sistema internacional de unidades, hay que multiplicar este valor por 10^{-8}:

$$\Phi_2-\Phi_1=10^{-8}\cdot 0,5\cdot 10^3\ Wb$$

De donde, según la fórmula (2a), la cantidad de electricidad inducida en culombios será

$$q=\frac{10^{-8}\cdot 0,5\cdot 10^3}{0,5}\ C=10^{-5}\ C.$$

La cantidad de electricidad q que surge debido a la *breve* variación del flujo de inducción magnética se puede medir con ayuda de un aparato denominado *galvanómetro balístico*. En principio, la construcción del galvanómetro balístico coincide con la de los galvanómetros corrientes. Su sistema móvil consta de un cuadro entre dos polos de un imán permanente. Al cuadro se fija una aguja. Un resorte mantiene al cuadro en una posición determinada. Al fluir por el cuadro una corriente inducida I, sobre el cuadro actuará un momento de fuerzas:

$$M=HSIn,$$

donde H es la excitación magnética del campo del imán, n, el número de espiras del conductor del cuadro y S, el área del mismo. Como las magnitudes S, n y H son constantes para el instrumento dado, tenemos que

$$M=cI,$$

donde c es una constante denominada *constante dinámica del galvanómetro*.

Bajo la influencia de la impulsión angular Mdt, el cuadro empieza a girar y su momento de la cantidad de movimiento variará en la magnitud $Jd\omega$, donde J es el momento de inercia de todo el sistema móvil, y $d\omega$, la variación de la velocidad angular del cuadro. Como la variación del momento de la cantidad de movimiento es igual a la impulsión angular (véase el t. I), tenemos que

$$Jd\omega=M\,dt=cI\,dt. \qquad (4)$$

Si el tiempo t durante el cual fluye la corriente I, es pequeño en comparación con el período de las propias oscilaciones del sistema

www.elsolucionario.org

de suspensión del galvanómetro, la acción del momento de las fuerzas sobre este sistema tiene el carácter de impulso, con lo cual el sistema adquiere una velocidad angular ω_0. Por eso, integrando la ecuación (4) entre los límites cero y t, obtenemos que

$$\int_0^{\omega_0} J\,d\omega = \int_0^t cI\,dt \quad \text{o} \quad J\omega_0 = cq,$$

donde q es la cantidad de electricidad que pasa durante el tiempo t. Y de aquí tenemos que

$$\omega_0 = \frac{c}{J}\,q.$$

Bajo la influencia de la velocidad angular adquirida ω_0, el sistema móvil empieza a girar, teniendo en cuenta que el ángulo límite φ_0 en que ha girado ("ángulo de repulsión") se puede considerar proporcional a la velocidad inicial:

$$\varphi_0 = k\omega_0 \frac{kc}{J}\,q.$$

De esta manera tenemos que el "ángulo de repulsión" φ_0 de la aguja del galvanómetro es proporcional a la cantidad de electricidad que pasa por el galvanómetro. De ello, a la inversa, se deduce que se puede determinar q en función del ángulo de repulsión φ_0. Para que el ángulo de repulsión sea proporcional a q, los parámetros del sistema de suspensión del galvanómetro deben elegirse de manera que el período de las propias oscilaciones sea bastante grande. La constante del galvanómetro kc/J de ordinario se determina empíricamente graduándolo, es decir, haciendo pasar por él una cantidad q conocida de electricidad, por ejemplo, descargando un condensador de capacidad determinada.

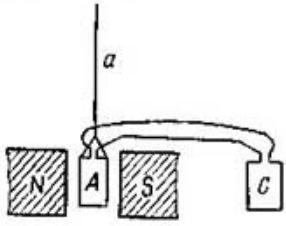


Fig. 293. Esquema del fluxómetro.

Como según la ecuación (2a), la cantidad de electricidad q que pasa debido a la creación de una corriente inducida, es proporcional a la variación del flujo de inducción magnética Φ, el galvanómetro balístico puede servir para medir los flujos magnéticos. El galvanómetro balístico especialmente construido para medir el flujo de inducción magnética se denomina *fluxómetro*. El esquema estructural del fluxómetro ordinario se diferencia algo del del galvanómetro balístico que se acaba de describir. En la fig. 293 N y S son los polos de un imán permanente y A, el cuadro situado entre ellos. Este cuadro está suspendido de un hilo a tan largo y de resistencia

a la torsión tan insignificante, que el momento de torsión que aparece al girar el cuadro es infinitamente pequeño, y el cuadro, en cualquier posición entre los polos N y S está en equilibrio indiferente. Los extremos de los conductores del cuadro A se unen a otro cuadro C. Este cuadro C se sitúa en el espacio donde se desea medir el valor del flujo de inducción magnética. Si el cuadro C al principio se hallaba fuera del campo magnético, la variación del flujo de inducción magnética es igual al valor del flujo final $\Phi_2 n_2$, donde Φ_2 es el flujo a través de la superficie del cuadro y n_2, el número de espiras del mismo. Debido a la variación del flujo de inducción magnética a través de la superficie del cuadro C, en éste se crea una corriente inducida I_2 que fluirá también por el cuadro A y le causará un giro en el campo magnético del imán NS. Este giro originará a su vez una variación del flujo de inducción magnética a través del cuadro y, por consiguiente, la aparición de una corriente inducida I_1, cuya dirección y sentido, según la regla de Lenz, serán aquellos en que las fuerzas magnéticas frenen el cuadro A. Como resultado de ello, el cuadro A se detiene. El momento M de las fuerzas que actúan sobre el cuadro, será

$$M = HS_1 n_1 (I_1 + I_2),$$

donde H es la excitación magnética entre los polos N y S; n_1, el número de espiras del cuadro A, y S_1, el área del mismo. Como en las posiciones inicial y final el cuadro está en reposo, la impulsión angular debe ser igual a cero:

$$\int_0^t M\,dt = \int_0^t HS_1 n_1 (I_1 + I_2)\,dt = 0,$$

de donde

$$\int_0^t I_2 dt = -\int_0^t I_1 dt \quad \text{o} \quad |q_2| = |q_1|,$$

es decir, las cantidades de electricidad transportadas por las corrientes inducidas I_2 e I_1 son numéricamente iguales. Pero según la fórmula (2a):

$$q_2 = \frac{\Phi_2 n_2}{R}, \quad q_1 = \frac{\Delta\Phi_1 n_1}{R},$$

donde $\Delta\Phi_1$ es la variación del flujo de inducción magnética a través del cuadro A y R, la resistencia total de todo el circuito. De donde

$$|\Phi_2|\, n_2 = |\Delta\Phi_1|\, n_1.$$

A pequeños ángulos α de giro del cuadro A, la variación del

flujo $\Delta\Phi_1$ es proporcional a α, de donde $|\Phi_2|$ también lo será:

$$|\Phi_2| = k\alpha,$$

donde k es una magnitud constante para el aparato dado. Así, según el ángulo de giro del cuadro A se puede medir el flujo a través del cuadro C. Está claro que con ello se puede determinar también el valor de la inducción magnética B en el lugar del campo magnético en que se introduce el cuadro C. Si el cuadro C se sitúa normalmente a las líneas de inducción del campo, tendremos que $\Phi_2 = BS_2$.

§ 224. Determinación de la fuerza electromotriz de inducción para casos particulares. Utilizando el método de determinación de la f. e. m. en los contornos analicemos una serie de casos particulares.

1. Examinemos la creación de una corriente inducida en un cuadro que gira en un campo magnético uniforme. Supongamos

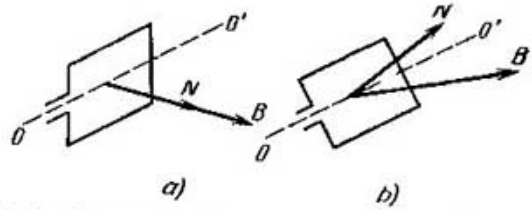


Fig. 294. Cuadro que gira en un campo magnético exterior.

que en el momento inicial el cuadro es perpendicular a las líneas de inducción. Convengamos en caracterizar la posición del cuadro por la dirección de la normal N al plano del cuadro, normal que dirigimos paralelamente a las líneas de inducción en la posición inicial del cuadro (fig. 294, *a*). Al girar el cuadro, la normal cambiará de dirección. En la posición inicial del cuadro, el flujo de inducción magnética a través de la superficie S limitada por el cuadro, será

$$\Phi_0 = BS.$$

Supongamos que el cuadro gira uniformemente a la velocidad angular ω alrededor del eje OO'. Entonces, en la posición del cuadro en que la normal N forma un ángulo $\varphi = \omega t$ con la dirección inicial (fig. 294, *b*), el flujo de inducción será

$$\Phi = BS\cos\omega t = \Phi_0 \cos\omega t.$$

La fuerza electromotriz de inducción se determina de la ecuación (3) del § 222:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega\Phi_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad (1)$$

www.elsolucionario.org

Vemos que la mayor f. e. m. se obtiene en las posiciones en que el flujo es igual a cero [$\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, donde k es un número entero].

En estas posiciones, la rapidez de variación del flujo es la máxima. En las posiciones en que el flujo es el máximo ($\varphi = k\pi$), la f. e. m. es igual a cero. La fuerza electromotriz será positiva, si el ángulo φ está entre los límites

$$0 < \varphi < \pi.$$

Esto significa que en la primera mitad de una revolución, por el cuadro fluye una corriente creada por el campo magnético paralelo a la normal N. Si φ está entre los límites

$$\pi < \varphi < 2\pi,$$

la f. e. m. de inducción es negativa, lo cual significa que la corriente inducida crea un campo magnético dirigido en sentido contrario al de la normal N. Por consiguiente, en el transcurso de una revolución, la f. e. m. cambia dos veces de signo.

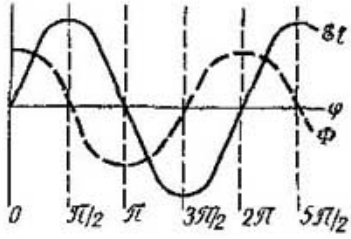


Fig. 295. Gráfico de la variación del flujo de inducción Φ y de la fuerza electromotriz de inducción $\mathcal{E}_i$ de un cuadro que gira.

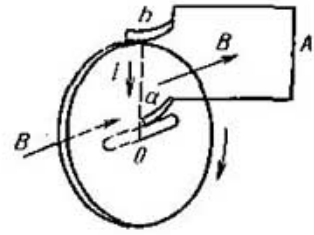


Fig. 296. Corriente inducida en un disco en rotación.

En la fig. 295 se representan los gráficos de variación del flujo de inducción (línea de puntos) y de la f. e. m. (línea de trazo continuo) en función del ángulo de giro φ.

La obtención de la f. e. m. al girar una espira en un campo magnético es la base de la construcción de las dínamos (véase el § 235).

2. Veamos el caso de la creación de una f. e. m. en un disco que gira con contactos de corredera. Sea un disco normal a las líneas de inducción de un campo magnético y que pueda girar alrededor del eje O que pasa por su centro (fig. 296). Con ayuda de los contactos de corredera a y b se forma el circuito cerrado $AbaA$. Si se hace girar el disco, en el circuito se crea una corriente ininterrumpida. La dirección y sentido de la corriente inducida se determina

por la regla de Lenz: si las líneas de inducción magnética van dirigidas hacia el lector y el disco gira según las agujas del reloj, la corriente inducida fluirá por el disco desde el contacto b hasta a.

Este experimento es el inverso al que se ha hecho cuando se hace girar al disco en un campo magnético al aplicarle una corriente (véase el § 210). Tanto en aquel caso como en éste, el flujo de inducción a través del contorno $AbaA$ de la corriente permanece constante. Aplicando formalmente la ley de inducción, habría que esperar que no hubiese corriente inducida. En la realidad hay que tener en cuenta el desplazamiento en cada momento del radio del disco que cierra el circuito entre los puntos a y b. Al girar el disco un ángulo infinitamente pequeño $d\varphi$, el radio gira el ángulo $d\varphi$ y barre la superficie $dS = \frac{1}{2} R^2 d\varphi$, donde R es el radio del disco. El flujo de inducción a través de esta superficie será $d\Phi = B\,dS$, y la velocidad de su variación:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = B\frac{1}{2}R^2\frac{d\varphi}{dt}.$$

Observando que $d\varphi/dt$ es la velocidad angular ω del disco, obtenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}R^2\omega B.$$

Colocando este valor de $d\Phi/dt$ en la ecuación (3) del § 222, hallamos el valor de la f. e. m. de inducción:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{1}{2}\omega R^2 B. \qquad (2)$$

Lo que se acaba de examinar es el esquema de una simple dínamo.

Veamos unos cuantos ejemplos numéricos más.

Ejemplo 1. Un toroide de alambre (sin núcleo) tiene $n=25$ espiras por cm; el área de la sección transversal del toroide es $S=20$ cm^2. El toroide está entrelazado con un aro de una espira de conductor (como se indica en la fig. 290). Con ayuda de un reóstato se consigue una caída de la intensidad I de la corriente en el toroide de 20 A por seg. ¿Cuál es la f. e. m. creada en el aro?

Solución. La inducción magnética del campo en el interior del toroide es igual a

$$B = 4\pi\mu In,$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio del interior del toroide. Como el campo está concentrado solamente en el interior del toroide, el flujo de inducción será

$$\Phi = 4\pi\mu InS,$$

y su variación con el tiempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 4\pi\mu nS\frac{dI}{dt}.$$

Midiendo la intensidad I de la corriente en unidades $CGSM$, S en cm^2 y n en

cm^{-1}, obtenemos la variación del flujo en Mx/seg. El valor de la f. e. m. $\mathcal{E}_i$ en voltios se obtiene con la fórmula [(3a) del § 222]:

$$|\mathcal{E}_i| = 10^{-8} \cdot 4\pi\mu n S \frac{dI}{dt}.$$

Colocando en esta fórmula $\frac{dI}{dt} = 20$ A/seg$=2$ unid. $CGSM$/seg, $S=20$ cm^2, $n=25$ cm^{-1} y $\mu=1$, hallamos que

$$|\mathcal{E}_i| = 10^{-8} \cdot 12{,}56 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 20 \text{ V} \cong 1{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ V}.$$

Ejemplo 2. Un cuadro con un área de sección $S=100$ cm^2 y un número de espiras $n=50$ gira en un campo magnético uniforme de inducción $B=1\,000$ gausios haciendo 50 r. p. seg. El eje de giro del cuadro es perpendicular a las líneas de inducción. Determinar el valor máximo de la f. e. m. en el cuadro.

Solución. Según la fórmula (1), la f. e. m. máxima en un cuadro de una espira es

$$\mathcal{E}_{i\,máx} = \omega BS,$$

donde ω es la velocidad angular de giro del cuadro. Para un cuadro de n espiras de conductor tenemos que

$$\mathcal{E}_{i\,máx} = \omega BSn.$$

Colocando en esta ecuación $B=10^3$ gausios, $S=100$ cm^2, $\omega = 2\pi \cdot 50$ seg$^{-1} = 3{,}14 \times 100$ seg^{-1} obtenemos que

$$\mathcal{E}_{i\,máx} = 10^{-8} \cdot 3{,}14 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 50 \text{V} \cong 15{,}7\text{V}.$$

Ejemplo 3. Un disco de cobre colocado perpendicularmente a las líneas de inducción del campo magnético terrestre gira a la velocidad de 50 r. p. seg. El radio del disco es $R=50$ cm. Determinar la diferencia de potencial entre el centro y el borde del disco. La inducción magnética del campo de la Tierra es $B=0{,}5$ gausios.

Solución. Entre el centro y el borde del disco se crea una diferencia de potencial igual a la f. e. m. $\mathcal{E}_i$ determinada por la fórmula (2):

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{2} R^2 \omega B.$$

Colocando en esta ecuación $R=50$ cm, $\omega = 2\pi \cdot 50$ seg^{-1} y $B=0{,}5$ gausios, obtenemos que

$$V_1 - V_2 = 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 50^2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 0{,}5 \text{ V} \cong 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}.$$

§ 225. Autoinducción. El fenómeno de inducción electromagnética se observa en todos los casos en que varíe el flujo de inducción a través de una superficie limitada por un conductor. En este caso es indiferente qué es lo que produce la variación del flujo. Si en un contorno cerrado fluye una corriente no continua, el campo magnético creado por esta corriente será variable. Por consiguiente variará el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno de esta misma corriente. La variación del flujo de inducción magnética acarreará la aparición en el contorno de una f. e. m. Así, pues, la variación de la corriente en el contorno acarrea la aparición de una f. e. m. de inducción en el mismo contorno. Este fenómeno se denomina *autoinducción*.

www.elsolucionario.org

Ejemplos característicos del fenómeno de autoinducción son las llamadas extracorrientes de cierre y de ruptura. Supongamos que cerramos el contorno, con lo cual se crea en el mismo una corriente eléctrica. En este caso el campo magnético de la corriente aumenta y, por consiguiente, aumenta el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno. Según la regla de Lenz, la corriente inducida que se produce, creará un flujo de inducción que se oponga al aumento del flujo magnético inicial. Por consiguiente, la corriente inducida crea un campo magnético dirigido en sentido contrario al campo magnético de la corriente inicial. De esto se deduce que la corriente inducida va en sentido contrario al de la corriente de cierre. Esta corriente inducida de sentido contrario se denomina *extracorriente de cierre*. La extracorriente de cierre disminuye la corriente que fluye por el contorno.

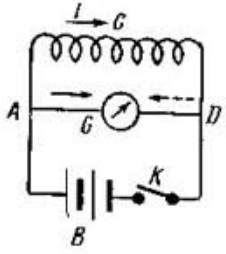


Fig. 297. Observación de la extracorriente de ruptura.

Un fenómeno análogo se observa al interrumpir el circuito. Si en el contorno la intensidad de la corriente disminuye, disminuirá el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno. En el contorno se induce una corriente que, según la regla de Lenz, crea un flujo de inducción que acrecienta el flujo que va disminuyendo, es decir, se induce una corriente en el mismo sentido en que fluía la corriente principal. Esta corriente inducida se denomina *extracorriente de ruptura*. La extracorriente de ruptura va en el mismo sentido que la corriente principal.

La extracorriente de cierre conduce a que el aumento de la corriente al cerrar el circuito se efectúe más lentamente que cuando no hay extracorriente. Si por ejemplo, se conecta una lámpara en un circuito que se caracteriza por tener una notable autoinducción, la lámpara se encenderá más lentamente que cuando en el circuito en que está conectada, no se percibe autoinducción.

La extracorriente de ruptura se puede observar en el aparato cuyo esquema se representa en la fig. 297. La corriente de la batería *B* fluye por el circuito que en *A* se bifurca en dos direcciones, una, *ACD*, se caracteriza por la propiedad de crear notables corrientes de autoinducción. En la segunda, *AGD*, se conecta el galvanómetro *G*. Supongamos que la corriente fluye de izquierda a derecha por las derivaciones *ACD* y *AGD*, como indican las flechas de trazo continuo. Si se desconecta el interruptor *k*, en la derivación *ACD* surgirá una extracorriente de ruptura del mismo sentido que el de la inicial. Esta extracorriente fluirá por la parte *DGA* cerrando el circuito, ya que la otra parte del circuito se ha interrumpido.

Evidentemente esta corriente, en la parte *DGA* fluirá de derecha a izquierda (flecha de trazos), lo cual se revela por la inclinación de la aguja del galvanómetro hacia el lado contrario al inicial.

En el experimento observado, la extracorriente de ruptura se crea fundamentalmente en la parte *ACD* del circuito, que es un conductor con varias espiras; la extracorriente que se crea en la parte rectilínea *AGD* no influye perceptiblemente. Esto indica que los conductores de distintas formas poseen diferentes capacidades de crear la autoinducción. La propiedad del contorno de poseer un fenómeno más o menos relevante de autoinducción viene caracterizado por una magnitud denominada *coeficiente de autoinducción*. Aclaremos el concepto de esta magnitud.

Sea un circuito cerrado cualquiera por el que fluye una corriente I. Según la ley de Biot-Savart-Laplace, la excitación magnética del campo y, por consiguiente, el vector de inducción creados por esta corriente son proporcionales en cada punto a la intensidad de la corriente. De esto se deduce que el flujo de inducción Φ que atraviesa la superficie limitada por el contorno de la corriente es proporcional a la intensidad de la corriente I:

$$\Phi = LI. \tag{1}$$

El coeficiente de proporcionalidad L se denomina *coeficiente de autoinducción del circuito*. Suponiendo en la igualdad (1) que la intensidad de la corriente I es igual a la unidad, vemos que *el coeficiente de autoinducción es igual al flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno, si por este contorno fluye una corriente de intensidad igual a la unidad.*

La fuerza electromotriz de autoinducción $\mathcal{E}_a$ se obtiene de la ley general de inducción expresada por la fórmula (3) del § 222, de donde:

$$\mathcal{E}_a = -\frac{d\Phi}{dt};$$

donde Φ es el flujo de inducción magnética a través del contorno que se examina, creado por la corriente que fluye por este mismo contorno. Sustituyendo en esta ecuación la magnitud Φ por su valor en función del coeficiente de autoinducción L y la intensidad de la corriente I del contorno, según la (1), obtenemos que, en el caso de una autoinducción constante:

$$\mathcal{E}_a = -L\frac{dI}{dt}. \tag{2}$$

Esta ecuación nos permite formular otra definición (dinámica) del coeficiente de autoinducción: *el coeficiente de autoinducción de un circuito es igual a la f. e. m. inducida en el circuito, si la intensidad de la corriente del mismo varía en una unidad por unidad de tiempo.*

El coeficiente de autoinducción viene determinado solamente por la forma geométrica del contorno y por el medio en que se halla el contorno.

Las ecuaciones (1) o (2) nos permiten establecer la unidad de medición del coeficiente de autoinducción. Generalmente se utilizan dos unidades diferentes del coeficiente de autoinducción: unidad absoluta electromagnética *CGSM* y unidad del sistema internacional. La unidad *CGSM* del coeficiente de autoinducción, según la fórmula (1), se ha convenido en considerar el coeficiente de autoinducción de un circuito, cuyo flujo de inducción a través del mismo es igual a un maxwelio siendo la intensidad de la corriente del mismo igual a una unidad electromagnética. La unidad del coeficiente de autoinducción en el sistema internacional se denomina *henrio* y es igual al coeficiente de autoinducción de un contorno, atravesado por un flujo de inducción de 1 Wb $=10^8$ Mx, siendo de 1 A la intensidad de la corriente que fluye por el mismo.

Es fácil determinar cuántas veces 1H es mayor que la unidad *CGSM* de autoinducción. Para ello se utiliza la ecuación (1), en que

$$1\text{H} \times 1\text{A} = 10^8 \text{ Mx}. \tag{3}$$

1 unid. *CGSM* de autoinducción $\times$ 1 unid. *CGSM* de intensidad de corriente $=1$ Mx.

Observando que 1 unid. *CGSM* de intensidad de corriente $=10$ A, transformaremos la última ecuación en:

$$1 \text{ unid. } CGSM \text{ de autoinducción} \times 10\text{A} = 1 \text{ Mx}. \tag{4}$$

Comparando la (3) y la (4), tenemos que

$$1\text{H} = 10^9 \text{ unid. } CGSM.$$

Utilizando la ecuación (2) podemos definir de otra manera al henrio: *el coeficiente de autoinducción es igual a 1 henrio, si en el circuito se crea una f. e. m. de autoinducción de 1 voltio al variar la intensidad de la corriente 1 amperio por segundo.*

Utilizando la definición del coeficiente de autoinducción deduzcamos su valor *para el solenoide.*

Sea un solenoide de N espiras, de sección S de la espira, y de longitud l. Supongamos que el solenoide tiene un núcleo de sustancia con una permeabilidad magnética μ. Calculemos el coeficiente de autoinducción de este solenoide considerando que el solenoide es tan largo, que se le pueda aplicar con un grado bastante elevado de exactitud, la fórmula (4) del § 194, según la cual la excitación magnética H en el interior del solenoide es

$$H = 4\pi \frac{N}{l} I, \tag{5}$$

www.elsolucionario.org

donde I es la intensidad de la corriente que fluye por el solenoide.

Llamando B a la inducción del solenoide, tenemos que el flujo de inducción magnética a través de la sección transversal del solenoide es

$$\Phi' = BS = \mu HS.$$

El flujo a través de todas las N espiras del solenoide será

$$\Phi = N \cdot \Phi' = \mu HSN.$$

Sustituyendo H por su valor según la (5), tenemos que

$$\Phi = 4\pi\mu \frac{N^2}{l} SI.$$

Introduzcamos en esta ecuación el concepto de número de espiras por unidad de longitud del solenoide $n = \frac{N}{l}$ y el de volumen del solenoide $V = lS$. Entonces tendremos que

$$\Phi = 4\pi\mu n^2 VI.$$

De esta ecuación y de la (1) hallamos que el coeficiente de autoinducción del solenoide es

$$L = \frac{\Phi}{I} = 4\pi\mu n^2 V. \qquad (6)$$

Así, pues, el coeficiente de autoinducción del solenoide es proporcional al cuadrado del número de espiras por unidad de longitud y al volumen del solenoide. El coeficiente de autoinducción, por definición, no depende de la intensidad de la corriente de la bobina; sin embargo, si el núcleo del solenoide es de sustancia ferromagnética, la permeabilidad magnética μ depende de la excitación magnética y, por consiguiente, de la intensidad de la corriente; y en este caso, esta dependencia puede ser muy considerable (véase el § 203). Hay que tener presente esta circunstancia al calcular los coeficientes de autoinducción de los solenoides con núcleos.

Calculemos el valor del coeficiente de autoinducción de un solenoide con los siguientes datos: la longitud del solenoide es $l = 50$ cm, la sección transversal es $S = 10$ cm^2, el número total de espiras es $N = 3\,000$ y $\mu = 1$.

Según la fórmula (6) tenemos que

$$L = 4\pi \left(\frac{3\,000}{50}\right)^2 \cdot 10 \cdot 50 \cong 2{,}3 \cdot 10^7 \text{ unid. } CGSM,$$

o pasando a henrios:

$$L \cong 0{,}023 \text{ H}.$$

No obstante, el valor verdadero del coeficiente de autoinducción de un solenoide de esta longitud y con este número de espiras será menor debido primeramente, a que aquí no se ha tenido en cuenta que el solenoide es finito, ni que las espiras del solenoide generalmente forman capas superpuestas unas sobre obras, con lo cual el flujo de inducción no pasará por completo a través de cada espira.

De lo dicho se deduce que las extracorrientes de cierre se revelarán con mayor intensidad, cuanto mayor sea el coeficiente de autoinducción del circuito dado. Este último es elevado para los conductores arrollados formando un solenoide, sobre todo si el núcleo es una sustancia ferromagnética.

Para observar la extracorriente de ruptura se ha utilizado el circuito en derivación de la fig. 297. Sin embargo, la extracorriente de ruptura surge también en un circuito no bifurcado. En un circuito de esta clase, en el momento de desconectar el interruptor, la corriente inicial desciende bruscamente, lo cual acarrea la creación de una gran f. e. m. de ruptura. Esta puede llegar a ser tan elevada que se produzca la perforación del aire entre los polos del interruptor produciéndose un arco entre ellos.

El surgimiento de intensas chispas o la formación de un arco entre los polos del interruptor debido a la extracorriente de ruptura, puede estropear el interruptor; por eso representa un peligro que se combate en electrotecnia.

§ 226. Extracorrientes de cierre y de ruptura. Examinemos con más detalle el carácter de las extracorrientes de cierre y de ruptura.

Para aclarar el carácter de la extracorriente de ruptura supongamos que en cierto circuito hay una f. e. m. inicial $\mathcal{E}_0$ que mantiene en el mismo una corriente de intensidad I_0. Después, en un instante de tiempo que consideraremos igual a $t=0$, esta f. e. m. se desconecta del circuito; pero éste se mantiene cerrado, teniendo en cuenta que la resistencia total del mismo es R. La corriente del circuito no cesa instantáneamente, sino que continuará fluyendo cierto lapso de tiempo a costa de la f. e. m. de autoinducción.

Según la fórmula (2) del § 225, esta f. e. m. de autoinducción es

$$\mathcal{E}_a = -L\frac{dI}{dt},$$

donde L es el coeficiente de autoinducción del circuito dado. La intensidad de la corriente I de autoinducción viene determinada por la ley de Ohm:

$$I = \frac{\mathcal{E}_a}{R} = -\frac{L}{R}\cdot\frac{dI}{dt}.$$

Esta ecuación se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt, \qquad (1)$$

que es una ecuación diferencial que determina la dependencia entre la intensidad de la corriente I de autoinducción y el tiempo t. Integrando los términos de la derecha y de la izquierda de la ecuación (1) hallamos que

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln C, \qquad (2)$$

donde C es una constante cualquiera. El valor de esta constante se obtiene de la condición de que $I=I_0$ cuando $t=0$; de donde, según la (2):

$$\ln I_0 = \ln C.$$

Así, la ecuación (2) se transforma en:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t, \tag{3}$$

o

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \tag{3a}$$

Esta ecuación indica que *la intensidad de la corriente al desconectar la f. e. m. disminuye según una ley exponencial*, disminuyendo con más lentitud cuanto mayor sea el coeficiente L de autoinducción y cuanto menor sea la resistencia R. La dependencia de la intensidad de la extracorriente de ruptura respecto al tiempo se representa gráficamente en la fig. 298.

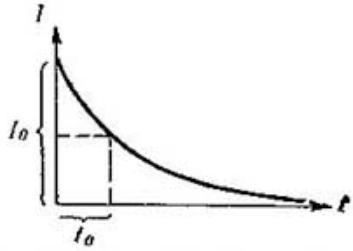


Fig. 298. Dependencia entre la intensidad de la extracorriente de ruptura y el tiempo.

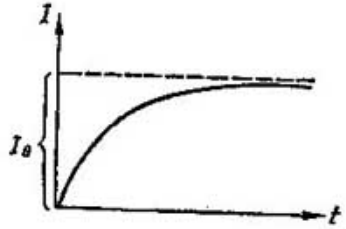


Fig. 299. Dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo al cerrar un circuito con autoinducción.

El tiempo t_0 durante el cual la intensidad de la extracorriente de ruptura disminuye hasta la mitad de su valor inicial, viene determinado por la ecuación (3a), si hacemos en ella $\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2}$, de donde

$$t_0 = \ln 2 \cdot \frac{L}{R}. \tag{4}$$

Como $\ln 2 \cong 0{,}7$, aproximadamente tendremos que

$$t_0 \cong 0{,}7 \frac{L}{R}. \tag{4a}$$

Así, por ejemplo, el tiempo durante el cual la intensidad de la corriente disminuye hasta el valor mitad del inicial al desconectar un circuito con autoinducción $L = 0{,}1$ H y $R = 0{,}7$ Ω, será, según la fórmula (4a):

$$t_0 \cong 0{,}7 \cdot \frac{0{,}1}{0{,}7} \text{ seg} = 0{,}1 \text{ seg}.$$

Pasemos ahora a examinar la extracorriente de cierre. Consideraremos que en el circuito de resistencia dada R se conecta una f. e. m. $\mathcal{E}_0$ independiente. En este caso, gracias a la autoinducción, la f. e. m. total del circuito será

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_a = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

www.elsolucionario.org

de donde la intensidad de la corriente I será

$$I = \frac{\mathcal{E}_0 - \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Observando que la magnitud $\mathcal{E}_0/R$ numéricamente es igual a la intensidad I_0 de la corriente que fluiría por el circuito, si no hubiese autoinducción, escribiremos esta última ecuación de la siguiente manera:

$$I_0 - I = \frac{L}{R} \cdot \frac{dI}{dt}$$

Como I_0 es constante, dI se puede sustituir por $-d(I_0 - I)$, con lo cual obtenemos que

$$\frac{d(I_0 - I)}{I_0 - I} = -\frac{R}{L}\,dt.$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación obtenemos que

$$\ln(I_0 - I) = -\frac{R}{L}\,t + \ln C_1. \tag{5}$$

La constante de integración $\ln C_1$ se determina de la condición de que $I = 0$ cuando $t = 0$, de donde $\ln C_1 = \ln I_0$, y la ecuación (5) adquiere la forma:

$$\ln \frac{I_0 - I}{I_0} = -\frac{R}{L}\,t, \text{ de donde } I_0 - I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

o, definitivamente:

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{6}$$

Esta ecuación indica que *al conectar la f. e.m., la corriente del circuito no alcanza inmediatamente el valor I_0, sino que lo hace gradualmente* y tanto más despacio, cuanto mayor sea el coeficiente de autoinducción L del circuito y menor sea la resistencia R del mismo. La dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo al conectar la f. e. m. se representa en la fig. 299. Teóricamente, la corriente debe alcanzar su valor final I_0 solamente al cabo de un intervalo infinitamente largo de tiempo. Prácticamente, para los valores ordinarios del coeficiente de autoinducción L, la corriente alcanza su valor final muy pronto.

Examinemos un ejemplo numérico: sean $L = 0{,}1$ H y $R = 1\ \Omega$ el coeficiente de autoinducción y la resistencia de un circuito respectivamente; determinemos el valor de la intensidad de la corriente en partes del valor de la intensidad I_0 final, al cabo de 0,01 seg y de 1 seg después de conectar en el circuito la f. e. m.

Según la fórmula (6) tenemos que

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = I_0(1 - e^{-10t},)$$

de donde para $t = 0{,}01$ seg, tenemos que

$$I = I_0(1 - e^{-0{,}1}) \cong 0{,}1 I_0;$$

y para $t = 1$ seg:

$$I = I_0(1 - e^{-10}) \cong 0{,}99995 I_0.$$

Así tenemos que al cabo de 0,01 seg la intensidad de la corriente de nuestro caso será solamente de 0,1 del valor final, y al cabo de 1 seg se diferenciará del

valor final solamente en un 0,005 %, es decir, prácticamente coincide con el valor final.

La existencia de extracorrientes de ruptura ha permitido descubrir el fenómeno de superconductibilidad (véase el § 154). En la superconductibilidad tenemos que $R=0$ y, según la fórmula (3a), la corriente, después de desconectar la f. e. m., continuará fluyendo por el circuito todo el tiempo que se quiera sin disminuir su intensidad. Los experimentos de Kamerlingh Onnes que condujeron al descubrimiento de la superconductibilidad, se realizaron de la siguiente manera: se colocaba un solenoide, cuyos extremos se unían entre sí, entre los polos de un electroimán, después de lo cual el solenoide se enfriaba con helio hasta la temperatura en que el material del hilo conductor se hacía superconductor. Luego se desconectaba el campo magnético del electroimán. En este caso, en el solenoide surgía una corriente inducida. En las condiciones ordinarias, esta corriente habría cesado de fluir al cabo de un intervalo de tiempo bastante pequeño; sin embargo, debido a la superconductibilidad continuó fluyendo por el solenoide durante muchas horas, sin revelar debilitación alguna perceptible.

§ 227. Inducción mutua. Pasemos al análisis del fenómeno de inducción mutua. Este fenómeno, en sus rasgos fundamentales ya se ha examinado al analizar los experimentos sobre la inducción electromagnética. Consiste en que al variar la intensidad de la corriente eléctrica en un contorno cualquiera, el campo magnético

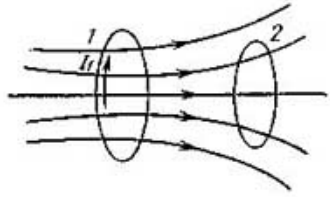


Fig. 300. Flujo de inducción que atraviesa dos contornos.

variable de esta corriente induce una f. e. m. en los contornos vecinos. Sean dos contornos *1* y *2* (fig. 300). Supongamos que la intensidad de la corriente del primer contorno es I_1. El flujo Φ de inducción magnética creado por esta corriente es proporcional a I_1. Llamemos Φ_{21} a la parte del flujo Φ que atraviesa el contorno *2*, entonces podemos suponer que

$$\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1. \tag{1}$$

En la fig. 300, el flujo Φ_{21} viene representado por las líneas de inducción magnética que atraviesan a ambos contornos (*1* y *2*).

Al variar la intensidad I_1 de la corriente del primer contorno, variará el flujo Φ_{21}, y en el segundo contorno se creará una f. e. m. de inducción $\mathcal{E}_2$, cuya magnitud vendrá determinada por la ecuación (3) del § 222:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Si las dimensiones y la posición de los contornos son invariables, el coeficiente L_{21} de la fórmula (1) será constante y

$$\frac{d\Phi_{21}}{dt} = L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

de donde

$$\mathcal{E}_2 = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \qquad (2)$$

El coeficiente L_{21} se denomina *coeficiente de inducción mutua* del circuito *2* y del *1*.

Está claro que todo lo dicho se puede repetir en el caso cuando varía la corriente en el contorno *2* y se induce corriente en el *1*. Entonces, llamando I_2 a la intensidad de la corriente del segundo circuito, y $\mathcal{E}_1$ a la f. e. m. que se crea en el primero, obtenemos que

$$\mathcal{E}_1 = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \qquad (2a)$$

El coeficiente L_{12} se denomina *coeficiente de inducción mutua del circuito 1 y del 2*.

Como se demostrará más abajo, siempre tiene lugar que

$$L_{21} = L_{12}. \qquad (3)$$

Así tenemos que se puede hablar simplemente del coeficiente de inducción mutua de dos circuitos.

Utilizando la relación (1) podemos formular lo siguiente: *el coeficiente de inducción mutua de dos circuitos L_{12} numéricamente es igual al flujo de inducción magnética creado por una corriente de unidad de intensidad en uno de los contornos y que atraviesa al segundo contorno.* De la ecuación (2) hallamos una segunda definición (dinámica): *el coeficiente L_{12} de inducción mutua de dos circuitos numéricamente es igual a la f. e. m. de inducción que se crea en uno de los circuitos al variar la intensidad de la corriente en el otro en una unidad por unidad de tiempo.*

La magnitud del coeficiente de inducción mutua viene determinada solamente por la forma geométrica y dimensiones de los circuitos y su posición relativa. Sólo en el caso de que haya cuerpos ferromagnéticos, el coeficiente de inducción mutua depende de las intensidades de las corrientes (debido a la dependencia de μ respecto a la excitación magnética H del campo).

Las unidades del coeficiente de inducción mutua se denominan de la misma manera que las respectivas unidades del coeficiente de autoinducción. La unidad electromagnética absoluta del coeficiente de inducción mutua es la inducción mutua de dos contornos que tienen la propiedad de que si en uno de ellos fluye una corriente de intensidad igual a una unidad electromagnética, creará un flujo,

www.elsolucionario.org

que atravesará el segundo contorno, de magnitud igual a un maxwelio. Prácticamente, la unidad del coeficiente de inducción mutua es el henrio, que es igual a 10^9 unidades absolutas electromagnéticas del coeficiente de inducción mutua. De la definición dinámica del coeficiente de inducción mutua se deduce que el *henrio* es igual al coeficiente de inducción mutua de tales circuitos en que en uno de ellos se crea una f. e. m. de 1 V, si en el otro varía la intensidad de la corriente en 1 A por seg.

§ 228. Energía del campo magnético de las corrientes. Al fluir una corriente continua por los conductores, toda la potencia desarrollada por los generadores de f. e. m. se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule. No ocurre lo mismo cuando las corrientes no son constantes (aumentan o disminuyen sus intensidades). Al aumentar la intensidad de la corriente, en el circuito se crea, como hemos visto, una f. e. m. de autoinducción, dirigida en sentido contrario al de la f. e. m. de la corriente que la genera. De resultas de ello, la intensidad de la corriente será menor, teniendo en cuenta que sólo una parte del trabajo realizado por la f. e. m. exterior se invertirá en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule. Y viceversa, al disminuir la intensidad de la corriente, en el circuito se crea una f. e. m. de autoinducción del mismo sentido que la exterior; la corriente resulta de mayor intensidad; en el circuito se desprende más calor de Lenz-Joule, que debería desprenderse con la f. e. m. dada. Está claro que el trabajo de más que se invierte al aumentar la corriente, se puede consumir solamente en la creación de una clase de energía que después, al disminuir la intensidad de la corriente, retorne de nuevo al circuito. Como al incrementar la corriente, aumenta también el campo magnético creado por ella, está claro que esta energía que surge, es *la energía del campo magnético o energía electromagnética de la corriente.*

Para calcular la energía del campo magnético examinemos un circuito con autoinducción L en el que la intensidad de la corriente crece desde cero hasta cierto valor finito I. Al aumentar la intensidad de la corriente, en el circuito se crea una f. e. m. $\mathcal{E}_a$ de autoinducción. El trabajo realizado que va en contra de esta f. e. m. se invierte en la creación de la energía del campo magnético. Si en el momento dado la intensidad de la corriente del circuito es I, la potencia desarrollada por la f. e. m. de autoinducción será igual a $I\,\mathcal{E}_a$ y, por consiguiente, el trabajo realizado en un pequeño intervalo de tiempo dt, será

$$dA = I\mathcal{E}_a\,dt.$$

Según lo dicho en el § 225, la f. e. m. $\mathcal{E}_a$ de autoinducción será numéricamente igual a $d\Phi/dt$, donde Φ es el flujo de inducción

magnética que atraviesa el circuito que se examina. De aquí que el trabajo elemental dA en el tiempo dt sea

$$dA = I \frac{d\Phi}{dt} \cdot dt = I d\Phi.$$

Si el coeficiente de autoinducción es constante, tenemos que $d\Phi = L\, dI$, y la expresión del trabajo elemental dA se puede escribir de la manera siguiente:

$$dA = IL\, dI. \tag{1}$$

Para calcular la reserva de energía magnética W_m igual al trabajo realizado al aumentar la intensidad de la corriente desde el valor cero hasta determinado valor I, hay que sumar todos los trabajos elementales, es decir, hay que integrar la ecuación (1) entre los límites desde 0 hasta I, de donde obtenemos que

$$W_m = \int_0^I IL\, dI,$$

o, después de integrar:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \tag{2}$$

En esta ecuación la energía magnética viene en función de los parámetros que caracterizan al circuito con corriente: intensidad I de la corriente y coeficiente L de autoinducción. Después veremos que esta misma energía W_m se puede expresar en función de parámetros que caractericen el propio campo, a saber, en función de la excitación magnética H del campo, de la inducción magnética B y del volumen del espacio ocupado por el campo. Esto permite localizar la energía magnética en la parte del espacio donde hay campo magnético, de manera análoga a como se hizo con las cargas electrostáticas que se podían localizar en el espacio en que hay campo electrostático.

Generalicemos este análisis tomando dos circuitos en los cuales fluyen las corrientes I_1 e I_2. La energía de este sistema no sólo depende del coeficiente de autoinducción, sino también del coeficiente de inducción mutua. Para demostrarlo calculemos el trabajo de creación de las corrientes. Supongamos primeramente que los dos circuitos están desconectados. Después el primer circuito se cierra y la f. e. m. conectada a este circuito realiza un trabajo que se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule y en vencer la f. e. m. de autoinducción. Esta última parte del trabajo que determina la energía del campo magnético de la corriente, como se ha demostrado, es

$$A_1 = \frac{1}{2} L_1 \cdot I_1^2,$$

donde L_1 es el coeficiente de autoinducción del primer circuito. Después de crearse la corriente en el primer circuito, cerremos el segundo, en cuyo caso, la f. e. m. conectada realiza en el segundo circuito un trabajo que se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule y en vencer la f. e. m. de autoinducción del segundo circuito. El trabajo invertido en salvar la f. e. m. de autoinducción, según lo expuesto anteriormente, es

$$A_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2,$$

donde L_2 es el coeficiente de autoinducción del segundo circuito. Con ello no se agota el trabajo, ya que al crearse la corriente en el segundo circuito, en el primero surge una f. e. m. de inducción mutua de valor:

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi_{12}}{dt}, \qquad (3)$$

donde Φ_{12} es el flujo de inducción magnética creado por la corriente I_2 en el segundo circuito y que atraviesa al primer circuito.

Para mantener constante la corriente I_1, la f. e. m. suministrada al primer circuito debe realizar un trabajo complementario venciendo a la f. e. m. de inducción mutua. Este trabajo A_{12} se puede calcular de la siguiente manera. El trabajo elemental dA_{12} durante un pequeño intervalo de tiempo dt es

$$dA_{12} = |\mathcal{E}_i| I_1 dt$$

o, sustituyendo $\mathcal{E}_i$ por su valor según la (3):

$$dA_{12} = I_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} dt = I_1 d\Phi_{12}.$$

Como la intensidad I_1 de la corriente se mantiene constante, el trabajo total para vencer la f. e. m. de inducción mutua será

$$A_{12} = I_1 \int_0^{\Phi_{12}} d\Phi_{12} = I_1 \Phi_{12},$$

donde Φ_{12} es el valor final del flujo de inducción magnética.

Teniendo en cuenta que $\Phi_{12} = L_{12} I_2$, donde L_{12} es el coeficiente de inducción mutua de los circuitos primero y segundo, obtenemos que

$$A_{12} = L_{12} I_1 I_2.$$

La energía del campo magnético de un sistema de dos corrientes se obtiene, si sumamos los trabajos A_1, A_2 y A_{12}, así obtenemos que

$$W_m = A_1 + A_2 + A_{12} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2. \qquad (4)$$

www.elsolucionario.org

Evidentemente, este mismo sistema de corrientes se podría crear en otro orden: primeramente creando la corriente en el segundo circuito, después, en el primero. Repitiendo los razonamientos arriba aducidos, en este caso se obtendría para la energía del sistema la expresión:

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + L_{21} I_1 I_2. \qquad (4a)$$

Como la energía del sistema de corrientes no debe depender del orden de su creación, las expresiones (4) y (4a) deben ser idénticas, de donde se obtiene que

$$L_{21} = L_{12},$$

relación que ya se había dado en la pág. 472.

La fórmula (2) expresa la energía del campo magnético de la corriente en función de la intensidad I de la corriente y del coeficiente de autoinducción L. Pero ya se ha indicado que esta fórmula se puede transformar de manera que represente la energía en función de las magnitudes que caractericen al campo magnético en el espacio circundante. Hagamos esta transformación en el caso particular de un campo magnético uniforme en el interior de un solenoide largo.

La energía magnética de la corriente que fluye por el solenoide, según la fórmula (2), es

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2.$$

El coeficiente de autoinducción del solenoide, según la fórmula (6) del § 225, es

$$L = 4\pi\mu n^2 V,$$

donde V es el volumen del solenoide, n, el número de espiras por unidad de longitud del solenoide, y μ, la permeabilidad magnética del medio que llena la parte interna del solenoide.

Además, la intensidad I de la corriente y la excitación magnética del campo en el interior del solenoide están relacionadas según la ecuación:

$$I = \frac{H}{4\pi n}.$$

Colocando estos valores de L e I en la (2), hallamos que

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 V, \qquad (5)$$

u, observando que μH es igual a la inducción magnética B, escribiremos la (5) de la manera siguiente:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} HBV. \qquad (6)$$

Como el campo magnético se puede considerar concentrado solamente en el interior del solenoide, es decir, en el volumen V, *la densidad de energía del campo magnético será*

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{8\pi} HB. \tag{7}$$

De esta manera tenemos que la densidad de la energía magnética es un producto de la excitación magnética H por la inducción magnética B. Si en la fórmula (7) estas dos magnitudes se miden en unidades del sistema *CGSM*, es decir, en oerstedios y gaussios respectivamente, w_m resultará en erg/cm³.

En el caso de un campo magnético variable, el espacio se puede considerar dividido en partes tan pequeñas, que en sus límites los vectores H y B se puedan considerar constantes. Entonces la fórmula (7) expresa la magnitud de la energía magnética dentro de los límites de esta parte del espacio. La energía correspondiente al volumen elemental dV será

$$dW_m = w_m dV = \frac{1}{8\pi} HB\,dV. \tag{7a}$$

Y la energía comprendida dentro de un volumen finito V vendrá determinada por la ecuación

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_V HB\,dV, \tag{8}$$

donde la integración se extiende a todo el volumen V.

§ 229. Trabajo invertido en la histéresis. La imantación de un cuerpo magnético no es una función unívoca de la excitación magnética del campo magnetizador. En el § 203 se ha examinado el fenómeno de histéresis, que indica que la imantación, a un valor dado de H, depende del camino recorrido para conseguir este valor de H.

Veamos el estado del cuerpo magnético caracterizado por el punto a de la fig. 301, en la cual se da el ciclo de la histéresis. Supongamos que partiendo del estado a imantamos el cuerpo magnético en un sentido y en otro recorriendo el ciclo de la histéresis según el trayecto *abkfela* volviendo de nuevo al estado a. Demostremos que este proceso de imantación está relacionado con una inversión de trabajo. Para ello utilicemos la ecuación deducida en el párrafo

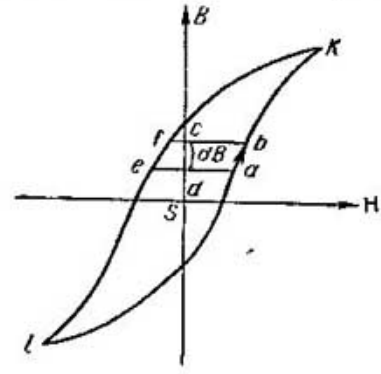


Fig. 301. Representación gráfica para calcular el trabajo invertido en la histéresis.

anterior, según la cual el trabajo elemental dA invertido en la creación de energía del campo magnético de un circuito, al aumentar el flujo de inducción magnética a través de este circuito en la magnitud $d\Phi$ (a costa del aumento de la intensidad de la corriente), es

$$dA = I d\Phi, \qquad (1)$$

donde I es la intensidad de la corriente en el contorno *).

Supongamos que el cuerpo magnético que examinamos es el núcleo de un largo solenoide. Sea N el número total de espiras del solenoide, y S, el área de la sección transversal de las espiras (y del núcleo). Entonces, el flujo total de inducción a través de las N espiras del solenoide será

$$\Phi = NBS,$$

donde B es la inducción magnética del campo en el núcleo del solenoide.

La intensidad de la corriente en el arrollamiento del solenoide está relacionada con la excitación magnética H creada por aquél, según la ecuación (véase el § 194):

$$I = \frac{H}{4\pi N/l},$$

donde l es la longitud del solenoide. Por consiguiente, según la (1), el trabajo elemental relacionado con la variación del flujo de inducción, será

$$dA = \frac{H}{4\pi N/l} d(NBS) = \frac{Sl}{4\pi} H dB.$$

Como Sl es el volumen del cuerpo magnético el trabajo dA' por unidad de volumen del núcleo será

$$dA' = \frac{1}{4\pi} H dB,$$

es decir, es proporcional al incremento dB del vector de inducción.

Volviendo a la fig. 300, vemos que el producto $H \cdot dB$ para cierto sector ab de la curva de histéresis, es la superficie de la franja $abcd$, ya que a este sector le corresponde el incremento del vector de inducción $dB = dc$. Este mismo valor $dB = cd$ corresponde también al sector fe de la curva de histéresis, pero en éste, el incremento dB es negativo, ya que en él la inducción disminuye (paso del punto f al punto e). El vector H en el trayecto fe también es negativo; por

*) Hay que observar que sería erróneo utilizar la fórmula (1) del párrafo anterior en el caso que estamos examinando de cuerpos ferromagnéticos, ya que para éstos el coeficiente de autoinducción L no es una magnitud constante y $d\Phi \neq L\, dI$.

www.elsolucionario.org

consiguiente, el producto $H \cdot dB$ será positivo y vendrá expresado por el área de la franja *cdef*. De esta manera, al valor examinado de dB en la imantación le corresponde un trabajo proporcional al área de la franja *abcd*, y en la desimantación, un trabajo proporcional al área de la franja *cdfe*. Teniendo en cuenta ambos trabajos, se puede decir que a los sectores *ab* y *ef* de la curva de histéresis corresponde un trabajo igual a $\frac{1}{4\pi} \times$ el área (*abfe*).

El ciclo completo de imantación se puede representar como una suma de estos sectores; por consiguiente, el trabajo total de imantación de una unidad de volumen del núcleo del solenoide será proporcional a la suma de las áreas de las franjas análogas a la *abfe*, es decir, será proporcional al área S_1 del ciclo de histéresis:

$$A' = \frac{1}{4\pi} S_1.$$

El trabajo invertido en la imantación de ciclo completo debe transformarse en energía complementaria del campo magnético del solenoide, o transformarse en calor. Como al volver al punto inicial *a*, el estado del campo magnético no ha cambiado, no puede haber variado su energía. De esto se deduce que la imantación en el ciclo completo de histéresis debe causar un calentamiento del núcleo, lo cual se observa en la práctica. Para calcular el trabajo hay que conocer la forma del ciclo de histéresis del material magnético en cuestión.

La pérdida de energía en la imantación del ciclo completo de los núcleos de sustancias ferromagnéticas hay que tenerla en cuenta al resolver diferentes problemas técnicos. En este caso, para determinar el trabajo se utiliza la siguiente fórmula empírica, que da resultados bastante satisfactorios para muchos materiales magnéticos:

$$A' = \eta B_{\text{máx}}^{1,6},$$

donde $B_{\text{máx}}$ es el valor máximo de la inducción magnética alcanzada en el ciclo dado de imantación. El coeficiente η depende de las propiedades del material; así, para aceros de transformadores

$$\eta = 0{,}0008 \text{ erg/cm}^3 \cdot (\text{gausios})^{1,6};$$

para el acero magnéticamente duro

$$\eta = 0{,}08 \text{ erg/cm}^3 \cdot (\text{gausios})^{1,6}.$$

§ 230. Coeficiente de autoinducción de un cable concéntrico. Como ejemplo de aplicación de las fórmulas deducidas en el § 227 calculemos el coeficiente de autoinducción de un sector de cable concéntrico, cilíndrico e infinitamente largo. Llamaremos cable concéntrico a dos conductores cilíndricos coaxiales, teniendo en cuenta que la corriente que fluye por el cilindro interior es igual y de sentido contrario a la que fluye por el cilindro exterior (fig. 302).

Llamemos R_1 y R_2 a los radios de los cilindros interior y exterior respectivamente. Consideremos un sector del cable de longitud l. La energía magnética de la corriente que fluye por este sector se puede representar de dos maneras:

en primer lugar, en función del coeficiente de autoinducción L del sector dado del cable según la fórmula (2) del § 227:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \qquad (1)$$

y en segundo lugar, en función de las magnitudes que caracterizan el campo magnético de las corrientes, según la fórmula (8) del § 227:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int_V \mu H^2 \, dV, \qquad (2)$$

donde la integral se extiende al volumen en que el campo magnético es distinto de cero según la longitud l del sector considerado del cable. La comparación de estas dos ecuaciones nos permite determinar el valor del coeficiente de autoinducción. Calculemos primeramente la energía W_m según la fórmula (2). Para ello recordemos (véase el § 199) que la excitación magnética del campo creada por la corriente que fluye por un conductor cilíndrico hueco, en el interior del cilindro es igual a cero. Por consiguiente, en el interior del cilindro de radio R_1, la excitación magnética del campo es igual a cero y esta zona queda fuera de la integración. La excitación entre las superficies cilíndricas se determinará solamente por la corriente que fluye por el cilindro interior, ya que la excitación magnética del campo del cilindro exterior en esta zona también es igual a cero. La excitación magnética del campo de la corriente que fluye por un conductor cilíndrico, según lo dicho en el § 199, en la parte exterior del cilindro es la misma que la creada por una corriente lineal de la misma intensidad que fluya por el eje del cilindro. Por consiguiente, en la zona entre los cilindros, la excitación magnética H del campo será

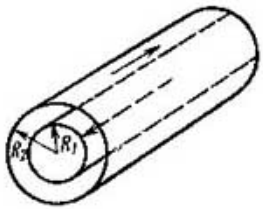


Fig. 302. Cable formado de dos conductores cilíndricos coaxiales.

$$H = \frac{2I}{r},$$

donde r es la distancia al eje del cilindro. En todos los puntos que están fuera de los dos cilindros, la excitación magnética es igual a cero, ya que es igual a la suma de dos excitaciones iguales y de sentido contrario creadas por dos corrientes de igual intensidad y de sentido contrario que fluyen por conductores cilíndricos de eje común. Por consiguiente, la integración de la fórmula (2) hay que extenderla solamente al sector de la capa cilíndrica de longitud l comprendida entre los cilindros.

Para el cálculo, dividamos todo el volumen en capas infinitamente delgadas de volumen $dV = 2\pi r \cdot dr \cdot l$; en los límites de esta capa, la excitación magnética H del campo se puede considerar constante. La energía correspondiente a esta capa será

$$w_m \cdot dV = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 \, dV = \mu I^2 l \frac{dr}{r}.$$

La energía total W_m se obtiene integrando esta ecuación en función de r entre los límites desde R_1 hasta R_2:

$$W_m = \mu I^2 l \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \mu l I^2 \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Comparando esta expresión de la energía W_m con la (1) que representa la misma energía en función del coeficiente de autoinducción L, obtenemos que el coeficiente de autoinducción del sector del cable de longitud l es

$$L = 2\mu l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Como la permeabilidad magnética μ del medio entre los conductores cilíndricos es aproximadamente igual a la unidad, tendremos que

$$L = 2l \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

§ 231. Corrientes de Foucault. Efecto pelicular. Las corrientes inducidas surgen también en los conductores macizos, que no se pueden considerar contornos lineales. En este caso se denominan *corrientes de Foucault*, en honor de su investigador. Un pedazo de metal macizo en un campo magnético variable es un conductor de poca resistencia, debido a lo cual las corrientes inducidas en él alcanzan grandes valores.

Como la f. e. m. de inducción es proporcional a la rapidez de variación del flujo de inducción magnética, la magnitud de las corrientes de Foucault será tanto mayor, cuanto mayor sea la rapidez de variación del campo magnético en que se halla el conductor en cuestión. Por eso es más fácil observar las corrientes de Foucault si se introduce el conductor en el interior de un solenoide, por cuyo arrollamiento se hace pasar una corriente alterna de alta frecuencia, la cual origina un campo magnético que varía rápidamente de magnitud. En este caso, las corrientes de Foucault en los cuerpos macizos y buenos conductores alcanzan una intensidad tan elevada, que el calor desprendido es suficiente para caldear el cuerpo. Este método se utiliza ampliamente en la técnica del vacío para caldear las piezas metálicas del interior del aparato en que se hace el vacío a fin de eliminar los gases. Este mismo método se utiliza para fundir metales en el vacío.

En muchos casos, no obstante, el caldeo originado por las corrientes de Foucault es perjudicial, como el calentamiento que sufren los núcleos de los transformadores (véase el § 236) y, en general, los núcleos metálicos de toda clase de arrollamientos por los cuales fluye corriente alterna. Para evitar este calentamiento, los núcleos se hacen de láminas aisladas una de otra por un material aislante fino y laminar situado perpendicularmente a la dirección de las corrientes de Foucault.

Las corrientes de Foucault se pueden observar también con ayuda de la siguiente instalación. Al hacer oscilar un péndulo compuesto de un trozo de metal y suspendido de un hilo entre los polos de un electroimán, las oscilaciones se amortiguarán débilmente, si no hay

www.elsolucionario.org

corriente en el electroimán; pero si se conecta la corriente al electroimán, las oscilaciones se amortiguan casi instantáneamente y el movimiento del péndulo hasta su completa detención se parece al movimiento de un cuerpo en un medio viscoso. Esto se explica porque las corrientes de Foucault que surgen al desplazarse el péndulo por el campo magnético, están dirigidas de manera que las fuerzas que actúan sobre ellas de parte del campo magnético, frenen el movimiento del péndulo.

Las corrientes de Foucault pueden surgir en el propio conductor por el cual fluye una corriente alterna. La aparición de estas corrientes acarrea el surgimiento de un efecto especial denominado

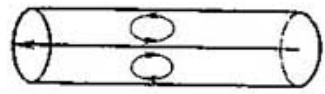


Fig. 303. Aparición del efecto pelicular.

efecto pelicular o Kelvin. Si la corriente alterna fluye por un conductor cilíndrico, al aumentar su intensidad las corrientes de Foucault irán dirigidas según se indica en la fig. 303. Estas corrientes, en la superficie del conductor fluirán en el mismo sentido que la corriente primitiva, y en el eje del conductor, en sentido contrario. Como resultado de ello, en el interior del conductor se debilita la corriente, y en la superficie del mismo, se intensifica. De esta manera, debido a la creación de las corrientes de Foucault, la corriente se distribuirá irregularmente por la sección del conductor. En las corrientes alternas de alta frecuencia, la densidad de la corriente cerca del eje del conductor prácticamente será igual a cero, y toda la corriente fluirá por la superficie del mismo. Debido a ello, el campo magnético en el interior del conductor también se reduce a cero. Este fenómeno provoca un aumento de la resistencia del conductor, ya que por las partes internas del conductor no fluye corriente. Como estas partes internas resultan inútiles, para economizar metal los conductores de corrientes alternas de alta frecuencia se hacen huecos. Las corrientes de Foucault también conducen a una disminución del coeficiente de autoinducción del conductor. Esto se puede aclarar examinando el ejemplo del conductor cilíndrico, en el cual el coeficiente de autoinducción L, según la fórmula (2) del § 227, está relacionado con la energía magnética de la corriente mediante la ecuación:

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2. \qquad (1)$$

La energía del campo magnético W_m depende de la excitación magnética. Cuando tiene lugar el efecto pelicular, el campo magnético en el interior del conductor es igual a cero, y el campo fuera del mismo, a la intensidad dada de la corriente sigue siendo el mismo que en el caso en que la corriente tuviese una densidad constante por la sección del conductor; debido a ello la energía del campo disminuye, de donde, según la fórmula (1), disminuye el coeficiente de autoinducción L.

En los conductores macizos, como resultado del efecto pelicular se produce un desprendimiento irregular de calor: el calor se desprende principalmente junto a la superficie del conductor. Este efecto lo utilizó V. Vologdin para crear el método del temple superficial del acero.

§ 232. Corriente alterna. Al actuar sobre un circuito cerrado una f. e. m. variable se crea en él una corriente alterna. La intensidad de esta corriente puede ser distinta en diferentes secciones de un conductor no bifurcado. Esta disconformidad con la regla fundamental que satisface la corriente continua, es debida a la velocidad finita de propagación de los campos electromagnéticos. Sin embargo, esta disconformidad será despreciable, si la intensidad de la corriente y la distribución de las cargas varían poco en el tiempo t durante el cual las perturbaciones magnéticas recorren la distancia que separa las partes más distantes del sistema eléctrico que se examina. Las corrientes que se someten a esta condición, se denominan *cuasiestacionarias*. En los §§ 232—234 se examinarán solamente estas corrientes. Para las corrientes cuasiestacionarias, en cada momento dado se cumplen las leyes de Kirchhoff.

Hemos visto (en el § 224) que al girar un contorno por un campo magnético uniforme, el flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno, varía periódicamente debido a que en el contorno se induce una corriente que también varía periódicamente. Veamos con más detalle el carácter de este proceso.

Como se ha indicado en el § 224, al girar un cuadro en un campo magnético con una velocidad angular ω, el flujo de inducción magnética Φ que atraviesa la superficie limitada por el contorno del cuadro, varía con el tiempo t según la ley:

$$\Phi = \Phi_0 \cos \omega t, \tag{1}$$

donde Φ_0 es el valor máximo del flujo a través de la superficie del contorno. La fuerza electromotriz que se crea en el circuito, en este caso, es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_0 \operatorname{sen} \omega t = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t. \tag{2}$$

Esto será el caso más simple de f. e. m. variable que cambia con el tiempo según la ley sinusoidal. La magnitud $\mathcal{E}_0 = \omega\Phi_0$ se denomina *amplitud* de la f. e. m. y es su máximo valor.

Además de la f. e. m. exterior $\mathcal{E}$, en el circuito actuará la f. e. m. de autoinducción, ya que la intensidad de la corriente en el contorno varía. Sea L el coeficiente de autoinducción del circuito examinado. La fuerza electromotriz de autoinducción, como se sabe, es

$$\mathcal{E}_a = -L\frac{dI}{dt}. \tag{3}$$

La suma $\mathcal{E} + \mathcal{E}_a$ de las f. e. m. debe ser igual, según la ley de Kirchhof, al producto de la resistencia del circuito por la intensidad de la corriente I en el mismo:

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_a. \tag{4}$$

Sustituyendo $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_a$ por sus valores según la (2) y la (3), en la fórmula (4), obtenemos que

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t. \tag{5}$$

Esta ecuación diferencial determina la intensidad de la corriente I en el contorno de f. e. m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$ dada y de coeficiente de autoinducción L y resistencia R conocidos. Una solución particular de esta ecuación para la intensidad I de la corriente se halla suponiendo que la corriente es una función periódica del tiempo, cuyo período es igual al de la f. e. m., es decir, hallamos una solución de I en la forma:

$$I = I_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi). \tag{6}$$

donde I_0 y φ son constantes que debemos determinar. Colocando en la ecuación (5) este valor de I y diferenciando obtenemos que

$$RI_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) + LI_0\omega \cos (\omega t - \varphi) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{5a}$$

o

$$RI_0 (\operatorname{sen} \omega t \cos\varphi - \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi) +$$
$$+ LI_0\omega (\cos \omega t \cos\varphi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi) - \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t = 0.$$

Para que esta ecuación se cumpla en cualquier instante de tiempo, es necesario que los coeficientes de $\operatorname{sen} \omega t$ y de $\cos \omega t$ sean iguales a cero en distintas circunstancias; esta condición nos da las dos ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} LI_0\omega \cos\varphi - RI_0 \operatorname{sen} \varphi = 0, \\ LI_0\omega \operatorname{sen} \varphi + RI_0 \cos\varphi - \mathcal{E}_0 = 0; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

escribamos la última de estas ecuaciones de la siguiente manera:

$$LI_0\omega \operatorname{sen} \varphi + RI_0 \cos\varphi = \mathcal{E}_0. \tag{8}$$

www.elsolucionario.org

Dividiendo la primera ecuación del sistema (7) por $RI_0 \cos\varphi$ nos da que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}. \tag{9}$$

Elevando al cuadrado la primera de las ecuaciones del sistema (7) y la ecuación (8), y sumándolas, hallamos que

$$I_0^2 (L^2\omega^2 + R^2) = \mathcal{E}_0^2,$$

de donde

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}. \tag{10}$$

Las ecuaciones (9) y (10) determinan las constantes desconocidas I_0 y φ. Basándonos en la (6) y utilizando estos valores hallados de I_0 y φ, obtenemos la ecuación de la intensidad de la corriente I en el circuito examinado:

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{L\omega}{R}\right). \tag{11}$$

Comparando esta fórmula con la de la f. e. m. de inducción (2), vemos que tanto la corriente I como la f. e. m. $\mathcal{E}$ son sinusoides,

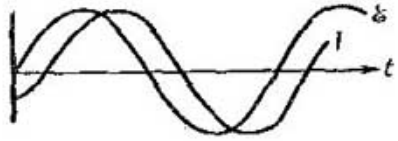


Fig. 304. Curvas de la variación con el tiempo de la f. e. m. $\mathcal{E}$ y de la intensidad de la corriente I en el caso de una corriente alterna en un circuito con autoinducción.

pero con un ángulo φ de desfase. La corriente y la f. e. m. no alcanzan al mismo tiempo los valores máximos y mínimos ni el valor cero. En la fig. 304 se representa gráficamente la variación en función del tiempo de la f. e. m. $\mathcal{E}$ y de la intensidad I de la corriente para un caso particular de desfase igual a φ. La ecuación (9) indica que el desfase entre la f. e. m. y la intensidad de la corriente, a la frecuencia ω dada, viene determinado por la relación L/R. Cuanto mayor sea la relación L/R, mayor será el valor de tg ω, es decir, mayor será el desfase φ. φ adquiere el máximo valor cuando la resistencia del circuito se pueda considerar igual a cero, siendo $L \neq 0$, en cuyo caso tg $\varphi = \infty$, de donde,

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

es decir, la intensidad de la corriente se retrasa con respecto a la f. e. m. en una cuarta parte de período.

La fórmula (10), que determina la dependencia de la amplitud de la intensidad de la corriente I_0 respecto a la amplitud de la f. e. m. $\mathcal{E}_0$, recuerda la ley de Ohm, en que la función de la resistencia la desempeña la magnitud:

$$z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\,. \tag{12}$$

denominada *resistencia aparente o impedancia*. La magnitud $L\omega$ se denomina *resistencia inductiva*. Llamando R_ω a la resistencia inductiva, tenemos que

$$R_\omega = L\omega. \tag{13}$$

La amplitud de la intensidad de la corriente, como se ve, depende de la resistencia aparente z, la cual, siendo constante la resistencia óhmica R, será mayor, cuanto mayor sean el coeficiente de autoinducción L y la frecuencia ω.

Para apreciar la función de la resistencia inductiva determinemos la intensidad de la corriente que fluye por un solenoide, cuyo coeficiente de autoinducción hemos determinado en el § 225. Sea $R=20\ \Omega$ la resistencia óhmica de este solenoide; su coeficiente de autoinducción, como se ha determinado, es $L=0{,}023$ H. Calculemos la amplitud de la intensidad I_0 de la corriente que fluye por este solenoide siendo $V_1 - V_2 = 100$ V la amplitud de la diferencia de potencial de los extremos del solenoide y el número de períodos por segundo de: a) 50, b) 250, c) 500. Según la fórmula (10), la amplitud de la intensidad de la corriente es

$$I_0 = \frac{V_1 - V_2}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}\,.$$

La frecuencia angular ω para los tres casos indicados será

a) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 50 = 314\ \text{seg}^{-1}$,
b) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 250 = 1570\ \text{seg}^{-1}$,
c) $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 500 = 3140\ \text{seg}^{-1}$.

Las amplitudes de la intensidad de las corrientes serán:

a) $I_0 = \dfrac{100}{\sqrt{(0{,}023 \cdot 314)^2 + 20^2}} \cong 4{,}8$ A,

b) $I_0 = \dfrac{100}{\sqrt{(0{,}023 \cdot 1570)^2 + 20^2}} \cong 2{,}4$ A,

c) $I_0 = \dfrac{100}{\sqrt{(0{,}023 \cdot 3140)^2 + 20^2}} \cong 1{,}3$ A.

La corriente continua que fluyese por el mismo solenoide siendo la diferencia de potencial de sus extremos igual a 100 V, sería

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = 5\text{A}.$$

Comparando los resultados obtenidos se aprecia la función que desempeña la frecuencia de la corriente: a 50 ciclos por segundo, la importancia de la resistencia inductiva no es muy grande en nuestro caso; pero a 500 ciclos por segundo la intensidad de la corriente es casi cuatro veces más débil que la de la corriente continua.

La fórmula (5a) se puede utilizar para caracterizar gráficamente las magnitudes que determinan la corriente alterna. Para ello la escribiremos de la siguiente manera:

$$RI_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + LI_0\omega \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad (5b)$$

El miembro de la izquierda es la suma de dos oscilaciones armónicas de un mismo período con una diferencia de fases igual a $\pi/2$. Las amplitudes de estas oscilaciones son RI_0 y $LI_0\omega$. Para obtener el valor resultante se pueden sumar gráficamente las amplitudes

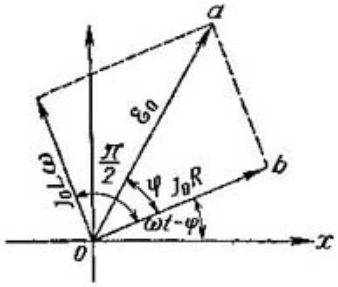


Fig. 305. Diagrama vectorial de un circuito de corriente alterna con autoinducción.

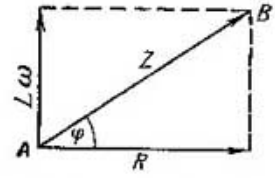


Fig. 306. Determinación gráfica de la resistencia aparente z de un circuito de corriente alterna con autoinducción conocidas la resistencia óhmica R y la inductiva $L\omega$.

como se ha indicado en el § 97 del t. I. Para ello (fig. 305) se traza el vector de la amplitud RI_0 formando el ángulo $\omega t - \varphi$ con el eje OX, y el vector de la amplitud $LI_0\omega$, formando el ángulo $\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}$ con el mismo eje. La suma geométrica de estas amplitudes nos dará, según la (5b), el vector de amplitud de la f. e. m. $\mathcal{E}_0$. En la figura se ve que el ángulo entre la amplitud RI_0 y la amplitud $\mathcal{E}_0$ es igual a φ, ya que

$$\frac{LI_0\omega}{RI_0} = \frac{L\omega}{R} = \operatorname{tg}\varphi.$$

La proyección del vector de la amplitud $\mathcal{E}_0$ sobre el eje OX expresará, en cada instante dado de tiempo, el valor de la f. e. m. La proyección de los vectores RI_0 y $L\omega I_0$ sobre el mismo eje expresarán respectivamente la caída de potencial en el circuito debido a

www.elsolucionario.org

la resistencia óhmica R y al fenómeno de autoinducción. Del triángulo Oab se deduce que la tangente del ángulo φ no depende del valor de I_0; por eso, para hallar gráficamente el desfase y la resistencia aparente conociendo las resistencias óhmica e inductiva, se puede construir un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean R y $L\omega$; la hipotenusa AB de este triángulo (fig. 306) será igual a la resistencia aparente $z=\sqrt{R^2+L^2\omega^2}$, y el ángulo φ, a la diferencia de fases entre la intensidad de la corriente y la f. e. m.

Hasta ahora hemos utilizado solamente una solución particular de la ecuación (5). La solución general de la ecuación (5) se obtiene, si a la solución particular (11) añadimos la solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$RI+L\frac{dI}{dt}=0.$$

La solucion de esta ecuacion tiene la forma:

$$I=Ae^{-\frac{R}{L}t},$$

donde A es una constante que se determina de las condiciones iniciales. Esta solución nos da la parte de la corriente que disminuye con el tiempo y generalmente se reduce muy pronto a cero. Así, pues, sólo es de interés la expresión de la corriente estacionaria, que representa la ecuación (11).

§ 233. Potencia en el circuito de corriente alterna. Examinemos la potencia que se desarrolla en el circuito de corriente alterna. El valor instantáneo de la potencia se obtiene, si se toma el producto del valor instantáneo de la intensidad de la corriente por el valor instantáneo de la f. e. m.:

$$M=I\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\operatorname{sen}\omega t\cdot I_0\operatorname{sen}(\omega t-\varphi). \qquad (1)$$

Este valor instantáneo de la potencia varía con el tiempo y, en particular, será igual a cero cuando sean iguales a cero bien I, bien $\mathcal{E}$. Por eso a nosotros no nos interesa el valor instantáneo de la potencia, sino su valor medio durante el período. Para calcular este valor medio, se transforma la ecuación (1) para W de la siguiente manera:

$$W=\mathcal{E}_0I_0\operatorname{sen}\omega t\cdot\operatorname{sen}(\omega t-\varphi)=\frac{\mathcal{E}_0I_0}{2}[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)].$$

De esta manera, el valor medio $\overline{W}$ por período es la suma de los valores medios de los términos

$$\frac{\mathcal{E}_0I_0}{2}\cos\varphi \quad \text{y} \quad -\frac{\mathcal{E}_0I_0}{2}\cos(2\omega t-\varphi).$$

El primer término no depende del tiempo, por consiguiente, expresa su propio valor medio; el segundo término varía con el tiempo por variar el factor cos $(2\omega t - \varphi)$. El valor medio de cos $(2\omega t - \varphi)$ por período, evidentemente será igual a cero, ya que en un período el factor cos $(2\omega t - \varphi)$ adquiere la misma cantidad e iguales valores positivos que negativos. Por lo tanto, el valor medio de la potencia desarrollada en un circuito durante un período será

$$\overline{W} = \frac{\mathscr{E}_0 I_0}{2} \cos \varphi. \qquad (2)$$

Introduzcamos las notaciones:

$$\mathscr{E}_{ef} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Las magnitudes $\mathscr{E}_{ef}$ e I_{ef} son *los valores eficaces de la f. e. m. y de la intensidad de la corriente*. Colocándolos en la (2), obtenemos para el valor medio de la potencia durante un período:

$$\overline{W} = \mathscr{E}_{ef} I_{ef} \cdot \cos \varphi \qquad (2a)$$

Si la diferencia de fases entre la corriente y la f. e. m. es igual a cero, la potencia media será el producto del valor eficaz de la intensidad de la corriente por el valor eficaz de la f. e. m. De esta manera tenemos que los valores eficaces de la intensidad de la corriente y de la f. e. m. desempeñan la misma función que la intensidad de la corriente y la f. e. m. en el caso de la corriente continua.

El valor medio de la potencia depende de la diferencia de fases (desfase). El valor máximo se alcanzará cuando la diferencia de fases sea igual a cero, lo cual ocurrirá cuando en el circuito no haya autoinducción. Si la diferencia de fases es igual a $\pi/2$, el valor medio de la potencia será igual a cero. Esto es debido a que la energía suministrada por el generador en un cuarto de período, vuelve al generador en el siguiente cuarto de período a causa de la energía electromagnética de autoinducción. Este caso solamente tiene lugar cuando es igual a cero la resistencia óhmica del circuito, lo cual nunca se cumple en la práctica.

La potencia desarrollada por una corriente se desprende en forma de calor. Por eso, la cantidad total de calor desprendido en todo el circuito durante el tiempo t, será

$$Q = \mathscr{E}_{ef} \cdot I_{ef} \cos \varphi \cdot t. \qquad (4)$$

Como, según la fórmula (3), los valores eficaces de la intensidad de la corriente I_{ef} y de la f. e. m. $\mathscr{E}_{ef}$ se diferencian de los correspondientes valores máximos I_0 y $\mathscr{E}_0$ solamente en un factor constante:

$$I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \cong 0{,}707 I_0, \quad \mathscr{E}_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathscr{E}_0 \cong 0{,}707 \mathscr{E}_0.$$

entre I_{ef} y $\mathcal{E}_{ef}$ habrá la misma relación que entre I_0 y $\mathcal{E}_0$ véase la fórmula (10) de la pág. 485, de donde

$$I_{ef} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}.$$

Utilizando esta relación, escribamos la expresión (4) para el calor desprendido en el circuito, de la siguiente manera:

$$Q = I_{ef}^2 \sqrt{L^2\omega^2 + R^2} \cdot \cos\varphi \cdot t,$$

o

$$Q = I_{ef}^2 \cdot R \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2} \cos\varphi \cdot t. \qquad (4a)$$

La diferencia de fases se determina [según la fórmula (9) de la pág. 485] por la ecuación:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R},$$

de donde

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}}.$$

Colocando este valor del $\cos\varphi$ en la (4a) hallamos que

$$Q = I_{ef}^2 Rt, \qquad (5)$$

de donde se deduce que *la cantidad de calor desprendido en un circuito de corriente alterna de resistencia óhmica R dada viene expresada por la fórmula ordinaria de Lenz-Joule* (véase el § 157), si sobrentender por intensidad de la corriente el valor eficaz de la misma.

Así, pues, la cantidad de calor desprendido viene determinada solamente por el valor eficaz de la intensidad de la corriente I_{ef} y de la resistencia óhmica R. *La resistencia inductiva* $L\omega$ *no desempeña directamente ningún papel en el proceso de desprendimiento de calor.* Si la resistencia óhmica R del circuito es muy pequeña, será pequeña también la cantidad de calor desprendido en el mismo; la resistencia aparente $z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ de este circuito puede ser grande, solamente si lo es la autoinducción y es considerable la frecuencia ω de la corriente alterna que fluye por el circuito.

Para medir la intensidad de la corriente alterna se puede utilizar amperímetros térmicos (§ 158). El amperímetro térmico que está graduado para medir corrientes continuas, al medir corrientes alternas indica el valor eficaz de la intensidad de la corriente. El valor máximo de la intensidad de la corriente se determina por la relación (3), según la cual $I_0 = I_{ef} \cdot \sqrt{2} \cong 1{,}41 I_{ef}$.

En el § 237 se hablará de otros métodos de medición de las corrientes alternas.

www.elsolucionario.org

§ 234. Circuito de corriente alterna con autoinducción y capacidad. El circuito de corriente alterna, a diferencia del de corriente continua, permite que se conecten en serie condensadores.

Si las armaduras de un condensador se conectan a un generador de corriente continua, por el circuito fluirá corriente sólo hasta que en las armaduras del condensador no se cree una diferencia de potencial que compense la f. e. m. del generador. Pero si las armaduras de un condensador se conectan a un generador de f. e. m. alterna, se descargarán y volverán a cargarse continuamente y en el circuito fluirá todo el tiempo corriente alterna.

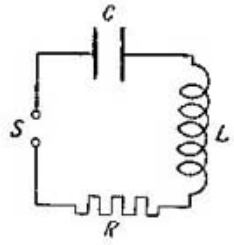


Fig. 307. Circuito con resistencia óhmica R, autoinducción L y capacidad C.

Supongamos que a los terminales S (fig. 307) se aplica una f. e. m. alterna $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$. El circuito consta de capacidad C, autoinducción L y resistencia óhmica R *conectadas en serie* (la resistencia óhmica de los demás conductores se desprecia). En la parte del circuito que posee la autoinducción L se crea una f. e. m. de autoinducción $\mathcal{E}_a=-L\frac{dI}{dt}$, donde I es la intensidad de la corriente en el circuito. La f. e. m. total que actúa sobre el circuito, será igual a $\mathcal{E}-L\frac{dI}{dt}$. En cada instante dado debe ser igual a la suma de las caídas de potencial a lo largo del circuito. Estas caídas de potencial se componen de la diferencia de potencial de las armaduras del condensador $V=V_1-V_2$ y de la caída de potencial IR a lo largo de la parte del circuito con resistencia óhmica R. Así tenemos que

$$IR+V=\mathcal{E}-L\frac{dI}{dt},$$

de donde, sustituyendo $\mathcal{E}$ por su valor $\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$, hallamos que

$$L\frac{dI}{dt}+IR+V=\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t. \qquad (1)$$

La diferencia de potencial V de las armaduras del condensador está relacionada con la carga Q concentrada en la armadura del condensador mediante la ecuación:

$$Q=VC, \qquad (2)$$

donde C es la capacidad del condensador. En el intervalo de tiempo dt, la carga Q aumenta en la magnitud $dQ=Idt$, de donde, basán-

donos en la (2), tenemos que

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt},$$

o

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}I. \tag{3}$$

Diferenciando con respecto al tiempo la ecuación (1), tenemos que

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{dV}{dt} = \mathscr{E}_0\omega\cos\omega t.$$

Colocando en esta ecuación el valor de dV/dt según la (3), hallamos la ecuación diferencial que debe satisfacer la intensidad de la corriente en un circuito con capacidad, autoinducción y resistencia conectadas en serie:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \mathscr{E}_0\omega\cos\omega t. \tag{4}$$

La solución de esta ecuación será una función periódica del tiempo de período igual al de la f. e. m.:

$$I = I_0\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \varphi), \tag{5}$$

donde I_0 y φ son constantes que tenemos que determinar. La primera y la segunda derivadas de I respecto al tiempo serán:

$$\frac{dI}{dt} = I_0\omega\cos(\omega t - \varphi), \qquad \frac{d^2I}{dt^2} = -I_0\omega^2\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \varphi).$$

Colocando estos valores de dI/dt, d^2I/dt^2 e I en la ecuación (4) y reduciendo en ω, hallamos que

$$RI_0\cos(\omega t - \varphi) - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I_0\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \varphi) = \mathscr{E}_0\cos\omega t. \tag{4a}$$

Sustituyendo las funciones de cos $(\omega t - \varphi)$ y sen $(\omega t - \varphi)$ por las respectivas funciones de los senos y cosenos de ωt y φ, hallamos que

$$RI_0\cos\omega t\cos\varphi + RI_0\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I_0\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\varphi + \\ + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)I_0\cos\omega t\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathscr{E}_0\cos\omega t = 0. \tag{5a}$$

Como esta ecuación debe satisfacerse para cualquier instante de tiempo, los factores que acompañan a sen ωt y a cos ωt deben ser iguales a cero, de donde obtenemos dos ecuaciones:

$$R\,\mathrm{sen}\,\varphi - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi = 0, \tag{6}$$

$$R\cos\varphi + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{\mathscr{E}_0}{I_0}. \tag{7}$$

De la ecuación (6) obtenemos que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \tag{8}$$

Elevando al cuadrado los términos de las ecuaciones (6) y (7) y sumando, hallamos que

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{I_0^2},$$

de donde

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}. \tag{9}$$

Las ecuaciones (5), (8) y (9) nos dan la solución buscada: en el circuito fluye una corriente I del mismo período que el de la f. e. m. aplicada; la amplitud de esta corriente I_0 se determina por la ecuación (9). La corriente I está desfasada respecto a la f. e. m. $\mathcal{E}$ en un ángulo φ determinado por la ecuación (8).

La magnitud $z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ es la resistencia aparente (impedancia) y depende de los valores de R, L, C y de la frecuencia ω de la corriente. Si ω satisface la ecuación:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \tag{10}$$

la resistencia aparente alcanza el valor mínimo, y a esta frecuencia la amplitud de la intensidad de la corriente alcanza el valor máximo:

$$I_{0\,\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Todo el fenómeno del paso de una corriente alterna por un circuito con capacidad y autoinducción recuerda el fenómeno de la resonancia mecánica: la amplitud de la intensidad de la corriente depende de la frecuencia ω y alcanza el máximo a determinado valor de ω_{res} denominada *frecuencia de resonancia*, cuyo valor, según la (10), es

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{10a}$$

El máximo de la curva de resonancia será tanto más agudo, cuanto menor sea la resistencia óhmica R.

En la resonancia, según la fórmula (8), la diferencia de fases será $\varphi = 0$.

www.elsolucionario.org

Cuando $\omega \to 0$, la diferencia de fases $\varphi \to -\pi/2$, es decir, la intensidad de la corriente adelanta a la f. e. m.; cuando $\omega \to \infty$, la diferencia de fase $\varphi \to +\pi/2$; en este caso la intensidad de la corriente se retarda respecto a la f. e. m. En la fig. 308, la curva *1* representa la variación de la intensidad de la corriente en función de la frecuencia a una f. e. m. dada siendo constantes L y C; la curva *2* representa la dependencia de φ respecto a la frecuencia.

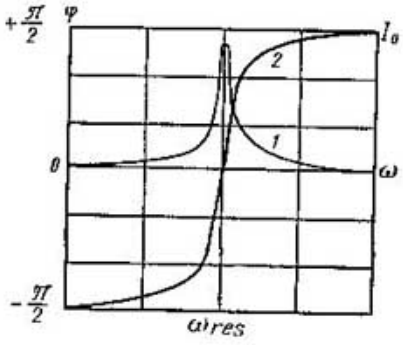


Fig. 308. Dependencia de la intensidad de la corriente (*1*) y diferencia de fase (*2*) respecto de la frecuencia.

Si el condensador se sustituye por un conductor, en el circuito no se origina una diferencia de potencial complementaria $V = \frac{Q}{C}$. Por consiguiente, la sustitución del condensador por un conductor corresponde al caso en que $C = \infty$, y entonces las fórmulas (8) y (9) se transforman en las fórmulas (9) y (10) del § 232, que se refieren a un circuito con autoinducción y resistencia, pero sin condensador.

Al variar ω, junto con la intensidad de la corriente varía también la caída de potencial en cada sector del circuito de corriente alterna. En el circuito representado en la fig. 307, la resistencia óhmica R, la autoinducción L y la capacidad C están conectadas en serie. Llamando V_R, V_L y V_C a las diferencias de potencial de los extremos de cada uno de estos sectores del circuito, tenemos que la caída total de potencial en el circuito, que coincide con la f. e. m., que actúa en el circuito, se puede representar de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t = V_R + V_L + V_C.$$

Según lo dicho en la pág. 492

$$\left.\begin{aligned} V_R &= IR = RI_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi), \\ V_L &= L\frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \cos (\omega t - \varphi), \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

o

$$V_L = L\omega I_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi + \pi/2). \qquad (12)$$

Para determinar la diferencia de potencial de las armaduras del condensador, veamos el caso cuando el circuito carece de resistencia óhmica y de autoinducción ($R = 0$ y $L = 0$), entonces la fór-

mula (9) nos da que

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{1/C\omega}.$$

De esta ecuación se deduce que el condensador es equivalente a una resistencia óhmica de valor $1/C\omega$. En este caso, según la (8), tenemos que $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, y, por consiguiente, $\varphi = -\pi/2$, es decir, la intensidad de la corriente *adelanta* a la f. e. m. en $\pi/2$. De aquí se obtiene que el valor de la amplitud de la diferencia de potencial de las armaduras del condensador es igual a $\frac{1}{C\omega} I_0$; el valor de la diferencia de potencial en cada momento dado *va retardado* del de la intensidad de la corriente en $\pi/2$. De esta manera, para V_C podemos escribir la ecuación:

$$V_C = \frac{1}{C\omega} I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi - \pi/2)$$

o

$$V_C = -\frac{1}{C\omega} I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi + \pi/2). \qquad (13)$$

Sumando las ecuaciones (11), (12) y (13) obtenemos que

$$\mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\omega t = RI_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi + \pi/2). \qquad (14)$$

En la resonancia, cuando la amplitud de la intensidad de la corriente alcanza el máximo valor,

$$\omega = \omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \varphi = 0.$$

En estas condiciones, la fórmula (14) nos da que

$$\mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\omega t = RI_{0\,máx} \cdot \operatorname{sen}\omega t,$$

es decir, la caída total de potencial del circuito coincide con la caída del mismo en la resistencia óhmica R. Al mismo tiempo la amplitud de cada una de las caídas de potencial V_L y V_C alcanza el *valor máximo*:

$$\mathcal{E}_{0L} = L\omega_{res} \cdot I_{0\,máx} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

y

$$\mathcal{E}_{0C} = \frac{1}{C\omega_{res}} \cdot I_{0\,máx} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Pero como ambas caídas de potencial varían según fases opuestas, su suma será igual a cero.

El fenómeno examinado se denomina *resonancia de tensión*.

Para determinar la función de un condensador en un circuito de corriente alterna calculemos a cuántos ohmios equivale la resistencia de un condensador de 1 μF al fluir por él una corriente alterna de 50 períodos por segundo.

De lo dicho anteriormente se deduce que al fluir por el condensador de capacidad C una corriente alterna de frecuencia angular ω, el condensador equivale a una resistencia $R=\frac{1}{C\omega}$. Considerando en el caso dado la capacidad en faradios y determinando la frecuencia angular $\omega=2\pi\nu=314$ seg^{-1}, obtenemos que

$$R=\frac{1}{C\omega}=\frac{1}{314\cdot 10^{-6}}\ \Omega=3\,200\ \Omega.$$

Si la frecuencia de la corriente alterna es mayor, este mismo condensador equivaldrá a una resistencia óhmica menor.

Los fenómenos en los circuitos de corriente alterna con capacidad y autoinducción se pueden representar también con ayuda

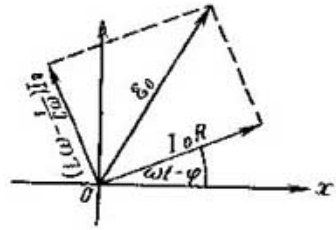


Fig. 309. Diagrama vectorial de un circuito de corriente alterna con autoinducción y capacidad.

de diagramas vectoriales, como se ha hecho en el § 232 para el circuito con autoinducción. Para ello escribimos la ecuación (4a) de la manera siguiente:

$$RI_0\operatorname{sen}\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-I_0\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\operatorname{sen}(\omega t-\varphi)=$$
$$=\mathcal{E}_0\operatorname{sen}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right).$$

Como lo esencial es solamente la diferencia de fases y no las fases iniciales, esta ecuación se puede sustituir por la:

$$RI_0\operatorname{sen}(\omega t-\varphi)+I_0\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=\mathcal{E}_0\operatorname{sen}\omega t. \quad (15)$$

Los dos términos de la izquierda de esta igualdad se pueden representar como dos vectores de amplitud perpendiculares mutuamente RI_0 e $I_0\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$, que forman con el eje OX los correspondientes ángulos $\omega t-\varphi$ y $\omega t-\varphi+\pi/2$ (fig. 309). La amplitud resultante

www.elsolucionario.org

vendrá representada por el vector $\mathcal{E}_0$, cuya longitud la determina la igualdad:

$$\mathcal{E}_0^2 = R^2 I_0^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_0^2,$$

de donde se deduce la fórmula (9). Como se ve fácilmente, el vector $\mathcal{E}_0$ forma el ángulo φ con el vector $I_0 R$.

La solución de la ecuación (4) se puede obtener más fácilmente, si se utiliza el método, indicado en el § 105 del t I, de representar los procesos armónicos mediante números complejos. Sustituyendo en la ecuación (4) el cos ωt por una función exponencial con exponente complejo, tenemos que

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{DI}{dt} + \frac{1}{C}I = \mathcal{E}_0\omega e^{i\omega t}. \tag{16}$$

Una solución particular de esta ecuación es

$$I = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)}, \tag{17}$$

donde I_0 y α son números reales que hay que determinar. Diferenciando la (17) obtenemos que

$$\frac{dI}{dt} = iI_0\omega e^{i(\omega t+\alpha)}, \quad \frac{d^2I}{dt^2} = -I_0\omega^2 e^{i(\omega t+\alpha)}.$$

Colocando estos valores de dI/dt y d^2I/dt^2 en la (16); hallamos que

$$-LI_0\omega^2 e^{i(\omega t+\alpha)} + iRI_0\omega e^{i(\omega t+\alpha)} + \frac{1}{C}I_0 e^{i(\omega t+\alpha)} = \mathcal{E}_0\omega e^{i\omega t}. \tag{18}$$

Dividiendo los términos de la derecha y de la izquierda de esta ecuación por $I_0\omega e^{i(\omega t+\alpha)}$, obtenemos que

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} + iR = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} e^{-i\alpha}.$$

Sustituyendo $e^{-i\alpha}$ por $\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha$, hallamos que

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} + iR = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0}\cos\alpha - i\frac{\mathcal{E}_0}{I_0}\,\mathrm{sen}\,\alpha. \tag{19}$$

Como se sabe, dos números complejos serán iguales mutuamente, si son iguales sus partes reales e imaginarias, por eso, de la (19) se deduce que

$$-L\omega + \frac{1}{C\omega} = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0}\cos\alpha, \quad R = -\frac{\mathcal{E}_0}{I_0}\,\mathrm{sen}\,\alpha. \tag{20}$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones por la primera obtenemos que

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R}{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}. \tag{21}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones de la (20) y sumando, hallamos que

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} \tag{22}$$

Las expresiones (17), (21) y (22) son la solución buscada. Es fácil ver que esta solución coincide con la solución de la ecuación (4) hallada en el texto fundamental de este párrafo. Efectivamente, la parte real de la expresión (17) nos da que

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{o} \quad I = I_0 \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Haciendo

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = -\varphi,$$

obtenemos que

$$I = I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \varphi),$$

que, en correspondencia con la fórmula (5), nos da la corriente que varía según una sinusoide con una frecuencia angular ω y amplitud I_0, determinada por la fórmula (22), que coincide con la (9). Queda por demostrar que para la diferencia de fases φ también obtenemos por ambos métodos el mismo valor. Efectivamente, según la (21):

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R},$$

lo cual coincide con la (8).

Para la representación gráfica de los procesos que tienen lugar en un circuito de corriente alterna no hay necesidad de pasar de las magnitudes complejas a las reales. Para ello es suficiente convenir en que la magnitud compleja $ae^{\alpha i}$ es igual a un vector de longitud a que forme un ángulo α con el eje dado. Observemos en este caso que el producto por la unidad imaginaria i corresponderá a un giro de noventa grados del vector. Efectivamente: $iae^{i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} ae^{i\alpha} = ae^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})}$. De esto se deduce que el multiplicar por $i^2 = -1$ corresponde a un giro de 180°. Teniendo en cuenta esta observación escribimos la ecuación (18) de la siguiente manera:

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 e^{i(\omega t + \alpha + \pi)} + RI_0 e^{i(\omega t + \alpha + \pi/2)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t},$$

o, sustituyendo α por $-\varphi - \dfrac{\pi}{2}$:

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 e^{i\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} + RI_0 e^{i(\omega t - \varphi)} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Esta expresión relaciona entre sí a los tres vectores, cuyas longitudes y direcciones corresponden a la fig. 309.

§ 235. Dínamos y electromotores. Las dínamos (o generadores de corriente) son máquinas para obtener corrientes utilizando el fenómeno de inducción electromagnética. La dínamo más simple de corriente alterna es un cuadro de una espira de conductor que gira en el campo de un imán permanente. La creación de la corriente alterna en un cuadro de éstos se ha examinado en el § 224. En la fig. 310 se indica cómo se puede obtener la corriente del cuadro que gira utilizando dos anillos y las escobillas a y b, y enviarla al circuito exterior R. En la práctica, claro está, no se utiliza un cuadro, sino un gran número de espiras del conductor arrolladas sobre un tambor (rotor). En la técnica también se utilizan máquinas

con bobinas inmóviles y electroimanes en lugar de imanes permanentes. El esquema de una máquina de éstas se representa en la fig. 311. Las bobinas en que se induce la corriente, están arrolladas en las piezas polares A_1, A_2, A_3... del núcleo de hierro. La corriente que fluye por las bobinas C_1, C_2, C_3,..., procedente de un pequeño generador B de corriente independiente, magnetiza el núcleo. La parte móvil de la máquina (rotor) tiene la forma de un anillo con dientes D_1, D_2, D_3, ... Al girar el rotor, los dientes se desplazan respecto a las piezas polares A_1, A_2, A_3, ... y de esta manera cierran, unas veces más, otras menos, el circuito magnético entre las piezas polares vecinas. Debido a ello varía el flujo de inducción magnética a través de las bobinas arrolladas en las piezas polares A_1, A_2, A_3, ..., y en ellas se induce corriente.

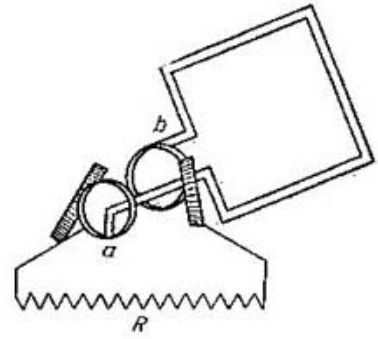


Fig. 310. Transmisión al circuito exterior, de la corriente del cuadro que gira, mediante los anillos *a* y *b*.

Además de los generadores de corriente alterna indicados, se pueden construir *generadores de corriente continua*. Si los extremos del cuadro que gira, se conectan con dos semianillos (colectores) aislados uno de otro (fig. 312), las escobillas *a* y *b* harán contacto alternativamente con uno y con otro semianillo, y en el circuito externo fluirá una corriente de un mismo sentido que sólo variará su intensidad. En la fig. 313,*a* se representa gráficamente la dependencia de la intensidad de esta corriente *I* respecto al tiempo. Utilizando en vez de un cuadro, un sistema de bobinas, cuyos terminales se conecten a las secciones independientes de un colector complejo, se puede obtener una corriente continua, cuya intensidad sólo variará ligeramente (pulsará) con el tiempo (fig. 313,*b*). El campo magnético de todas las dinamos de corriente continua y de dimensiones más o menos grandes lo crea un electroimán; en este caso se utiliza generalmente el *principio de la*

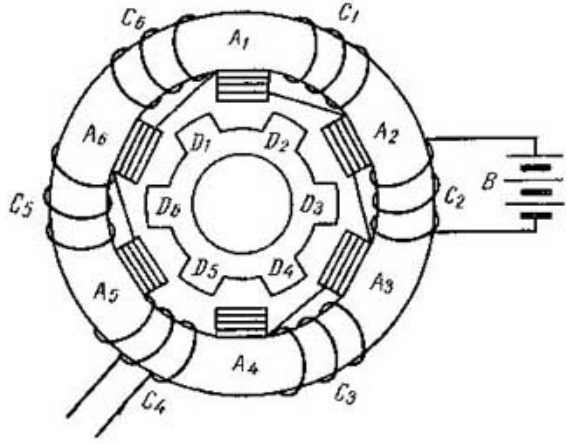


Fig. 311. Esquema de un generador de corriente alterna con bobinas inmóviles.

www.elsolucionario.org

autoexcitación, que consiste en que el electroimán se alimenta de la corriente creada por la propia máquina. Hay dos maneras fundamentales de suministrar corriente al electroimán: 1) en serie (motor en serie o motor serie) y 2) en derivación (motor en derivación o motor derivación).

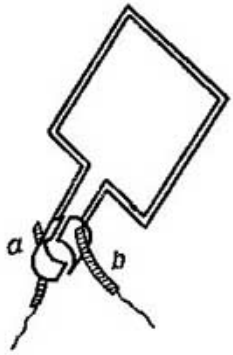


Fig. 312. Esquema del colector de un generador de corriente continua.

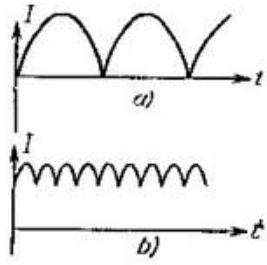
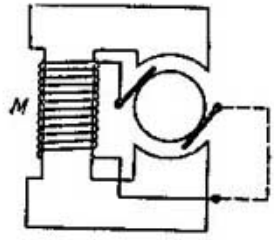


Fig. 313. Dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo: a) de un generador con colector de dos semianillos, b) de un generador con un colector complejo.

En los motores con excitación en serie el arrollamiento está conectado en serie con el circuito exterior (fig. 314). Esta máquina empieza a funcionar a costa de la magnetización remanente del núcleo del electroimán y, después, la corriente excitada en él pasa enteramente a través del arrollamiento del electroimán *M* intensificando el campo magnético en que gira el rotor. Al desconectar el circuito exterior, la



Fg. 314. Esquema de un generador con excitación en serie.

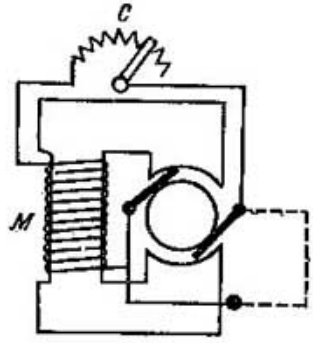


Fig. 315. Esquema de un generador con excitación en derivación.

f. e. m. de esta máquina disminuye hasta adquirir valores pequeños debido a la magnetización remanente.

En los motores con excitación en derivación, el arrollamiento del electroimán se conecta en derivación con el circuito exterior (fig. 315). La intensidad de la corriente del arrollamiento se puede regular con un reóstato *C*. Los motores en

derivación son los más difundidos. Se utilizan, además, motores (generadores) compound o de excitación compuesta, que tienen dos arrollamientos: uno se conecta en serie con el circuito exterior y el otro, en derivación.

Cualquier dínamo de corriente continua se puede transformar en electromotor: para ello se hace fluir por el rotor a través de las escobillas una corriente de un generador cualquiera (exterior). En este caso, bajo la influencia de las fuerzas de acción mutua de las corrientes que fluyen por los arrollamientos del rotor, y del campo magnético, el rotor gira.

B. Jacobi fue el primero en aplicar en la práctica el electromotor como fuerza de tracción de las barcas del río Nevá.

Al girar el rotor del electromotor, en su arrollamiento se induce una corriente de sentido contrario al de la corriente que origina el movimiento. Por eso, la intensidad de la corriente que fluye a través del arrollamiento del rotor procedente de un generador exterior, disminuirá. Si la f. e. m. exterior es suficiente para mantener, cuando el electromotor gira, una corriente de intensidad necesaria, en el momento inicial, al poner en marcha el electromotor, la corriente puede resultar excesivamente intensa y quemar el arrollamiento del rotor. Para evitarlo se conecta un reóstato en derivación con el motor, denominado *reóstato de arranque*. A medida que aumentan las revoluciones del motor se va reduciendo la resistencia del reóstato.

Las dínamos y los electromotores modernos son máquinas de alto rendimiento, que en las grandes alcanza el 95%. Las pérdidas inevitables en el rozamiento, en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule, en las corrientes de Foucault y en la histéresis se han podido reducir hasta dejarlas en un 5%.

§ 236. Transformadores. Para muchos fines técnicos se necesitan f. e. m. mayores que las que dan las dínamos. Sobre todo es importante en la técnica poseer f. e. m. elevadas al transmitir energía eléctrica por conductores de un lugar a otro (a veces el consumidor está a centenares de kilómetros de la central eléctrica). El caso es que la potencia total desarrollada en el circuito es igual al producto de la f. e. m. por la intensidad de la corriente, $\mathcal{E}I$, de donde se deduce que cuanto mayor sea la f. e. m. $\mathcal{E}$, menor será la intensidad de la corriente I, siendo la potencia la misma. Mientras tanto, la pérdida de energía en los conductores que la transmiten, debido al calor de Lenz-Joule, es $Q = RI^2$, es decir, es tanto mayor, cuanto mayor sea la intensidad de la corriente. Por eso, para disminuir las pérdidas perjudiciales, es conveniente poseer una gran f. e. m. y una pequeña intensidad de corriente.

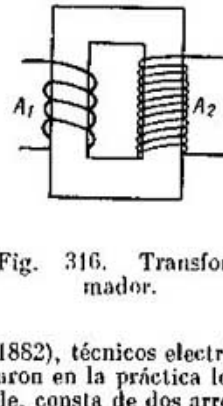


Fig. 316. Transformador.

En el caso de la corriente alterna, el aumento de la f. e. m. (o, como se dice en la técnica, de la "tensión") es fácil de realizar con ayuda de los transformadores elevadores. P. Yáblochkov (en 1876) e I. Usaguin (en 1882), técnicos electricistas rusos, fueron los primeros que construyeron y aplicaron en la práctica los transformadores. El transformador, en su forma más simple, consta de dos arrollamientos (fig. 316) sobre un núcleo común cerrado y de hierro. El arrollamiento primario A_1 consta de una pequeña cantidad de espiras de un conductor grueso, el secundario, A_2, de una cantidad elevada de espiras de un conductor más delgado. La corriente que pasa por el primario A_1, crea un flujo variable de inducción magnética Φ, que casi por entero se concentra en el interior del núcleo y, por consiguiente, por completo atraviesa las espiras del secundario.

Si el secundario "está abierto", el primario es una parte del circuito con cierta resistencia óhmica e inductiva. Si se considera la resistencia óhmica tan pequeña, que se pueda despreciar, la f. e. m. $\mathcal{E}_1$ que actúa sobre el primario, será igual

numéricamente y de signo contrario a la f. e. m. de autoinducción $\mathcal{E}_a$ que se crea en el mismo:

$$\mathcal{E}_1 = -\mathcal{E}_a.$$

En cada espira del primario surge una f.e.m. de autoinducción igual a $-\frac{d\Phi}{dt}$, de donde,

$$\mathcal{E}_a = -N_1 \frac{d\Phi}{dt},$$

donde N_1 es el número de espiras del primario. De aquí que para la f.e.m. $\mathcal{E}_1$ que actúa sobre el primario, sea

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Como este mismo flujo atraviesa el secundario, en cada una de sus espiras se crea una f.e.m. de inducción igual a $-\frac{d\Phi}{dt}$, y en total, en el secundario se crea una f.e.m. $\mathcal{E}_2$:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}, \qquad (2)$$

donde N_2 es el número de espiras del secundario. Comparando la (1) y la (2), vemos que la f.e.m. de inducción creada en el secundario es

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_1. \qquad (3)$$

Así tenemos que el transformador eleva la f. e. m. en una cantidad igual a la relación del número de espiras del secundario respecto al del primario. El signo menos indica que la f. e. m. del primario es de fase opuesta respecto a la del secundario.

Generalmente, los transformadores con el secundario abierto poseen un alto coeficiente de autoinducción del primario. Esto acarrea que la resistencia inductiva del primario sea grande. Gracias a ello, estando abierto el secundario, la corriente I_1 del primario es débil. Esta corriente se denomina *corriente en vacío*. Al cerrar el secundario, se induce en el mismo una corriente que crea su campo magnético, que compensa, según la regla de Lenz, el campo magnético del primario. Esto acarrea una disminución de la resistencia inductiva del primario y un aumento de la intensidad I_1 de la corriente. Así tenemos que la potencia consumida en el circuito primario depende de la potencia que se consume en el circuito secundario.

Cuando el circuito secundario está cargado, la ecuación (3) deja de ser exacta. Esta ecuación es justa mientras la corriente del circuito primario no se diferencie mucho de la corriente en vacío. La teoría general de los transformadores, sobre todo cuando se tiene en cuenta la función de la histéresis del núcleo, es muy compleja.

Las pérdidas en el transformador son las invertidas en el desprendimiento de calor de Lenz-Joule en los arrollamientos, en la dispersión de las líneas de inducción magnética, en las corrientes de Foucault en el núcleo y en el trabajo invertido en la histéresis del núcleo.

Para disminuir la importancia de estas dos últimas causas, los núcleos de los transformadores se hacen de las clases de hierro más dulces en forma de chapas independientes y separadas con capas aislantes. En los grandes transformadores modernos, las pérdidas se han logrado reducir hasta un 2% de la potencia total y, de esta manera, su rendimiento llega a ser de 98%.

www.elsolucionario.org

Considerando que para estos transformadores, las potencias desarrolladas en los circuitos primario y secundario prácticamente son iguales, obtenemos que

$$\mathcal{E}_1 I_1 = \mathcal{E}_2 I_2,$$

de donde basándonos en la (3), tenemos que

$$I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1; \qquad (4)$$

Por lo tanto, las intensidades de las corrientes de los circuitos primario y secundario son inversamente proporcionales al número de espiras de los arrollamientos primario y secundario.

Cualquier transformador elevador, se puede utilizar también como *reductor*; para ello, la corriente primaria se hace fluir por un arrollamiento de conductor más delgado y de mayor número de espiras. En el otro arrollamiento se crea

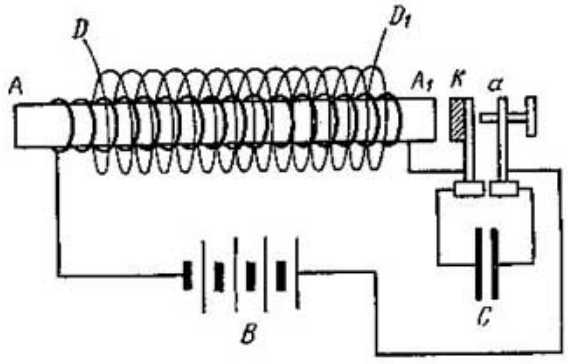


Fig. 317. Bobina de inducción.

una corriente de intensidad mayor y de f. e. m. menor que en el primero. Generalmente, la corriente de "alta tensión" que se transmite por los conductores desde la central, se reduce de nuevo en el lugar del consumidor, con ayuda de un transformador reductor, a una "tensión" menor.

Además de las aplicaciones técnicas indicadas, los transformadores hallan gran aplicación en los laboratorios técnicos (tanto los elevadores como los reductores). Según las exigencias, los transformadores se construyen dándoles distintas formas. Para obtener f. e. m. elevadas a pequeñas potencias, se utiliza la llamada *bobina de inducción*. Consta de dos solenoides cilíndricos sobre un núcleo común de hierro no cerrado (fig. 317). El primario es el arrollamiento del solenoide interior AA_1 formado de un número relativamente pequeño de espiras de un conductor grueso. El secundario es el arrollamiento del solenoide exterior DD_1 construido de un gran número de espiras de un conductor muy fino. Generalmente el primario se alimenta de un generador de corriente continua, por ejemplo de una batería de acumuladores B. Para que el primario cree un campo magnético variable, se interrumpe y conecta periódicamente la corriente del mismo. La interrupción y el cierre se hace con ayuda de un interruptor automático, que puede ser de diferentes construcciones. El más simple es el *interruptor de martillo*, que consta de un resorte con una armadura de hierro k (fig. 317). Cuando la corriente empieza a fluir por el primario, el núcleo de la bobina se magnetiza y atrae el resorte, con ello se interrumpe el circuito en el lugar de contacto entre el resorte k y el tornillo a. Para que al interrumpir el contacto no se produzca una chispa intensa, entre k y a se conecta un condensador C, en cuyo caso la

corriente de la batería B, al interrumpir el circuito, pasa a cargar el condensador y no se produce chispa.

La corriente del primario interrumpida por un interruptor de martillo u otro dispositivo mecánico, no es una corriente alterna sinusoidal. La curva de dependencia de la intensidad de esta corriente respecto al tiempo viene representada en la fig. 318,*a*. Después de conectar el circuito, la intensidad de la corriente se eleva relativamente despacio, lo cual es debido al fenómeno de autoinducción, y al desconectar el circuito, disminuye rápidamente. Como la f. e. m. del circuito secundario es proporcional a la variación de la intensidad de la corriente del primario respecto al tiempo, dI_1/dt (véase el § 226), en el momento de la desconexión alcanzará valores mucho mayores que en el momento de la conexión. La dependencia de la f. e. m. del circuito secundario respecto al tiempo viene representada en la fig. 318, *b*. El valor negativo de la f. e. m. indica que la corriente creada en el secundario debido a esta f. e. m., va en dirección opuesta a la de la corriente del primario; el valor positivo indica que la corriente del secundario va en el mismo sentido que en el primario.

Si en el secundario se forma un cortocircuito, fluirá por el mismo una corriente alterna no simétrica; pero la cantidad de electricidad transportada en ambas

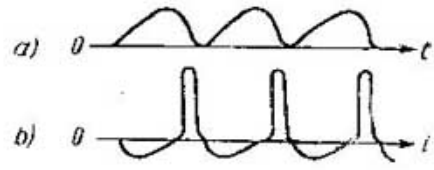


Fig. 318. Curva de dependencia de la intensidad de la corriente respecto al tiempo en una bobina de inducción: a) en el arrollamiento primario, b) en el secundario.

direcciones será la misma. Si en el circuito secundario se deja una considerable distancia disruptiva, la f. e. m. creada en la conexión puede resultar insuficiente para producir la descarga; entonces la chispa saltará solamente al desconectar el circuito primario, y en el secundario fluirá una corriente interrumpida; pero cada vez de un mismo sentido.

§ 237. Rectificación y medición de las corrientes alternas. Gracias a la comodidad que representa la generación y transmisión de corrientes alternas, éstas han adquirido amplia aplicación técnica. No obstante, en muchos casos se necesita consumir corriente continua; por eso la técnica moderna utiliza diferentes métodos para *rectificar* la corriente alterna.

La rectificación de la corriente se puede efectuar de distintas maneras, por ejemplo, con ayuda de rectificadores secos de semiconductores o de rectificadores electrolíticos (§ 178). El contacto entre dos semiconductores o entre un semiconductor y el metal, como se ha dicho en el § 171, posee distinta resistencia según sea el sentido de la corriente. Por eso, en un sentido, la corriente fluye a través del contacto sin debilitarse sensiblemente, y en otro puede dejar pasar solamente una corriente muy débil. En la técnica moderna, los rectificadores de semiconductores han adquirido amplia difusión. Como ejemplo se puede citar el *rectificador de germanio*, que consta de una lámina de germanio a la cual, de un lado se le ha soldado una esfera de indio, y del otro, de estaño. Junto al electrodo de indio surge una conducción por huecos y después se forma una zona $p - n$ de rectificación. Este rectificador es capaz de dejar pasar corrientes hasta cien am-

perios por cm² de contacto. Como otro ejemplo de rectificador de semiconductores indiquemos el *rectificador de selenio* que consta de una capa fina de selenio extendida entre dos discos metálicos.

En lugar de rectificadores secos se pueden utilizar *diodos* (*kenotrones o válvulas de dos electrodos*), que también poseen la propiedad de que la corriente puede fluir por ellos solamente en un sentido, a saber, del ánodo al cátodo caldeado. Por fin, son de gran difusión los llamados *rectificadores de mercurio*. Son tubos de descarga en los cuales ésta se produce en vapor de mercurio entre las superficies del mercurio líquido y un electrodo de grafito, donde la superficie calentada de mercurio generalmente desempeña la función de cátodo. Como resultado de ello, la descarga se produce cada vez que el mercurio hace la función de cátodo y el grafito de ánodo, y se apaga la descarga cuando la corriente es de

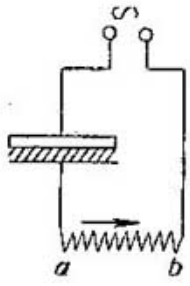


Fig. 319. Conexión de un rectificador seco en un circuito de corriente alterna.

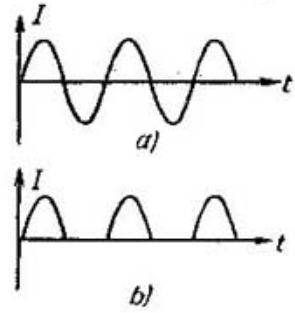


Fig. 320. Variación con el tiempo de las intensidades: *a*) de la corriente alterna, y *b*) de la corriente que ha pasado por un rectificador.

sentido opuesto. Al conectar un rectificador seco o de otra clase a un circuito de corriente alterna (fig. 319), en la parte *ab* del circuito fluirá corriente de un sentido. Sin embargo, la intensidad de esta corriente, evidentemente, no será constante, sino que variará con el tiempo.

En la fig. 320,*a* se representa la variación con el tiempo de la intensidad de una corriente alterna sinusoidal, y en la 320,*b*, la corriente que ha pasado a través de un rectificador. Utilizando el transformador y dos rectificadores se puede aprovechar también el "segundo semiperíodo" de la corriente alterna.

En la fig. 321, A_1 es el primario de un transformador conectado a un circuito de corriente alterna y A_2, el secundario. Dos rectificadores *1* y *2* se conectan a los terminales del secundario. De la parte media del secundario se hace una derivación *ba*. Entonces, en un semiperíodo funciona la parte C_1b del secundario y la corriente fluirá por el rectificador *1*. En el segundo semiperíodo, actuará la parte C_2b del arrollamiento y la corriente fluirá por el rectificador *2*. En la parte *ab* del circuito, la corriente fluirá siempre en un sentido. En la fig. 322,*a* se representa de nuevo una corriente alterna sinusoidal, y en la 322,*b*, la corriente rectificada según el esquema descrito. Las oscilaciones de la intensidad de la corriente se pueden rectificar también con ayuda de autoinducciones o de capacidades.

Para medir las corrientes alternas no sirven los instrumentos magnetoeléctricos de cuadro móvil, ya que la dirección de giro del cuadro varía al variar el sentido de la corriente. Como se ha indicado en el § 233, las corrientes alternas pueden medirse con ayuda de instrumentos térmicos.

www.elsolucionario.org

Para medir las corrientes alternas se utilizan instrumentos electrodinámicos con dos bobinas o instrumentos electromagnéticos en los cuales en la bobina se introduce atraída una barra de hierro que posea el mínimo de histéresis.

Además, las corrientes alternas se pueden medir con ayuda de los llamados instrumentos electrodinámicos de inducción. El funcionamiento de estos instru-

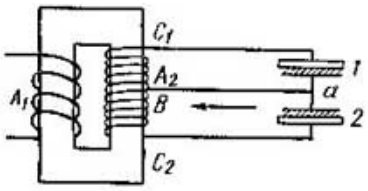


Fig. 321. Esquema de conexión de dos rectificadores con el secundario de un transformador con derivación en el punto medio.

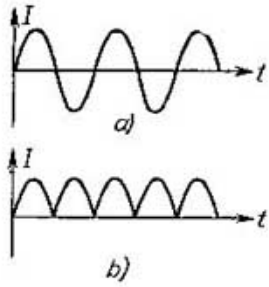


Fig. 322. Variación con el tiempo de la intensidad: *a*) de la corriente alterna, y *b*) de la corriente rectificada según el esquema de la fig. 321.

mentos es el siguiente (fig. 323): la corriente alterna, cuya intensidad se mide, fluye por la bobina Φ del electroimán y excita entre sus polos un campo magnético variable. La parte móvil *D* del instrumento es una placa que, con respecto a este campo magnético, está situada de manera que sólo en parte sirve de pantalla del campo. En la placa surgen las corrientes inducidas de Foucault, sobre las

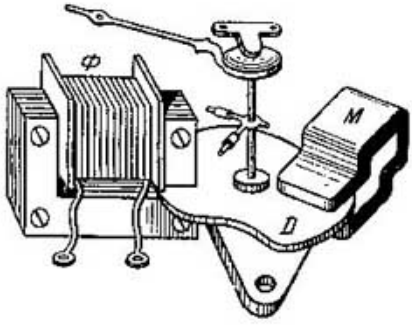


Fig. 323. Esquema de un amperímetro de inducción.

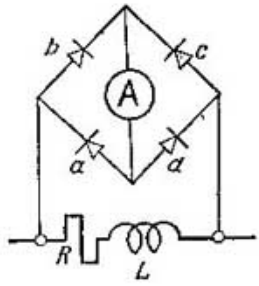


Fig. 324. Conexión de rectificadores para medir la intensidad de la corriente alterna.

cuales el campo magnético actúa con fuerzas que tienden a sacar a la placa de los límites del campo, con lo cual gira la placa y con ella la aguja que lleva unida. El imán permanente *M* es para amortiguar las oscilaciones de la placa.

Por último, las corrientes alternas se pueden medir con instrumentos magnetoeléctricos de cuadro móvil, si se les añade un rectificador. Para este fin generalmente se utilizan rectificadores secos (de óxido de cobre). En la fig. 324 se representa el esquema de conexión del amperímetro *A* a un circuito de corriente

alterna mediante cuatro rectificadores de óxido de cobre a, b, c, d, que aseguran el paso de la corriente a través del amperímetro A en un sentido. La resistencia R y la autoinducción L desempeñan la función de resistencia en derivación.

§ 238. Corriente trifásica. Junto con la corriente alterna sinusoidal ordinaria, en la técnica se utiliza ampliamente la llamada *corriente trifásica*. Se denomina corriente trifásica la que surge en una red bifurcada de conductores con tres f. e. m. variables, cuyas fases se diferencian una de otra en un ángulo de $\frac{2}{3}\pi$ (o, midiendo en grados, en 120°).

Veamos primeramente tres circuitos cerrados no conectados entre sí $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ y $A_3B_3C_3D_3$ (fig. 325). Sean las f. e. m.:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right),$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi \right)$$

que se inducen respectivamente en las partes A_1D_1, A_2D_2 y A_3D_3 de los circuitos. Supongamos que en los circuitos que examinamos no hay autoinducción y que en cada uno de ellos van conectadas resistencias óhmicas iguales $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

Entonces, según lo dicho en el § 232, en estos circuitos surgen corrientes respectivamente iguales a

$$I_1 = I_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$I_2 = I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right),$$

$$I_3 = I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{3}{4}\pi \right),$$

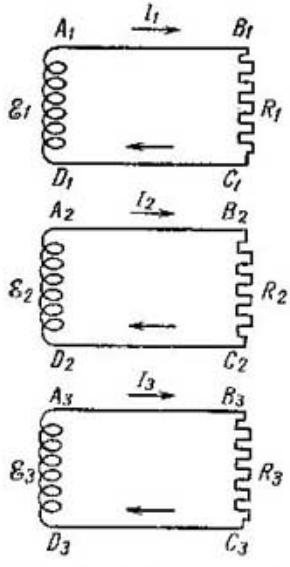


Fig. 325. Esquema de excitación de una corriente trifásica

donde la amplitud total de las corrientes es $I_0 = \mathcal{E}_0/R$. Unamos los puntos D_1, D_2 y D_3 de los tres circuitos. Entonces sus potenciales serán iguales; los potenciales de los respectivos puntos C_1, C_2, y C_3 también serán iguales y también se podrán unir, sin variar las corrientes I_1, I_2, e I_3 que fluyen por las resistencias. En esta conexión, los conductores D_1C_1, D_2C_2 y D_3C_3 se pueden sustituir por un conductor F y con ello se obtiene el circuito representado en la fig. 326. Por el conductor F, evidentemente, fluirá una corriente igual a la suma de las corrientes $I_1 + I_2 + I_3$. Es fácil ver que esta corriente total siempre es igual a cero. Efectivamente:

$$I_1 + I_2 = I_0 \operatorname{sen} \omega t + I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right) = I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{1}{3}\pi \right),$$

de donde

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{1}{3}\pi \right) + I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi \right) =$$

$$= 2I_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{5}{6}\pi \right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

El mismo resultado se puede obtener sumando gráficamente los tres vectores de la corriente I_0, los cuales forman una línea quebrada cerrada a manera de un triángulo equilátero.

Como la intensidad total de las corrientes $I_1+I_2+I_3$ es igual a cero todo el tiempo, el conductor F resulta de más y se puede quitar. Con ello resulta que tres

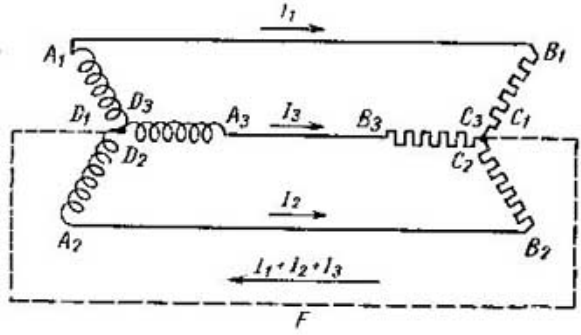


Fig. 326. Esquema de conexion en estrella.

corrientes alternas I_1, I_2, I_3, desfasadas mutuamente en 120°, se pueden transmitir desde el lugar de su generación a las resistencias R_1, R_2, R_3 por tres conductores, en lugar de tres pares de conductores que se necesitarían de estar los circuitos desconectados entre sí. Este circuito de corriente trifásica se dice que está *conectado en estrella*.

Los tres circuitos independientes representados en la fig. 325, se pueden unir según otro esquema denominado *conexión en triángulo* (fig. 327).

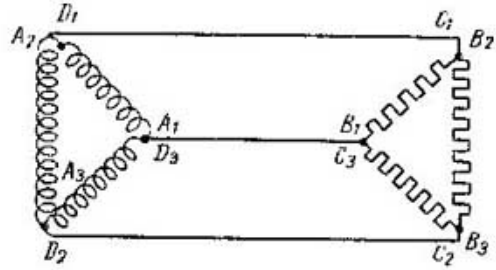


Fig. 327. Esquema de conexión en triángulo.

Según este esquema, se unen los puntos A_1D_3, A_2D_1, A_3D_2 y B_1C_3, B_2C_1, B_3C_2. Este esquema también permite sustituir los tres pares de conductores por tres conductores sin variar las corrientes que fluyen por las resistencias R_1, R_2 y R_3.

La igualdad a cero de la suma de las corrientes $I_1+I_2+I_3$ tiene lugar solamente si son iguales las resistencias R_1, R_2 y R_3. Si las resistencias no son iguales mutuamente, la corriente total $I_1+I_2+I_3$, siendo invariable la diferencia de fases entre ellas, resulta diferente de cero. No obstante, en la realidad, como los puntos C_1, C_2, y C_3 (en la conexión en estrella) están unidos, forman un nudo para el cual, según la ley de Kirchhoff, la suma de las corrientes que afluyen y se

www.elsolucionario.org

alejan del mismo debe ser igual a cero. Así tenemos que, de hecho, incluso cuando las resistencias R_1, R_2, y R_3 no son iguales, la suma de las corrientes es $I_1+I_2+I_3=0$. Esto es debido a que surgen diferencias complementarias de fase entre los puntos B_1, B_2 y B_3.

La comodidad de utilizar corrientes trifásicas consiste en que permiten crear el llamado campo giratorio.

Veamos el circuito magnético anular con tres pares de piezas polares representado en la fig. 328. Cada par de piezas polares crea su campo magnético, cuyos vectores de excitación magnética $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ y $\mathbf{H}_3$ estarán dirigidos según los correspondientes diámetros del anillo. Supongamos que cada par de piezas polares tiene arrollamientos alimentados por las componentes de la corriente trifásica. Entonces, si se desprecian los fenómenos de histéresis en el material del anillo, se obtiene que las excitaciones magnéticas H_1, H_2 y H_3 de los campos variarán con el tiempo según la ley:

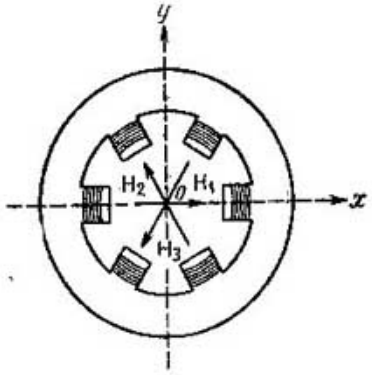


Fig. 328. Circuito magnético anular.

$$H_1 = H_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

$$H_2 = H_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right),$$

$$H_3 = H_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right).$$

Tracemos los ejes de coordenadas OXY como se indica en la fig. 328 y hallemos la suma de las proyecciones H_1, H_2, y H_3 sobre cada uno de los ejes:

$$H_x = H_0 \operatorname{sen} \omega t + H_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \cos \frac{2}{3}\pi + H_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \cos \frac{4}{3}\pi,$$

$$H_y = H_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi + H_0 \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{4}{3}\pi\right) \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi.$$

Después de las correspondientes transformaciones hallamos que

$$H_x = \frac{3}{2} H_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad H_y = \frac{3}{2} H_0 \cos \omega t$$

Según lo dicho en el t. 1, estas dos componentes determinan al vector H que gira a una velocidad angular ω constante según las agujas del reloj.

El campo giratorio actúa sobre un conductor situado en él, con cierta fuerza mecánica, ya que en el conductor surgen corrientes inducidas sobre las cuales actúa el campo magnético. Por ejemplo, si en un campo giratorio se coloca un cuadro con un arrollamiento cerrado, en el eje perpendicular a la dirección del campo, el cuadro empezará a girar en el mismo sentido que lo hace el vector de excitación magnética. Esto nos permite construir electromotores alimentados por una corriente alterna trifásica. M. Dolivo-Dobrovolski, ingeniero ruso, en 1891 fue el primero en transmitir energía con ayuda de una corriente trifásica utilizando un electromotor con campo giratorio. En la actualidad, la mayoría de los electromotores utilizados en la técnica se construyen basándose en el funcionamiento del campo giratorio.

CAPITULO XXI

Oscilaciones y ondas electromagnéticas

§ 239. Descarga oscilante del condensador. Sea el condensador C (fig. 329), cuyas armaduras se unen a través de una bobina de autoinducción L y una resistencia R. Supongamos que a las armaduras del condensador se les ha comunicado una diferencia de potencial V en un momento dado, después de lo cual se ha desconectado el generador de esta diferencia de potencial. Si no hubiese bobina de autoinducción, por el conductor que une las armaduras del condensador fluiría la corriente hasta que los potenciales de las armaduras se

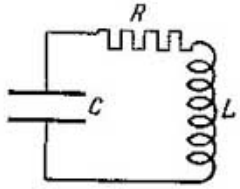


Fig. 329. Circuito oscilante con capacidad C, resistencia óhmica R y autoinducción L.

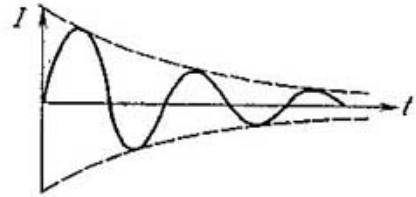


Fig. 330. Oscilaciones amortiguadas.

equilibrasen. Habiendo autoinducción en el circuito, el proceso transcurre de otra manera. En el momento cuando los potenciales de las armaduras se equilibren, la f. e. m. de autoinducción mantendrá a la corriente que tiende a disminuir, y las armaduras del condensador volverán a cargarse. Después de esto se crea de nuevo una corriente, pero de sentido opuesto, con lo cual la carga y la descarga de las armaduras tendrá lugar periódicamente y en el circuito con capacidad y autoinducción se producirán oscilaciones. Como parte de la energía de la corriente se invierte en el desprendimiento del calor de Lenz-Joule en la resistencia R, las oscilaciones se amortiguarán poco a poco. El carácter general de las oscilaciones se representa en la fig. 330. El amortiguamiento será tanto menor, cuanto menor sea la resistencia R; en el límite, cuando la resistencia es $R=0$, las oscilaciones deberían ser continuas (no amortiguadas).

Como se demostrará más adelante, la descarga adquiere carácter oscilatorio, si se satisface la siguiente desigualdad:

$$L > \frac{CR^2}{4}. \qquad (1)$$

Si el valor del coeficiente de autoinducción es menor que el determinado por la desigualdad (1), la f. e. m. de autoinducción es insuficiente para volver a cargar las armaduras del condensador: la descarga es aperiódica.

Si la resistencia R es pequeña, el período T de la descarga oscilante se determina por la fórmula (que más abajo se deduce):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \qquad (2)$$

Así, pues, cuanto menores sean la autoinducción y la capacidad, tanto menor será el período, es decir, tanto mayor será la frecuencia de las oscilaciones eléctricas. Generalmente, el período de las oscilaciones eléctricas es muy pequeño. Si incluso se toman capacidades y autoinducciones relativamente muy grandes, por ejemplo de $C = 1\mu F$ y $L = 1$ H, (teniendo en cuenta que $1\mu F = 10^{-6}$ F) obtenemos que:

$$T = 2\pi\sqrt{10^{-6} \cdot 1}\ \text{seg} \cong 0{,}0063\ \text{seg}.$$

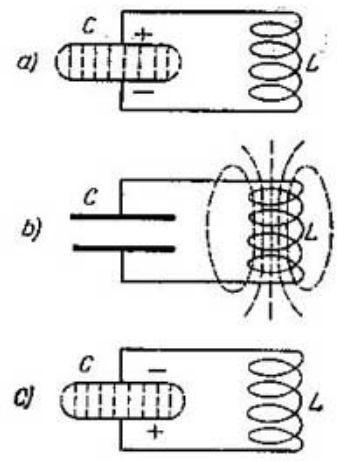


Fig. 331. Aparición alternativa de los campos eléctrico y magnético en la descarga periódica del condensador.

Las oscilaciones eléctricas examinadas son análogas a las oscilaciones mecánicas como por ejemplo, a las del péndulo. Al soltar el péndulo desviado, por inercia éste pasa por la posición de equilibrio sin detenerse y se desvía hacia el lado opuesto y continúa su movimiento oscilatorio amortiguándose poco a poco debido a las fuerzas de rozamiento. De esta comparación se ve que la autoinducción desempeña la función de inercia, y la resistencia óhmica, la de resistencia mecánica. La analogía es más profunda si pasamos a examinar las relaciones energéticas. Al oscilar, la energía potencial del péndulo se transforma en energía cinética, que, a su vez, después de pasar el péndulo por la posición de equilibrio, se transforma en potencial, y viceversa. Al cargar el condensador, el sistema adquiere una reserva de energía eléctrica (potencial). En la fig. 331, *a*, las líneas que van de una a otra armadura del condensador expresan que entre éstas hay un campo eléctrico. Al descargar el condensador, se crea una corriente eléctrica, que excita en el solenoide (autoinducción) un campo magnético con una reserva de energía análoga a la energía cinética del péndulo en movimiento. En la fig. 331, *b*, con líneas de puntos se representa el surgimiento de

www.elsolucionario.org

un campo magnético en el interior de las espiras de la autoinducción. Luego el condensador se vuelve a cargar (fig. 331, *c*): la energía "cinética" de la corriente se transforma en energía potencial del campo eléctrico del condensador, y así sucesivamente.

Examinemos con más detalle la descarga oscilante del condensador. Sea Q la carga comunicada a una de las armaduras del condensador. La intensidad de la corriente del circuito será igual a la variación de esta carga por unidad de tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \tag{3}$$

Llamando V a la diferencia de potencial de las armaduras del condensador en el momento dado, la caída total de potencial en el circuito que examinamos, será $IR+V$, y deberá ser igual a la f. e. m. que actúa en el circuito. Pero en el circuito actúa solamente la f. e. m. de autoinducción, que es $-L\frac{dI}{dt}$, de donde:

$$IR + V = -L\frac{dI}{dt}. \tag{4}$$

La diferencia de potencial de las armaduras del condensador se puede expresar de la manera ordinaria, es decir, en función de la capacidad del condensador y de la carga de sus armaduras: $V = \frac{Q}{C}$. Está claro que tanto esta carga Q como la diferencia de potencial V son magnitudes variables. Colocando este valor de V en la fórmula (4) y utilizando la ecuación (3), obtenemos que

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0; \tag{5}$$

esta ecuación es diferencial y resolviéndola se halla la dependencia entre Q y el tiempo. La solución de esta clase de ecuaciones se ha dado en el t. I al examinar las oscilaciones elásticas amortiguadas de un punto material. Reproduzcámosla aquí otra vez. Escribamos la ecuación (5) introduciendo las siguientes notaciones:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{CL} = \omega_0^2. \tag{6}$$

Entonces obtenemos que

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 2\beta\frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0. \tag{5a}$$

Introduzcamos en la (5a) una nueva variable:

$$Q = ze^{-\beta t}. \tag{7}$$

Diferenciando en función del tiempo obtenemos que

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} = \beta z e^{-\beta t};$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 z e^{-\beta t};$$

colocando estos valores de Q, dQ/dt y d^2Q/dt^2 en la ecuación (5a) y reduciendo el factor común $e^{-\beta t}$, tenemos que

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) z = 0.$$

La solución de esta ecuación, como se puede comprobar fácilmente mediante la correspondiente sustitución, para el caso en que $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, es

$$z = A \cos(\omega t - \varphi),$$

donde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \tag{8}$$

A y φ son constantes que se pueden determinar de las condiciones iniciales. Por consiguiente, según la (7), para Q se cumplirá la ecuación:

$$Q = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t - \varphi). \tag{9}$$

Esta solución es la ecuación de una oscilación amortiguada. La magnitud $A \cdot e^{-\beta t}$ es la amplitud, que disminuye con el tiempo según una ley exponencial: cuanto mayor sea β, con más rapidez disminuirá la amplitud. Como, según la (6), tenemos que $\beta = \frac{R}{2L}$, el amortiguamiento de la oscilación se efectuará con tanta mayor rapidez, cuanto mayor sea la resistencia óhmica R y cuanto menor sea la autoinducción. El período de oscilación T, según la (8), es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Sustituyendo en esta ecuación las magnitudes ω_0 y β por sus valores según la (6), hallamos que

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \tag{8a}$$

Si la resistencia óhmica R del circuito es muy pequeña y el coeficiente de autoinducción L no lo es, tendremos el caso de oscilaciones de amortiguamiento muy lento, y en la fórmula (8a) se puede despreciar la magnitud $\left(\frac{R}{2L}\right)^2$ por ser muy pequeña en compa-

ración con la magnitud $\frac{1}{LC}$; por consiguiente, el período de estas oscilaciones de lenta amortiguación será

$$T = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{8b}$$

que es la fórmula (2) del principio del párrafo.

Comparando la (8a) y la (8b) vemos que la presencia de la resistencia en el circuito conduce a aumentar el período de oscilación T.

Si la resistencia del circuito o la capacidad del condensador son tan grandes que

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < 0, \quad \text{ó} \quad L < \frac{CR^2}{4},$$

la ecuación (9) no se cumplirá y tendremos una descarga *aperiódica*, en la cual no se crean oscilaciones eléctricas en el circuito; como este caso no nos interesa, en adelante no se hablará más de él.

El proceso oscilatorio se ha examinado en función de la carga Q que en cada instante dado hay en la armadura del condensador. En correspondencia con la fórmula (9), la magnitud de esta carga oscila, variando de signo periódicamente y disminuyendo. Al fin y al cabo la carga desaparece debido a que las cargas $+Q$ y $-Q$, iguales y de signo contrario, comunicadas a las armaduras del condensador se compensan mutuamente. Está claro que, además de con la carga Q, el sistema se puede caracterizar en función de la diferencia de potencial V de las armaduras del condensador, o en función de la intensidad I de la corriente que fluye por el circuito.

Basándonos en la ecuación $V = \frac{Q}{C}$, obtenemos que

$$V = \frac{A}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi). \tag{10}$$

Así tenemos que la diferencia de potencial también es una función que representa una oscilación amortiguada con el mismo período T. El valor de la intensidad de la corriente se halla de la (3):

$$I = \frac{dQ}{dt} = -A\beta e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi) - A\omega e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi). \tag{11}$$

Si no hay amortiguamiento, tenemos que $\beta = 0$, de donde

$$I = -A\omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi). \tag{11a}$$

En este caso, la diferencia de potencial es

$$V = \frac{A}{C} \cos(\omega t - \varphi). \tag{10a}$$

Por lo tanto, si las oscilaciones no se amortiguan, la intensidad de la corriente y la diferencia de potencial están desfasadas una respecto de la otra en un ángulo igual a $\pi/2$.

www.elsolucionario.org

§ 240. Oscilaciones eléctricas forzadas. La descarga oscilante del condensador que hemos examinado en el párrafo anterior es análoga a la oscilación de un péndulo que al principio se desvía de su posición de equilibrio y después realiza oscilaciones amortiguadas con su período correspondiente. Pero tanto el péndulo como cualquier sistema mecánico elástico, puede realizar también oscilaciones forzadas bajo la influencia de una fuerza periódica exterior. En este caso tiene lugar el fenómeno característico de resonancia (véase el t. I, § 103), en el cual la amplitud de las oscilaciones forzadas se hace sobre todo grande a determinado valor de la frecuencia de la fuerza exterior. Esta frecuencia se denomina *de resonancia* (*resonante*), que si el amortiguamiento es débil, prácticamente coincide con la frecuencia de las propias oscilaciones del sistema.

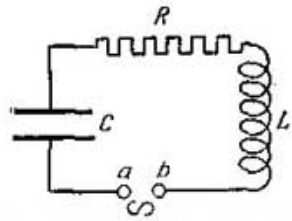


Fig. 332. Excitación de las oscilaciones forzadas en un circuito con capacidad C, resistencia óhmica R y autoinducción L.

Actuando sobre el sistema oscilante con una fuerza exterior se pueden mantener continuamente las oscilaciones del sistema a una amplitud invariable, es decir, obtener oscilaciones no amortiguadas o continuas. De ejemplo puede servir el escape de áncora de los relojes de péndulo, que periódicamente impulsa el péndulo y le obliga a realizar oscilaciones continuas. En estos casos, el trabajo que vence las fuerzas de rozamiento se realiza a costa de una fuente de energía exterior.

Análogamente, aplicándole a un circuito con capacidad, resistencia y autoinducción una f. e. m. que varíe periódicamente, se pueden excitar en el circuito oscilaciones forzadas. Sea un circuito oscilante con una capacidad C, autoinducción L y resistencia óhmica R, interrumpido en determinado lugar, y en cuyos extremos a y b (terminales) (fig. 332) se conectan los conductores de un generador exterior de f. e. m. $\mathscr{E}$. Si suponemos que la f. e. m. exterior es puramente periódica, es decir, varía con el tiempo según la ley:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t, \tag{1}$$

tendremos el caso ya examinado en el § 234. Ahora examinemos los resultados obtenidos en el § 234 desde otro punto de vista. En nuestro circuito [véase la fórmula (5) del § 234] fluirá una corriente I de la misma frecuencia ω que la de la f. e. m. exterior $\mathscr{E}$:

$$I = I_0 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi). \tag{2}$$

Esta ecuación (2) es una solución particular de la ecuación diferencial que satisface la intensidad I de la corriente en el caso que examinamos. La solución total tendrá además un término

$I_0 e^{-\beta t} \operatorname{sen} \omega t$; pero este término representa una oscilación amortiguada que en la práctica cesa rápidamente y, entonces, la dependencia entre la intensidad de la corriente y el tiempo se expresa totalmente por la fórmula (2). Si la fuerza periódica exterior (1) actúa continuamente, las oscilaciones de la corriente I, según la (2), continuarán todo el tiempo que se quiera, es decir, el sistema realizará oscilaciones continuas forzadas de frecuencia ω. Según la fórmula (9) del § 234, la amplitud I_0 de esta corriente será

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}; \qquad (3)$$

y alcanzará el máximo a la frecuencia de resonancia:

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \qquad (4)$$

El período de las oscilaciones propias del circuito, según la fórmula (8a) del § 239, es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

de donde se ve que la resonancia tiene lugar a la frecuencia ω_{res} un poco mayor que la frecuencia de las oscilaciones propias ω_0. Si la resistencia óhmica es infinitamente pequeña, la frecuencia de resonancia coincide con la de las propias oscilaciones.

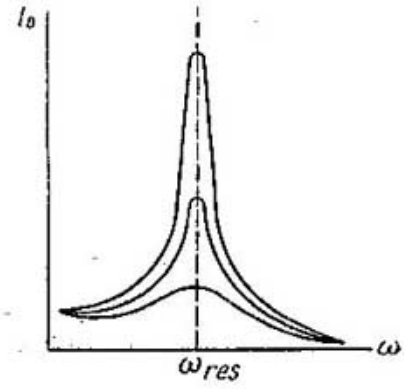


Fig. 333. Curvas de resonancia de la intensidad de la corriente I.

Cuando la frecuencia es la de resonancia, la intensidad I_0 de la corriente adquiere el valor de $I_{0máx} = \mathcal{E}_0/R$; y será tanto mayor, cuanto menor sea la resistencia óhmica R.

En la fig. 333 se representan varias curvas de resonancia correspondientes a diferentes valores de la resistencia óhmica R. Cuanto menor sea la resistencia R, más agudo será el máximo de la curva. Así, pues, el circuito de amortiguamiento débil ofrece una resonancia aguda. Esto permite, en el caso de que sea complejo el carácter de la f. e. m. exterior, "sintonizar" este circuito según las componentes armónicas que se quiera de la f. e. m.

Efectivamente, sea una f. e. m. exterior representada por la suma de sinusoides:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} \operatorname{sen} (\omega_1 t - \varphi_1) + \mathcal{E}_{02} \operatorname{sen} (\omega_2 t - \varphi_2) + \mathcal{E}_{03} \operatorname{sen} (\omega_3 t - \varphi_3) + \ldots$$

Eligiendo una capacidad C y autoinducción L del circuito de manera que se satisfaga la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_1,$$

obtenemos que la condición de resonancia se cumplirá para la componente $\mathcal{E}_{01} \operatorname{sen} (\omega_1 t - \varphi_1)$, y las oscilaciones forzadas del circuito originadas por esta componente se producirán a amplitud máxima. Las amplitudes de las oscilaciones forzadas de frecuencia ω_2, ω_3, ... serán pequeñas, ya que para ellas no se cumplen las condiciones de resonancia. Variando continuamente la capacidad o la autoinducción del circuito, se le puede obligar a "responder" consecutivamente a todas las frecuencias ω_1, ω_2, ω_3, ... De esta manera se puede efectuar el análisis armónico de una oscilación compleja.

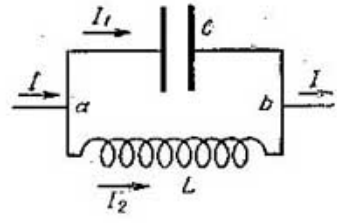


Fig. 334. Circuito con conexión en paralelo de la capacidad C y de la autoinducción L.

Además del esquema representado en la fig. 332, para obtener oscilaciones eléctricas continuas se puede utilizar el esquema de la fig. 334, donde de nuevo se tiene un circuito con capacidad C y autoinducción L. Para simplificar, la resistencia R de todo el circuito se considera igual a cero. La f. e. m. exterior $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$ se aplica a los puntos a y b del circuito. De esta manera, en los puntos a y b, el circuito se bifurca y consta de dos partes conectadas en paralelo. Una de estas partes contiene la capacidad C, y la otra, la autoinducción L. La intensidad de la corriente de cada una de estas partes se obtiene de nuevo con ayuda de las fórmulas deducidas en el § 234, suponiendo en ellas $C=\infty$, o $L=0$, respectivamente.

Según la fórmula (5) del § 234, en la rama aCb fluirá la corriente

$$I_1 = I_{01} \operatorname{sen} (\omega t - \varphi_1). \qquad (5)$$

La amplitud de esta corriente I_{01} se obtiene suponiendo $L=0$ y $R=0$ en la fórmula (9) (de la pág. 493), de donde

$$I_{01} = \mathcal{E}_0 C \omega. \qquad (6)$$

La ecuación (8) del § 234 determina la fase inicial φ_1 de esta corriente:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\infty,$$

www.elsolucionario.org

de donde

$$\varphi = (2k + {}^3/_2)\,\pi, \text{ donde } k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Por la rama aLb fluirá la corriente:

$$I_2 = I_{02}\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \varphi_2), \tag{7}$$

cuya amplitud se obtiene suponiendo $C = \infty$ y $R = 0$ en la fórmula (9) del § 234, de donde

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}_0}{L\omega}. \tag{8}$$

La fase inicial φ_2 viene determinada por la fórmula

$$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = +\infty, \text{ de donde } \varphi_2 = (2k + 1/2)\,\pi.$$

Así tenemos que la diferencia de fases de las corrientes de las ramas aCb y aLb es igual a $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, es decir, las fases de estas corrientes son opuestas, y por los conductores que van a los puntos a y b fluirá una corriente de amplitud:

$$I_0 = I_{01} - I_{02}.$$

Colocando en esta ecuación los valores de I_{01} e I_{02} según las ecuaciones (6) y (8), obtenemos que

$$I_0 = \mathcal{E}_0 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right). \tag{9}$$

Así, pues, la corriente de los conductores abastecedores es más débil que en las distintas ramas del circuito, y será igual a cero, cuando

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0,$$

o cuando la frecuencia de la f.e.m. exterior sea

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

es decir, precisamente en las condiciones de resonancia. La igualdad a cero de esta corriente se obtiene por haber supuesto igual a cero la resistencia óhmica del circuito, por consiguiente, para mantener las oscilaciones del circuito no se necesita ningún suministro de energía de fuera. Si hay resistencia óhmica R, la diferencia de fases $\varphi_1 - \varphi_2$ no será igual a π, y en correspondencia con ello, la amplitud de la corriente I_0 incluso en las condiciones de resonancia será diferente de cero. La energía suministrada al circuito se invertirá en el mantenimiento (entretenimiento) de las oscilaciones amortiguadas. Esta energía será tanto menor cuanto menor sea la resistencia R.

Como en la resonancia aguda, la corriente de los conductores abastecedores es considerablemente más débil que las que circulan por el propio circuito, el fenómeno examinado se denomina *resonancia de corriente* (*o resonancia en paralelo*).

§ 241. Excitación de las oscilaciones continuas con ayuda del tubo catódico. Para crear una f. e. m. alterna capaz de mantener las *oscilaciones continuas* en el circuito, en la actualidad se utilizan

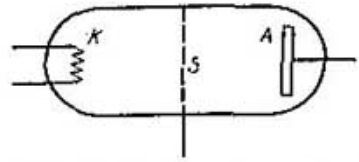


Fig. 335. Válvula de tres electrodos (triodo).

ampliamente los *tubos catódicos*. Como hemos visto en el § 172, el tubo catódico es un recipiente en que se ha hecho el vacío y donde se han introducido dos electrodos: el cátodo incandescente K y el ánodo A. El cátodo K emite electrones que, bajo la acción del campo acelerador, se desplazan hacia el ánodo formando la corriente electrónica (termoiónica). Esta clase de tubo se denomina *tubo* (o *válvula*) *de dos electrodos o diodo*. Para generar oscilaciones continuas se utiliza generalmente el *tubo de tres electrodos* o *triodo*, el cual consta de cátodo K, ánodo A y una rejilla S introducida entre ellos (fig. 335). Los electrones emitidos por el cátodo pueden pasar por los huecos de la rejilla y alcanzar de esta manera el ánodo.

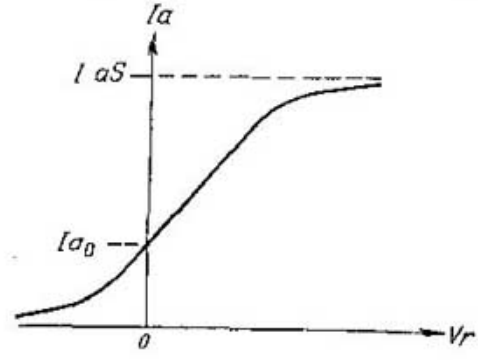


Fig. 336. Dependencia entre la corriente anódica I_a y la tensión de rejilla V_r.

Si a la diferencia dada de potencial entre el cátodo K y el ánodo A se aplica a la rejilla un potencial que retenga a los electrones emitidos por el cátodo, la corriente que llega al ánodo ("corriente anódica" o "corriente de placa") se debilita. Y viceversa, si a la rejilla se aplica una tensión que acelere los electrones, la corriente anódica se intensifica. Así tenemos que la magnitud de la corriente anódica depende del potencial de la rejilla. En la fig. 336 se representa la dependencia entre la intensidad de la corriente anódica y la "tensión de rejilla" V_r, es decir, la diferencia de potencial entre

el cátodo K y la rejilla S. En este caso se supone que la tensión anódica V_a (diferencia de potencial entre el cátodo K y el ánodo A) es constante. Si la tensión de la rejilla es igual a cero, hay cierta corriente anódica I_{a0}, creada por la tensión anódica dada V_a. Para que esta corriente disminuya hasta desaparecer, hay que aplicar a la rejilla una tensión determinada de repulsión. Si la tensión de la rejilla es de aceleración de los electrones, la corriente anódica aumenta y, por último, alcanza el valor de saturación I_{as}. La característica de la corriente anódica es lineal en su parte media. En el triodo, la corriente anódica varía intensamente a pequeñas variaciones de la tensión de rejilla. Esto es debido a que, por la poca distancia entre la rejilla y el cátodo, la tensión de rejilla crea una intensidad del campo bastante grande cerca del cátodo. La mayoría de las líneas de fuerza que salen del ánodo, terminan en la rejilla sin alcanzar al cátodo. Por eso, la tensión anódica del triodo influye poco en la magnitud de la corriente anódica. Parte de los electrones emitidos por el cátodo van a parar a la rejilla creando de esta manera la corriente de rejilla. Sin embargo, esta corriente de rejilla es muy pequeña en comparación con la anódica, si la superficie de los huecos de la rejilla es grande en comparación con la ocupada por los hilos de la misma. El triodo se utiliza tanto para la excitación (generación) de oscilaciones continuas, como para el reforzamiento de las oscilaciones.

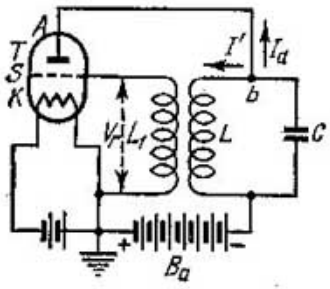


Fig. 337. Excitación de oscilaciones continuas según el esquema de acoplamiento de reacción.

El esquema de excitación de las oscilaciones continuas mediante un tubo de tres electrodos se representa en la fig. 337. El funcionamiento de este esquema es análogo al de los sistemas mecánicos de autooscilación, por ejemplo, del péndulo del reloj, en que las oscilaciones se mantienen sin amortiguarse gracias a los impulsos del áncora. Si no se suministra energía de fuera, las oscilaciones del circuito se amortiguan debido a la gradual radiación de energía y, en parte, a la transformación de la energía en el calor de Joule-Lenz en la resistencia óhmica del circuito. En el esquema de la fig. 337, la energía se suministra al circuito LC con ayuda del tubo de tres electrodos T de la batería del ánodo B_a.

La rejilla S del tubo se conecta con la bobina L_1. La bobina está relacionada por influencia inductiva con la autoinducción L del circuito oscilante LC. Esta relación se denomina *acoplamiento de reacción*, o simplemente *reacción*, y origina la excitación de las oscilaciones continuas. Efectivamente, la variación de la intensidad

www.elsolucionario.org

de la corriente I' del circuito oscilante crea la f. e. m. de la bobina L_1, la cual produce la variación de la tensión de rejilla V_r. Debido a la variación de la tensión de rejilla, la corriente anódica que fluye a través del triodo T procedente de la batería B_a, variará con una frecuencia igual a la de oscilación del circuito LC. Eligiendo convenientemente la fase de la tensión de rejilla, estas variaciones de la corriente anódica mantendrán las oscilaciones del circuito LC. De esta manera las oscilaciones se pueden hacer continuas a costa de la energía suministrada por la batería B_a. Se puede demostrar que, al funcionar el triodo en la parte media rectilínea de la característica, las oscilaciones generadas en el circuito oscilante son de simple carácter sinusoidal.

Escribamos la ecuación de las oscilaciones del esquema representado en la fig. 337. Al descargar el condensador C, la corriente I creada en el circuito se bifurca en el nudo b descomponiéndose en dos: corriente anódica I_a y corriente I' que fluye a través de la bobina. Considerando que las corrientes son cuasiestacionarias (véase el § 232), se obtiene para el nudo b, según la ley de Kirchhof:

$$I = I' + I_a. \tag{1}$$

Llamemos V a la diferencia de potencial de las armaduras del condensador C y R, a la resistencia óhmica de la bobina L. Se desprecia la resistencia de los conductores. Según la segunda ley de Kirchhof, la suma de las caídas de potencial del contorno LC es $RI'+V$ y debe ser igual a la suma de las f. e. m. que actúan en este contorno. En el contorno LC actúa solamente la f. e. m. de autoinducción $-L\frac{dI'}{dt}$, de donde

$$RI' + V = -L\frac{dI'}{dt}. \tag{2}$$

La diferencia de potencial V de las armaduras del condensador está relacionada en cada instante con la carga Q de una de las armaduras mediante la ecuación $V=\frac{Q}{C}$, donde C es la capacidad del condensador. Basándonos en esto, la ecuación (2) se puede escribir de la manera siguiente:

$$L\frac{dI'}{dt} + RI' + \frac{Q}{C} = 0.$$

Diferenciando esta ecuación en función de t obtenemos que

$$L\frac{d^2I'}{dt^2} + R\frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = 0.$$

Observando que $\frac{dQ}{dt} = I$ y utilizando la ecuación (1), hallamos que

$$L\frac{d^2I'}{dt^2} + R\frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C}(I' + I_a) = 0. \tag{3}$$

La intensidad de la corriente anódica I_a, como se ha indicado, depende de la tensión de rejilla V_r. Esta dependencia viene representada por la curva de la fig. 336. En la parte rectilínea del gráfico, la dependencia será, naturalmente, lineal. Despreciando el valor de I_{a0}, en el caso más simple se puede escribir esta depen-

dencia de la manera siguiente: $I_a = kV_r$, donde k es una magnitud constante. Llamando L_{12} al coeficiente de autoinducción de las bobinas L y L_1, obtenemos que

$$V_r = -L_{12}\frac{dI'}{dt}, \text{ de donde } I_a = kV_r = -kL_{12}\frac{dI'}{dt}.$$

Colocando este valor de I_a en la ecuación (3), hallamos que

$$L\frac{d^2I'}{dt^2} + \left(R - \frac{kL_{12}}{C}\right)\frac{dI'}{dt} + \frac{1}{C}I' = 0. \quad (4)$$

El factor de la magnitud dI'/dt es la resistencia óhmica R disminuida en la magnitud kL_{12}/C. Si se elige esta magnitud (variando el coeficiente L_{12}) de manera que

$$R - \frac{kL_{12}}{C} = 0,$$

la ecuación (4) se transforma en:

$$L\frac{d^2I'}{dt^2} + \frac{1}{C}I' = 0. \quad (5)$$

Es fácil ver que la solución de esta ecuación es

$$I' = A\cos\omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.

De esta manera tenemos que en el circuito LC se producen oscilaciones continuas de amplitud A y de frecuencia angular ω. La obtención de esta clase de oscilaciones continuas se puede conseguir funcionando el triodo en la parte lineal de la característica, ya que sólo en este caso la ecuación (3) se transforma en la ecuación (5) de oscilaciones continuas.

En la radiotecnia moderna se utilizan diferentes tipos de generadores (osciladores) termoiónicos (o de válvulas) que fundamentalmente se distinguen entre sí por el modo de acoplamiento de reac-

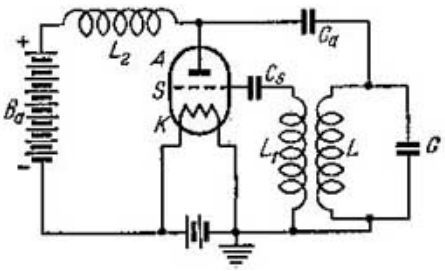


Fig. 338. Excitación de oscilaciones continuas según el esquema con alimentación anódica en paralelo.

ción. Este acoplamiento puede ser inductivo (como el representado en la fig. 337), capacitivo o autoinductivo. Además, los generadores pueden ser de alimentación en serie, cuando la válvula y el circuito oscilante están conectados en serie con la batería anódica, y de

alimentación en paralelo o en derivación, cuando la válvula y el circuito están conectados en paralelo con la batería. Por último, los esquemas pueden diferenciarse uno de otro según que en ellos se utilice una o dos válvulas. En la fig. 338 se representa un esquema de acoplamiento inductivo de reacción con alimentación anódica en paralelo. El condensador C_a se conecta para no permitir el cierre de la batería anódica a través de la bobina L; al mismo tiempo no deja pasar la corriente de alta frecuencia al circuito oscilante LC. La función de la inducción L_2 consiste en no permitir el paso de las oscilaciones de alta frecuencia a la batería anódica B_a.

§ 242. Corriente de desplazamiento. Veamos con más detalle el proceso que tiene lugar al fluir la corriente alterna por un circuito con condensador. En el caso de una corriente continua, como se ha visto, las líneas del flujo eléctrico siempre son cerradas (§ 156). No ocurre lo mismo cuando la corriente es alterna. En el dieléctrico de entre las armaduras del condensador, las cargas no pueden desplazarse, con lo cual las líneas del flujo eléctrico que llegan a la armadura del condensador, se *interrumpen* en su superficie. La corriente de conducción que fluye por el conductor que une las armaduras del condensador, resulta *interrumpida*.

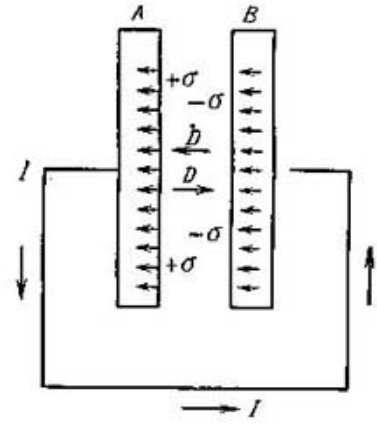


Fig. 339. Aparición de la corriente de desplazamiento entre las armaduras de un condensador.

Supongamos que en un instante determinado, la armadura de la izquierda A de un condensador plano (fig. 339) posee una carga positiva en su superficie con una densidad de $+\sigma$, y la de la derecha, una carga negativa de densidad $-\sigma$. Al descargar el condensador a través del conductor que une las armaduras, fluye una corriente de la armadura de la izquierda hacia la de la derecha. El valor de la densidad i de esta corriente en el interior de la armadura se obtiene tomando la derivada de la densidad de carga en función del tiempo (véase el § 155):

$$i = \frac{d\sigma}{dt}. \qquad (1)$$

La corriente de esta densidad se desplaza desde la armadura de la izquierda A.

Veamos ahora qué ocurre en el espacio entre las armaduras del condensador. Si nos limitamos a las corrientes alternas de frecuencia

www.elsolucionario.org

no muy elevada, se puede determinar fácilmente la variación del campo eléctrico entre las armaduras. Efectivamente, en este caso, el valor instantáneo del campo en el interior del condensador se puede calcular basándose en los valores instantáneos de las densidades superficiales de las cargas. Como se deduce del § 144, el valor del vector **D** de inducción eléctrica entre las armaduras del condensador es

$$D = 4\pi\sigma.$$

Derivando en función del tiempo los términos de la derecha y de la izquierda de esta ecuación, obtenemos que

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dD}{dt} = \frac{d\sigma}{dt},$$

o, llamando $\dot{D}$ a la derivada de la inducción eléctrica en función del tiempo, tenemos que

$$\frac{1}{4\pi}\dot{D} = \frac{d\sigma}{dt}. \qquad (2)$$

En el caso examinado el vector $\dot{\mathbf{D}}$ va dirigido desde la armadura *B* a la *A*. Efectivamente, al descargar el condensador, el campo entre sus armaduras disminuye, de donde se deduce que la derivada respecto al tiempo dD/dt es negativa, es decir, el vector $\dot{\mathbf{D}}$ va en sentido contrario al de **D**, que, como se sabe, va de izquierda a derecha en el espacio entre las armaduras. Por lo tanto se llega a la conclusión de que en el interior de la armadura *A* van dirigidas hacia la izquierda las líneas del vector de densidad de la corriente de conducción **i**; mientras que en el espacio entre las armaduras, en la misma dirección van las líneas del vector $\dot{\mathbf{D}}$. Según las igualdades (1) y (2), los valores de los vectores **i** y $\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}$ son iguales. Así tenemos que las líneas de densidad de la corriente **i** y las líneas del vector $\dot{\mathbf{D}}$ dividido por 4π, se sustituyen mutuamente.

Introduzcamos la notación:

$$\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{i}_d. \qquad (3)$$

Entonces resulta que *las líneas de densidad de la corriente de conducción* **i** *en el interior de una armadura conductora se transforman continuamente en líneas del vector* $\mathbf{i}_d$ *entre las armaduras*. Maxwell, que fue el primero en introducir la magnitud $\mathbf{i}_d$, la llamó densidad de la *corriente de desplazamiento*. El nombre de "corriente de desplazamiento" fue debido al concepto, que actualmente ha perdido el valor, de que la aparición de las fuerzas electrostáticas estaba relacionada con la deformación mecánica del medio elástico, del éter.

Así, la continuidad de las líneas del flujo de corriente resulta restablecida formalmente, si la densidad de la corriente de conducción i de los conductores se compara con la densidad de la corriente de desplazamiento i_d de los dieléctricos determinada por la variación del campo eléctrico con el tiempo. No obstante, en la realidad se trata no sólo de la analogía formal entre la corriente de conducción y la de desplazamiento. El desarrollo ulterior del estudio de los fenómenos electromagnéticos ha demostrado que la corriente de desplazamiento explica ciertas propiedades reales del campo electromagnético. *Según la hipótesis enunciada por Maxwell, la corriente de desplazamiento crea en el espacio circundante un campo magnético de la misma naturaleza que el campo magnético de la corriente equivalente de conducción.* Esta hipótesis, en la actualidad se ha confirmado completamente por numerosos experimentos de verificación de las consecuencias que se deducen de ella.

Hay que tener en cuenta que la corriente de desplazamiento es equivalente a la corriente de conducción solamente en lo que respecta a la capacidad de crear un campo magnético. En todos los demás casos la corriente de desplazamiento no se puede equiparar a la corriente de conducción; por ejemplo, al fluir la corriente de desplazamiento no se desprende calor de Joule-Lenz.

Además de la corriente de conducción y la de desplazamiento, Maxwell introdujo en su análisis el concepto de *corriente total*, cuya densidad **u** se determina como la suma geométrica de la densidad de la corriente de conducción y la de la corriente de desplazamiento:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{i}_d \qquad (4)$$

Como se puede demostrar, *la corriente total* siempre es cerrada. En nuestro ejemplo, suponiendo que la frecuencia de las oscilaciones no es muy elevada, la propiedad de ser cerrada la corriente total se deduce de las siguientes razones: en el conductor que une las armaduras del condensador, la corriente total se puede considerar igual a la corriente de conducción; entre las armaduras del condensador, la corriente total es igual a la corriente de desplazamiento; y como en la superficie de las armaduras, según las ecuaciones (1) y (2), las densidades de la corriente de desplazamiento y de la corriente de conducción son iguales y del mismo sentido, la corriente total en la superficie no varía.

Rigurosamente hablando, la corriente de desplazamiento tampoco es igual a cero en el interior del conductor. Su magnitud se puede determinar de la siguiente manera:

$$i_d = \frac{\dot{D}}{4\pi} = \frac{\varepsilon \dot{E}}{4\pi}.$$

La intensidad del campo eléctrico E de una descarga periódica es una función periódica del tiempo, $E=E_0$ sen ωt, y su derivada respecto al tiempo es $\dot{E}=E_0\omega \cos \omega t$, de donde la densidad de la corriente de desplazamiento i_d será

$$i_d = \frac{1}{4\pi} \varepsilon \omega E_0 \cos \omega t.$$

La densidad de la corriente de conducción se expresa en función de la intensidad del campo E según la ley de Ohm:

$$i = \sigma E = \sigma E_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

donde σ es la conductibilidad del conductor.

La relación de las amplitudes de las densidades de las corrientes de desplazamiento y de conducción es

$$\frac{i_d}{i} = \frac{\omega \varepsilon}{4\pi\sigma}.$$

Para los conductores metálicos, σ es una magnitud del orden de 10^{17} unidades *CGSE*. Mediante mediciones indirectas, se ha deducido que la constante dieléctrica de los metales es una magnitud no mayor de 10. De aquí que para $\omega \geqslant 10^7$ seg, tengamos la relación $\frac{3\omega}{\sigma} = 10^{-9}$, de donde se ve que en los conductores metálicos se puede despreciar la corriente de desplazamiento por su pequeñez en comparación con la de conducción.

§ 243. Campo electromagnético. Según la hipótesis de Maxwell citada en el párrafo anterior, la corriente de desplazamiento crea, lo mismo que la de conducción, un campo magnético. Pero la corriente de desplazamiento, cuya densidad es

$$i_d = \frac{1}{4\pi} \dot{D},$$

surge cada vez que es diferente de cero la derivada del vector de inducción eléctrica **D** respecto al tiempo, es decir, cuando haya un campo eléctrico que varíe con el tiempo. De esta manera llegamos a la siguiente conclusión: *cualquier campo eléctrico que varíe con el tiempo crea un campo magnético.*

El campo electrostático, es decir, el campo de cargas eléctricas de magnitud invariable e inmóviles unas respecto de las otras, actúa solamente sobre las cargas eléctricas; pero no revela ninguna clase de acción magnética. Sin embargo, si las cargas se desplazan unas respecto de las otras, o varían de magnitud, variará el campo eléctrico creado por ellas, y entonces se percibirán las acciones magnéticas al mismo tiempo que las eléctricas.

En un caso particular se puede concebir un campo eléctrico que aumente (o disminuya) uniformemente, en cuyo caso la corriente de desplazamiento sería constante y crearía un campo magnético constante. Sin embargo, en la práctica, un campo eléctrico variable siempre tiene una derivada variable respecto al tiempo, es decir crea una corriente de desplazamiento variable, de lo cual se deduce

www.elsolucionario.org

que el campo magnético que aparece también varía según el tiempo. De esta manera, rigurosamente hablando, el espacio ocupado por el campo eléctrico variable, al mismo tiempo está ocupado por un campo magnético variable.

De los razonamientos ulteriores se ve que el campo magnético variable también crea, a su vez, un campo eléctrico.

Sea un campo magnético variable caracterizado por el vector de inducción **B** y su derivada respecto al tiempo $d\mathbf{B}/dt$, que llamaremos $\dot{\mathbf{B}}$. Supongamos que en este campo hay un contorno cerrado conductor e inmóvil. Debido a la variación del vector de inducción magnética **B**, el flujo de inducción magnética Φ a través de la superficie limitada por este contorno, variará, y en el contorno se creará una f. e. m. de inducción $\mathscr{E}_i$. La magnitud de esta f. e. m. $\mathscr{E}_i$, según la ley de Faraday, es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo de inducción magnética $d\Phi/dt$, es decir, en nuestro caso (en que el contorno está inmóvil) se determina por la derivada respecto al tiempo del vector de inducción $\dot{\mathbf{B}}$. La creación de la f. e. m. en el conductor indica que ha aparecido en él una fuerza eléctrica que obliga a las cargas libres del conductor a desplazarse en un sentido determinado. Por consiguiente llegamos a la conclusión de que la presencia de un campo magnético variable con el tiempo origina la aparición de una fuerza eléctrica en la región donde se halla el conductor. Maxwell, generalizando este resultado, enunció que *el campo eléctrico aparece en todos los puntos del espacio en que haya un campo magnético que varíe con el tiempo, independientemente de que haya o no conductores.* Según el concepto de Maxwell, el conductor en que aparece una f. e. m. sólo es el instrumento en que se revelan las fuerzas eléctricas.

Así, pues, se puede resumir diciendo que *cualquier campo magnético que varíe con el tiempo está relacionado con la presencia de un campo eléctrico.*

El campo magnético constante, es decir, el campo de corrientes continuas que fluyen por conductores inmóviles unos respecto de otros, o el campo de imanes permanentes inmóviles unos respecto de otros, actúa solamente sobre las corrientes o sobre los imanes: no actúa de ninguna manera sobre las cargas eléctricas inmóviles. Pero si el campo magnético varía con el tiempo, junto a las acciones magnéticas aparecen acciones eléctricas.

Prácticamente siempre se tienen campos magnéticos variables en que además del vector de inducción magnética **B**, es variable también su derivada respecto al tiempo $\dot{\mathbf{B}}$. Pero en este caso aparecerá también un campo eléctrico variable. De aquí que, en general, el espacio ocupado por un campo magnético variable, al mismo tiempo está ocupado por un campo eléctrico variable.

Ambos campos variables, el eléctrico y el magnético, están invariablemente relacionados entre sí y forman el *campo electromagnético*.

El campo electromagnético tiene carácter *turbulento* (*turbillonario*). Se dice que el campo de un vector cualquiera **A** es turbulento, si en él hay dos puntos infinitamente próximos en los cuales el vector **A** tiene sentidos opuestos. Por ejemplo, al formarse torbellinos en un líquido o en un gas, en las proximidades del eje del torbellino, por los lados opuestos del eje, el movimiento se efectúa en sentidos opuestos.

Veamos primeramente el carácter turbulento del campo magnético. El campo magnético creado por la corriente de desplazamiento se calcula por las mismas fórmulas por que se ha calculado el campo

Fig. 340. Creación de las líneas concéntricas circulares de excitación magnética alrededor del vector de densidad de la corriente de desplazamiento i_d (*a*) y de la intensidad del campo eléctrico alrededor del vector $\dot{\mathbf{B}}$ (*b*).

magnético de la corriente de conducción (§ 193) sustituyendo solamente en ellas la densidad de la corriente de conducción por la densidad de la corriente de desplazamiento. En el campo magnético de las corrientes de desplazamiento, las líneas de la excitación magnética tienen el mismo aspecto que las de las proximidades de las corrientes análogas de conducción, es decir, siempre son cerradas y comprenden las líneas de la corriente. Supongamos que en cierto punto, el vector de densidad de la corriente de desplazamiento se representa por el vector $\mathbf{i}_d$ (fig. 340). Las líneas del campo magnético en las proximidades de $\mathbf{i}_d$ formarán circunferencias concéntricas, cuyos radios serán tanto menores, cuanto más próximas se hallen de $\mathbf{i}_d$. Si en el límite pasamos a los puntos infinitamente próximos al vector $\mathbf{i}_d$, la curvatura de las líneas de la excitación magnética será infinitamente grande y, por consiguiente, siempre se podrán hallar dos puntos de estos infinitamente próximos, en los cuales la excitación magnética tiene sentido opuesto.

El campo eléctrico creado por un campo magnético variable también es de carácter turbulento. Supongamos que en cierto punto,

la variación del vector de inducción magnética con el tiempo se representa por el vector $\dot{\mathbf{B}}$ (fig. 340, *b*). Si rodeamos el vector $\dot{\mathbf{B}}$ por un contorno conductor, cuyo plano sea perpendicular al vector $\dot{\mathbf{B}}$, la f. e. m. de inducción que se crea en este contorno, según la regla de Lenz, irá dirigida como indican las flechas de líneas de puntos de la fig. 340. En cada punto dado, la f. e. m. será perpendicular a la normal trazada desde el punto al vector $\dot{\mathbf{B}}$. Según lo dicho, la aparición de la f. e. m. de inducción es debida a la existencia de un campo eléctrico, cuya intensidad $\mathbf{E}$ en cada punto tiene el mismo sentido que la f. e. m. Por consiguiente, las líneas de la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$ forman alrededor del vector $\dot{\mathbf{B}}$ circunferencias concéntricas. Para los puntos infinitamente próximos al vector $\dot{\mathbf{B}}$, la curvatura de las circunferencias será infinitamente grande y, por lo tanto, habrá pares de puntos vecinos de esta clase en los que los vectores de intensidad eléctrica sean de sentido opuesto. Así tenemos que *el campo eléctrico creado por un campo magnético variable, tendrá carácter turbulento.* Sus líneas de intensidad serán siempre cerradas. Con ello se diferencia esencialmente del campo electrostático de las cargas inmóviles, cuyas líneas de intensidad, como se ha indicado varias veces, no son cerradas: empiezan en unas cargas y terminan en otras. De esta manera, el campo eléctrico puede ser tanto potencial (electrostático), como turbulento (electromagnético). El campo magnético siempre tiene carácter turbulento.

En el § 129 se ha demostrado que la expresión matemática del carácter potencial del campo electrostático es

$$\oint E_l dl = 0, \tag{1}$$

donde la integral se extiende por el contorno cerrado.

El carácter turbulento del campo magnético se expresa por la ecuación del § 198:

$$\oint H_l dl = 4\pi I. \tag{2}$$

A esta ecuación se le puede dar otra forma algo distinta. La magnitud I es la intensidad de la corriente que fluye a través de la superficie S abarcada por el contorno, a lo largo del cual se toma la integral $\oint H_l dl$. Si llamamos i_n a la componente de la densidad de la corriente normal a la superficie S, está claro que I puede ser representada de la manera siguiente:

$$I = \int_S i_n \, dS.$$

donde la integral se extiende a toda la superficie S. Teniendo esto en

www.elsolucionario.org

cuenta, la ecuación (2) adquiere la forma:

$$\oint H_l dl = 4\pi \int_S i_n dS. \tag{2a}$$

En el caso general, según la hipótesis de Maxwell, en el término de la derecha de la (2a) debe estar la densidad total de la corriente, que se compone de la densidad de la corriente de conducción $\mathbf{i}$ y de la densidad de la corriente de desplazamiento $\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}$, de donde, definitivamente tenemos que

$$\oint H_l dl = \int_S (4\pi i_n + \dot{D}_n)\, dS. \tag{3}$$

Si la integral $\oint H_l dl$ se toma según el contorno que abarca a la superficie, a través de la cual no es igual a cero la corriente total, la integral de la derecha de la ecuación (3) no es igual a cero y, por consiguiente,

$$\oint H_l dl \neq 0,$$

que es lo mismo que afirmar que el campo magnético es de carácter turbulento. (Si en cierta parte del espacio, la corriente total es igual a cero, en esta parte del espacio el campo magnético se puede caracterizar por un potencial).

Demostremos que una relación análoga tiene lugar en el campo eléctrico turbulento. Efectivamente, supongamos que en una zona del campo magnético variable hay un contorno conductor cerrado. Según la ley de inducción de Faraday, en este contorno se creará una f. e. m. de inducción:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

donde Φ es el flujo de inducción magnética a través de la superficie S limitada por el contorno. Llamando B_n a la componente del vector de inducción magnética normal a la superficie S, obtenemos que

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

de donde

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\int_S B_n dS = -\int_S \dot{B}_n dS, \tag{4}$$

donde $\dot{B}_n$ es la derivada de B_n respecto al tiempo, y la integral se extiende a toda la superficie S.

Según lo arriba dicho, la f. e. m. puede ser representada como la circulación de la intensidad del campo, es decir, la f. e. m. $\mathcal{E}_i$ es

$$\mathcal{E}_i = \oint E_l dl,$$

donde la integral se extiende a todo el contorno que se examina.

Por consiguiente, la ecuación (4) se puede escribir:

$$\oint E_l dS = -\int_S \dot{B}_n dS. \tag{5}$$

Según la hipótesis de Maxwell explicada en el texto fundamental de este párrafo, la ecuacion (5) se cumple independientemente de que haya o no un con-

torno conductor en el campo magnético variable que examinamos; en este último caso, la integral de la izquierda de la ecuación (5) se toma según un contorno cerrado imaginario cualquiera.

La ecuación (5) es análoga a la (3) y expresa el carácter turbulento del campo eléctrico creado debido a la existencia de un campo magnético variable. Si no hay campo magnético, o si es uniforme, $\dot{B}_n=0$, la ecuación (5) se transforma en la (1); en este caso el campo eléctrico E puede crearse sólo si hay cargas eléctricas inmóviles y de magnitud invariable, en cuyo caso el campo es potencial.

§ 244. Ecuaciones de Maxwell. El cálculo exacto de los campos electromagnéticos se efectúa con ayuda de las ecuaciones propuestas por Maxwell y que se basan en los conceptos indicados de la naturaleza de los fenómenos electromagnéticos. Las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales que relacionan entre sí las derivadas respecto a las coordenadas y al tiempo de las magnitudes que caracterizan el campo electromagnético. Nosotros examinaremos un cálculo simplificado de las ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell se dividen en dos sistemas. El primer sistema relaciona las derivadas espaciales de las proyecciones del vector de excitación magnética con las proyecciones de las densidades de las corrientes de desplazamiento y de conducción. El segundo sistema de ecuaciones de Maxwell relaciona las derivadas espaciales de las proyecciones del vector de intensidad del campo eléctrico con las derivadas temporales de las proyecciones del vector de inducción magnética.

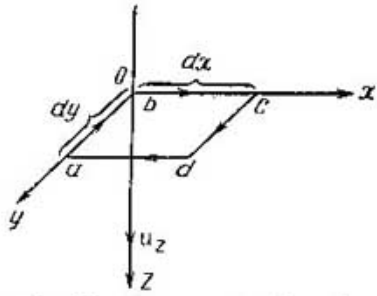


Fig. 341. Representación gráfica para determinar el primer sistema de ecuaciones de Maxwell.

Hallemos primeramente el primer sistema de ecuaciones de Maxwell. Sea **u** el vector de la densidad de la corriente total en cierto instante de tiempo y en una pequeña región del espacio. Esta densidad se compondrá de la densidad de la corriente de conducción **i** y de la densidad de la corriente de desplazamiento $\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}$, de donde,

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}+\frac{1}{4\pi}\dot{\mathbf{D}}. \qquad (1)$$

Según la hipótesis de Maxwell, las dos corrientes, de conducción y de desplazamiento, desempeñan la misma función en la creación del campo magnético. Para determinar el campo magnético creado por estas corrientes veamos primeramente la proyección del vector **u** sobre el eje *OZ* (fig. 341). Como la excitación magnética creada por la corriente siempre es perpendicular a la dirección de la corriente (véase el § 192), la proyección de la densidad de la corriente u_z estará relacionada solamente con las proyecciones H_x y H_y de la excitación magnética.

Sea un pequeño contorno rectangular *abcd* de lados *dx* y *dy* en el plano *OXY*. Calculemos la circulación **H** en este contorno. En el lado *ab* tenemos que

$$A_{ab}=-H_y dy,$$

donde H_y es la proyección de la excitación magnética **H** determinada para el lugar donde está el lado *ab*. El signo menos indica que el desplazamiento se realiza en el sentido negativo del eje *OY*.

En el lado *bc* tenemos que

$$A_{bc}=H_x dx,$$

donde H_x es la magnitud de la proyección H_x en el lugar en que se halla el lado *bc*.

En el caso de un campo magnético variable, el valor de la excitación H en el lugar en que se halla el lado cd, es diferente del correspondiente a la región donde se halla el lado ab. Llamémosle H', de donde en el lado cd obtenemos que

$$A_{cd} = H'_y dy.$$

Es evidente que el incremento de la proyección H_y en la distancia entre los lados ab y cd se puede representar como $\frac{\partial H_y}{\partial x} dx$, de donde $H'_y = H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx$ y, por consiguiente,

$$A_{cd} = \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dy.$$

De la misma manera obtenemos para da:

$$A_{da} = -\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

La circulación total por el contorno cerrado $abcd$ es igual a la suma:

$$A = -H_y dy + H_x dx + \left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \right) dx - \left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \right) dx.$$

Abriendo paréntesis y reduciendo hallamos que

$$A = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{2}$$

Por otro lado, la circulación debe ser igual numéricamente a la intensidad de la corriente que fluye por la superficie $abcd$ según el sentido del eje OZ, multiplicada por 4π (véase el § 198), es decir,

$$A = 4\pi I_z.$$

Considerando constante la proyección de la densidad u_z de la corriente dentro de los límites de la superficie $abcd$, tenemos que

$$I_z = u_z\, dx\, dy, \text{ de donde } A = 4\pi u_z\, dx\, dy.$$

Según la ecuación (1), podemos sustituir u_z por la suma de las densidades de las corrientes de conducción y de desplazamiento $i_z + \frac{1}{4\pi} \dot{D}_z$, de donde para A hallamos que

$$A = (4\pi i_z + \dot{D}_z)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Comparando las ecuaciones (2) y (3) obtenemos que

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi i_z + \dot{D}_z.$$

Ecuaciones completamente análogas se obtienen para las otras dos componentes de la densidad de la corriente total u_x y u_z, de donde todo el *primer sistema de ecuaciones de Maxwell* será:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi i_x + \dot{D}_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= 4\pi i_y + \dot{D}_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 4\pi i_z + \dot{D}_z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

www.elsolucionario.org

Así, pues, el primer sistema de ecuaciones de Maxwell determina la relación entre la densidad de la corriente de conducción i, la derivada respecto al tiempo de la inducción D del campo eléctrico y las derivadas respecto al espacio de la excitación del campo magnético H creado por las corrientes.

El sistema (4) de ecuaciones es justo, si todas las magnitudes que entran en el mismo se miden en el mismo sistema de unidades, por ejemplo, en el sistema electromagnético. Si la excitación magnética H se mide en el sistema *CGSM* de unidades, y las magnitudes i y D, en el sistema *CGSE* de unidades, en la parte de la derecha habrá que introducir el factor $1/c$, que corresponde al paso de las unidades electrostáticas a las unidades electromagnéticas. Entonces las ecuaciones de Maxwell tendrán la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}&=\frac{4\pi}{c}i_x+\frac{1}{c}\dot{D}_x,\\ \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}&=\frac{4\pi}{c}i_y+\frac{1}{c}\dot{D}_y,\\ \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}&=\frac{4\pi}{c}i_z+\frac{1}{c}\dot{D}_z \end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

Al primer sistema de ecuaciones de Maxwell hay que añadir la ecuación que relacione el vector de inducción eléctrica D con la distribución de la densidad de las cargas eléctricas libres ρ. Según lo dicho en el § 144, esta ecuación tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=4\pi\rho. \qquad (5)$$

Obsérvese que el vector de inducción eléctrica D está relacionado con la intensidad del campo eléctrico mediante la ecuación $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$. La permeabilidad magnética del medio μ no entra en el primer sistema de ecuaciones de Maxwell, ya que la excitación magnética del campo creado por las corrientes no depende (en los cuerpos magnéticos uniformes que llenan por completo el espacio, donde el campo es diferente de cero) de la permeabilidad magnética del medio (véase lo dicho en el § 202).

Como se sabe del cálculo vectorial, las expresiones de la izquierda de las ecuaciones (4) o (4a) de Maxwell son componentes de la "rotación" del vector H; por lo tanto, en la forma vectorial, el primer sistema de ecuaciones de Maxwell se puede escribir así:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{i}+\frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}. \qquad (4b)$$

A esta ecuación se añade la (5) en forma vectorial:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho. \qquad (5a)$$

El segundo sistema de ecuaciones de Maxwell se obtiene utilizando la generalización de la ley de inducción de Faraday dada por Maxwell. Como se ha indicado en la pág 527 según la generalización de Maxwell, las fuerzas eléctricas aparecen al variar el vector de inducción magnética B independientemente de que haya o no un contorno conductor. La circulación de E por un contorno cerrado es igual numéricamente a la variación con el tiempo del flujo de inducción magnética a través de la superficie limitada por el contorno [fórmula (5) del § 243]. Calculemos esta circulación para un cuadro rectangular cerrado, análogo al considerado al determinar el primer sistema de ecuaciones de Maxwell.

Sea $\dot{\mathbf{B}}$ el vector que caracteriza, en un instante de tiempo, la variación del campo magnético en cierta región pequeña del espacio. Para determinar el campo

eléctrico creado por este campo magnético variable, veamos primeramente la proyección del vector $\dot{\mathbf{B}}$ sobre el eje OZ (fig. 342).

Como la magnitud de la f. e. m. inducida se determina por la variación de la componente del vector de inducción magnética normal a la superficie del contorno dado, la proyección $\dot{B}_z$ estará relacionada solamente con las proyecciones E_x y E_y de la intensidad del campo eléctrico.

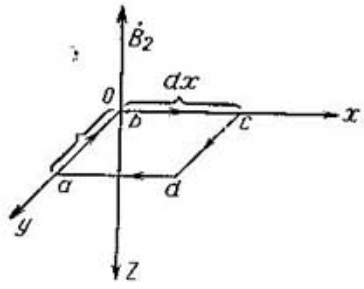


Fig. 342. Representación gráfica para determinar el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell.

Sea un pequeño contorno rectangular y cerrado $abcd$ en el plano OXY y de lados dx y dy. Calculemos la circulación de E según este contorno:

$$A_{ab} = -E_y\, d_y,$$

donde E_y es la proyección de la intensidad del campo eléctrico E del lugar en que se halla el sector ab. El signo menos indica que el desplazamiento se efectúa en sentido contrario al del eje OY.

En el sector bc, de manera análoga, hallamos que

$$A_{bc} = E_x dx.$$

Razonando análogamente a como se ha hecho al calcular la circulación de la excitación magnética cuando se ha determinado el primer sistema de eccuaciones de Maxwell, obtenemos para los sectores cb y da, respectivamente:

$$A_{cd} = \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx\right) dy, \quad A_{da} = -\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} dy\right) dx.$$

De aquí que la circulación total por todo el contorno cerrado $abcda$, sea

$$A = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{6}$$

Por otro lado, la circulación es igual a la derivada con respecto al tiempo del flujo de inducción magnética que atraviesa el contorno $abcda$, con signo negativo:

$$A = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Pero como el flujo Φ a través del contorno $abcda$ es igual a $B_z\, dx\, dy$, tenemos que

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\dot{B}_z dx\, dy. \tag{7}$$

Igualando las ecuaciones (6) y (7) obtenemos que

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\dot{B}_z.$$

De manera análoga se obtiene la ecuación con las otras dos componentes de la derivada respecto al tiempo $\dot{B}_x$ y $\dot{B}_u$ del vector de inducción magnética. En defi-

nitiva, el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell es

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\dot{B}_x,\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\dot{B}_y,\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\dot{B}_z, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Así, pues, el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell establece la relación entre la derivada respecto al tiempo del vector de inducción magnética **B** y las derivadas respecto al espacio de la intensidad del campo eléctrico **E** creado por la variación del campo magnético.

El sistema (8) de ecuaciones es justo si todas sus magnitudes se miden en el sistema *CGSM*. Si la intensidad del campo eléctrico E se mide en el sistema *CGSE* de unidades y la inducción magnética B, en el sistema *CGSM* de unidades, a la derecha habrá que introducir el factor $1/c$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\frac{1}{c}\dot{B}_x,\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\frac{1}{c}\dot{B}_y,\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\frac{1}{c}\dot{B}_z. \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

Al segundo sistema de ecuaciones de Maxwell hay que añadir la ecuación correspondiente a que las líneas del vector de inducción son siempre cerradas. Esta ecuación, según lo dicho en el § 200, es

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0. \tag{9}$$

En la forma vectorial, el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell (8a) y la ecuación (9) adquieren la forma:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}, \tag{8b}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \tag{9a}$$

Los sistemas primero y segundo de las ecuaciones de Maxwell deben resolverse juntamente. El primer sistema de ecuaciones permite determinar, dadas las densidades i de las corrientes y las densidades volumétricas de las cargas eléctricas ρ, el campo magnético creado por ellas. El segundo sistema permite determinar el campo eléctrico turbulento creado por el campo magnético variable con el tiempo. En este caso hay que tener en cuenta que la relación entre los vectores **H** y **B** se determina por la ecuación:

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H},$$

donde μ es la permeabilidad magnética del medio; y la relación entre los vectores **E** y **D** se determina mediante la ecuación:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},$$

donde ε es la constante dieléctrica.

www.elsolucionario.org

En el caso en que el medio no sea homogéneo, en las líneas divisorias de las diferentes zonas del medio deben satisfacerse las condiciones límites obtenidas para el vector D en el § 144, y para el vector B en el § 206:

$$D_{1n}=D_{2n},\quad \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}=\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2},\quad B_{1n}=B_{2n},\quad \frac{B_{1t}}{\mu_1}=\frac{B_{2t}}{\mu_2};$$

donde los subíndices n y t indican que se toma la componente normal o tangencial del vector correspondiente.

Por último, si el medio es conductor, la densidad de la corriente de conducción **i** satisface la ley de Ohm:

$$\mathbf{i}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}'),$$

donde σ es la conductibilidad del medio, y $\mathbf{E}'$, la intensidad del campo creado por generadores exteriores.

§ 245. Ecuaciones de Maxwell — Lorentz. En la teoría de Maxwell, las propiedades de la sustancia se caracterizan mediante tres constantes: constante dieléctrica ε, permeabilidad magnética μ y conductibilidad σ. Como no hay cargas magnéticas, no puede haber analogía magnética de la conductibilidad de la sustancia. Las cargas eléctricas vienen determinadas por la densidad de su distribución.

El campo electromagnético es originado por la presencia de estas cargas y sus movimientos. Así tenemos que la teoría de Maxwell no examina la estructura atómica de la sustancia y describe formalmente su influencia sobre el campo electromagnético mediante las constantes ε, μ y σ. La estructura de la sustancia la tuvo en cuenta Lorentz en la teoría electrónica. Del punto de vista de la teoría de Lorentz, el espacio ocupado por la sustancia se diferencia del espacio vacío en que lleva incrustadas cargas elementales positivas y negativas por separado. Las cargas elementales negativas son los electrones, y las positivas, los núcleos de los átomos. Los electrones junto con los núcleos forman átomos neutros o iones. Los átomos y los iones pueden formar parte de las moléculas. Los electrones, en el interior de los átomos o de las moléculas, se mueven según órbitas cerradas y pueden también desplazarse en el interior de los átomos o de las moléculas, causando su polarización. En los conductores, parte de los electrones se halla en estado libre y, al desplazarse, crea la corriente de conducción. Los campos eléctrico y magnético son originados por estas cargas y por sus movimientos.

Debido a la dimensión microscópica de las cargas, los campos varían notablemente de un punto a otro a distancias comparables con las dimensiones de los átomos. Así, en las proximidades de un electrón o ion aislado, el campo eléctrico es muy intenso, mientras que en la parte media de la distancia entre dos electrones vecinos puede ser igual a cero. De esta manera, los campos eléctrico y magnético examinados en la teoría de Lorentz son de carácter microscópico. Llamemos **e** y **h** respectivamente la intensidad y excitación magnética de estos campos para diferenciarlas de las magnitudes macroscópicas medias que figuran en la teoría de Maxwell. Estos campos tienen lugar en el espacio entre dos cargas independientes, es decir, la teoría de Lorentz examina de hecho solamente el campo en el vacío. Por eso, en la teoría de Lorentz se analiza solamente un par de vectores: la intensidad del campo eléctrico **e** y la excitación **h** del campo magnético, en lugar de dos pares de vectores **E**, **B**, **H** y **D**, que entran en las ecuaciones de Maxwell.

Cualquier corriente eléctrica, según la teoría electrónica de Lorentz, es una corriente de convección debido al movimiento de las cargas elementales. La densidad de esta corriente es igual a $\Sigma\rho\mathbf{v}$, donde $\rho\mathbf{v}$ es la corriente creada por una carga elemental, y la suma se extiende a todas las cargas elementales (ρ es la densidad de una carga, que es igual a cero fuera de la propia carga, y $\mathbf{v}$, su vector de velocidad).

De esta manera tenemos que para el espacio vacío entre las cargas, las ecuaciones de Maxwell serán:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \Sigma \rho \mathbf{v} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi \Sigma \rho, \tag{2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \tag{4}$$

En esta forma, las ecuaciones se denominan *ecuaciones de Maxwell-Lorentz*.

Los vectores e y h que entran en las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, no se pueden medir directamente, ya que no se pueden medir las intensidades ni las excitaciones de los campos entre los átomos y en el interior de los propios átomos o moléculas. Por eso, para pasar a magnitudes que se puedan medir, hay que considerar el valor medio de las magnitudes que entran en las ecuaciones (1)—(4). La intensidad e y excitación h medias, las densidades de las cargas $\Sigma\rho$ y la corriente $\Sigma\rho\mathbf{v}$, hay que tomarlas para volúmenes grandes en comparación con los átomos independientes; pero que sean lo suficientemente pequeñas, para que todas las magnitudes macroscópicas no varíen notablemente dentro de sus límites. Este valor medio hay que considerarlo para intervalos de tiempo grandes en comparación con el período de los movimientos intraatómicos; pero lo suficientemente pequeños, para que las magnitudes macroscópicas no varíen notablemente en estos intervalos de tiempo.

Llamemos $\overline{\mathbf{e}}$, $\overline{\mathbf{h}}$, $\overline{\Sigma\rho}$ y $\overline{\Sigma\rho\mathbf{v}}$ respectivamente a estas magnitudes medias. En este caso, las ecuaciones de Maxwell-Lorentz serán

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{h}} = \frac{4\pi}{c} \overline{\Sigma\rho\mathbf{v}} = \frac{1}{c} \dot{\overline{\mathbf{e}}}, \tag{1a}$$

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{e}} = 4\pi \overline{\Sigma\rho}, \tag{2a}$$

$$\operatorname{rot} \overline{\mathbf{e}} = -\frac{1}{c} \dot{\overline{\mathbf{h}}}, \tag{3a}$$

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{h}} = 0. \tag{4a}$$

Estas ecuaciones deben coincidir con las de Maxwell.

Es fácil ver que las ecuaciones (3a) y (4a) coinciden con el segundo sistema de ecuaciones de Maxwell [(8b) y (9a) del § 244], si se considera que

$$\mathbf{E} = \overline{\mathbf{e}}, \quad \mathbf{B} = \overline{\mathbf{h}}.$$

De aquí, según lo dicho en los §§ 145 y 208, se obtiene que *la intensidad macroscópica del campo eléctrico* **E** *es la intensidad microscópica media del campo* $\overline{\mathbf{e}}$, *y la inducción magnética* **B** *es la excitación microscópica media* $\overline{\mathbf{h}}$ *del campo magnético*. Esto corresponde a la circunstancia arriba indicada de que, cuando hay un dieléctrico, la intensidad del campo eléctrico E viene determinada tanto por las cargas "exteriores" introducidas en el medio dieléctrico, como por la polarización del propio medio; si hay un cuerpo magnético, la inducción magnética B viene determinada tanto por las corrientes, como por la "magnetización" del medio. De esto se deduce otra vez la analogía entre la intensidad del campo eléctrico E y la inducción magnética B.

No obstante, en esta comparación de los vectores $\overline{\mathbf{e}}$ y $\overline{\mathbf{h}}$ con los E y B puede parecer que las ecuaciones (1a) y (2a) no corresponden al primer sistema de ecuaciones de Maxwell. Pero un análisis más profundo demuestra que en este caso hay coincidencia. Para ello, primeramente hay que tener en cuenta que el vector $\overline{\Sigma\rho\mathbf{v}}$ estima no solamente el transporte de cargas libres que originan la

aparición de la densidad de la corriente de conducción i, sino también los movimientos intraatómicos de las cargas y la variación con el tiempo de la polarización de los átomos y de las moléculas. En segundo lugar, la densidad macroscópica de las cargas libres ρ no coincide con la densidad media de las cargas elementales $\overline{\Sigma\rho}$ ya que en aquélla no entra la parte $\overline{\Sigma\rho}$ que consiste en la polarización del dieléctrico.

§ 246. Ondas electromagnéticas. Como se ha visto, la formación de los campos eléctrico o magnético variables acarrea la aparición de los correspondientes campos turbulentos magnético o eléctrico. Si este campo electromagnético se crea en una región limitada de espacio, se propaga, como enseña la experiencia, por el resto de espacio a una velocidad finita. Esta velocidad es muy grande y en el vacío coincide con la de la luz ($3 \cdot 10^{10}$ cm/seg). En los casos en que *el campo electromagnético creado es de carácter periódico, la propagación de este campo es ondulatoria.* El carácter ondulatorio de la propagación del campo electromagnético se deduce de la teoría general de los fenómenos electromagnéticos de Maxwell enunciada en 1863. Hertz en 1888, fue el primero en estudiar experimentalmente las ondas electromagnéticas.

Examinemos el proceso de formación de ondas electromagnéticas primeramente según el esquema teórico más simple, y después indicando los métodos técnicos de su realización. Supongamos que tenemos un circuito en el cual, de una manera u otra, se mantienen oscilaciones eléctricas. Sean C la capacidad y L el coeficiente de autoinducción que caracterizan a este circuito. Si las oscilaciones del circuito se producen con un período T igual al período de las oscilaciones propias, la magnitud de este período viene determinada por la fórmula (2) del § 239:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Debido a estas oscilaciones, en la región del circuito se crean campos variables eléctrico y magnético. Por ejemplo, si se examina el espacio entre las armaduras de un condensador, en este espacio variarán periódicamente, con un período T, la intensidad del campo eléctrico y la magnitud de la corriente de desplazamiento, debido a la cual se creará un campo magnético turbulento y variable con el tiempo. Para que la propagación de las ondas electromagnéticas desempeñe una función perceptible, o, como se dice, para que el sistema realice radiaciones sensibles, hay que crear las condiciones para que la región en que aparece la corriente de desplazamiento y donde el vector $\mathbf{B}$ es diferente de cero, esté lo menos aislada posible del espacio que lo rodea. Si se toma un condensador plano con una pequeña distancia entre las armaduras, con una autoinducción en forma de solenoide (fig. 343, *a*) y con espiras estrechamente situadas, el campo estará prácticamente casi por completo con-

www.elsolucionario.org

centrado entre las armaduras y en el interior del solenoide. Para que aumente la radiación hay que aumentar la distancia entre las armaduras del condensador y construir la parte del circuito con autoinducción no en forma de bobina, sino en forma de un circuito

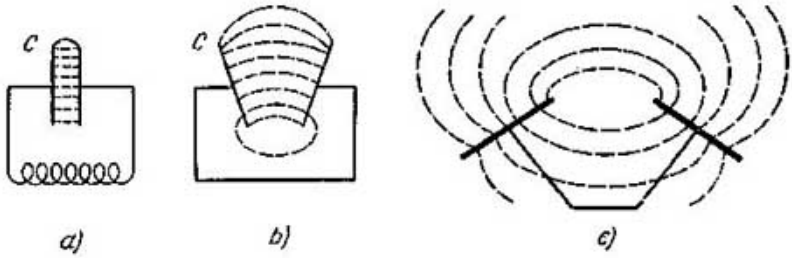


Fig. 343. Circuitos oscilantes de diferente grado de abertura.

más abierto. Aumentando la distancia entre las armaduras y sustituyendo el solenoide por un conductor rectilíneo, se obtiene un circuito del tipo representado en las fig. 343, *b* y *c*. Está claro que la capacidad y la autoinducción en esta variante de contorno serán mucho menores que en el esquema inicial y, por consiguiente, el

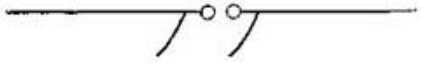


Fig. 344. Circuito oscilante formado por dos varillas con espacio disruptivo.

período de las oscilaciones propias también será menor que en el esquema inicial. Las oscilaciones en esta clase de circuitos se mantienen suministrando energía a las armaduras del condensador de cualquier generador de f. e. m. alterna. Para aumentar la diferencia de potencial inicial de carga de las armaduras, se puede hacer una interrupción en el conductor que une las armaduras del condensador. Este espacio interruptor se denomina distancia disruptiva. Gracias a la distancia disruptiva el circuito resulta interrumpido hasta el instante en que la diferencia de potencial de ambas partes del circuito alcance el valor del potencial de disrupción. Cuando se produce la descarga, en la distancia disruptiva salta una chispa que une ambas partes formando un circuito conductor, en el cual se forman las oscilaciones eléctricas. Se puede prescindir por completo de las armaduras del condensador y hacer el sistema oscilante de dos varillas metálicas separadas por la distancia disruptiva (fig. 344). Este sistema oscilante se denomina *dipolo*. La eliminación de las armaduras acarrea una disminución excesiva de la capacidad.

Para aumentar la capacidad, las varillas que forman el sistema oscilante, se pueden abastecer, en los extremos del espacio disruptivo, de esferas. Un circuito oscilante de esta clase utilizó Hertz en sus experimentos. En la fig. 345 se representa el circuito oscilante de Hertz denominado *oscilador de Hertz*. En el oscilador de Hertz, las oscilaciones se excitan uniéndolo al secundario de una bobina de inducción. En este caso, el proceso oscilatorio lleva el siguiente carácter: Cuando la diferencia de potencial alcanza una magnitud considerable y en el espacio disruptivo salta la chispa, en el oscilador

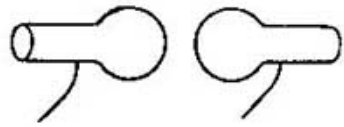


Fig. 345. Oscilador de Hertz.

se crean oscilaciones amortiguadas, cuyo período viene determinado por la capacidad y la autoinducción del oscilador. Después de cargar y descargar varias veces ambas partes del oscilador, las oscilaciones se amortiguan debido a que la energía adquirida por el oscilador al cargarlo se invierte en la radiación y en el calor de Lenz-Joule. Después de ello, el inductor carga de nuevo al oscilador y el proceso se repite. El período de carga del oscilador por el inductor se determina por el período de funcionamiento del interruptor del inductor; este período es mucho mayor que el de oscilación del oscilador. Durante la oscilación, en el propio dipolo fluye una corriente de alta frecuencia (en los experimentos de Hertz, la frecuencia era del orden de 10^8 Hz), la cual se refleja en los extremos del dipolo y cambia el sentido que tenía, en el opuesto: en el dipolo se produce una interferencia de la onda móvil (progresiva) y de la reflejada (inversa), debido a lo cual se forman ondas estacionarias. Esto significa que la amplitud de la corriente en distintos lugares del dipolo tiene diferentes valores, y en los extremos del dipolo la intensidad de la corriente forma el nodo, y en el centro, el vientre. De esta manera, en las distintas secciones del conductor del dipolo oscilante, la intensidad de la corriente en un mismo instante de tiempo tiene diferentes valores. Esto es un ejemplo de proceso "no cuasiestacionario". Según la teoría de Maxwell, la corriente total, es decir, el conjunto de la corriente de conducción y de la de desplazamiento, permanece la misma en todas las secciones del dipolo. De esto se deduce que en los lugares en que la corriente de conducción es igual a cero, la corriente de desplazamiento tiene el valor máximo. En el proceso periódico, la amplitud de la corriente de desplazamiento es máxima

en los lugares donde el valor de la amplitud de la intensidad eléctrica es máximo.

De esta manera tenemos que la amplitud de la intensidad eléctrica es máxima en los puntos donde la amplitud de la corriente de conducción es igual a cero. Los vientres de la intensidad eléctrica están en los extremos del dipolo, el nodo, en el centro.

La distribución de las amplitudes de la intensidad de la corriente y de las amplitudes de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del dipolo se representa en la fig. 346.

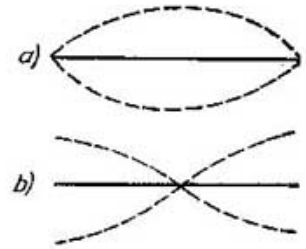


Fig. 346. Distribución de la amplitud de la intensidad de la corriente (*a*) y de la amplitud de la intensidad del campo eléctrico (*b*) a lo largo de un dipolo.

Examinemos el carácter del campo electromagnético creado en el espacio que rodea al dipolo.

Esquemáticamente, el dipolo se puede representar en forma de dos cargas iguales y de signo contrario, $+q$ y $-q$, cuya distancia l entre ellas varía periódicamente. Como se ha visto (en el § 125), el campo eléctrico de un dipolo invariable se caracteriza por las líneas de intensidad del campo, que salen de una carga y van a parar a la otra.

No sucede lo mismo, hablando en general, si las cargas que forman el dipolo, se mueven. Esto es debido a que el campo se propaga por el espacio a una velocidad finita y, por consiguiente, el valor de la intensidad del campo E en un punto cualquiera alejado del dipolo, en un instante determinado de tiempo corresponde a la disposición de las cargas del dipolo en un instante de tiempo anterior.

Aclaremos esto gráficamente. Partamos del estado cuando las cargas $+q$ y $-q$ que forman el dipolo, se hallan a una distancia l (fig. 347, *a*), y examinemos una línea cualquiera de intensidad del campo, por ejemplo, la línea *abc*. A medida que se aproximen las cargas, la línea de intensidad del campo variará de forma, ya que, por ejemplo, en el punto *b*, el valor de la intensidad E no corresponde a la posición dada de las cargas, sino a la posición que tenían en un instante de tiempo anterior. La línea adquiere la forma representada en la fig. 347, *b*. Cuando ambas cargas coinciden, la línea de intensidad del campo tendrá la forma de lazo (fig. 347, *c*). Durante el movimiento ulterior de las cargas, en el campo se forma una línea cerrada de la intensidad del campo *abcb'* (fig. 347, *d*). De esta manera, el campo eléctrico creado será de carácter turbulento.

La formación de las líneas cerradas del campo eléctrico variable acarrea, según la hipótesis de Maxwell, la creación de las líneas cerradas del campo magnético variable. Estas últimas, a su vez,

www.elsolucionario.org

originan la formación de líneas cerradas de la intensidad del campo eléctrico, y así sucesivamente. Alrededor del dipolo oscilante se forma una onda electromagnética.

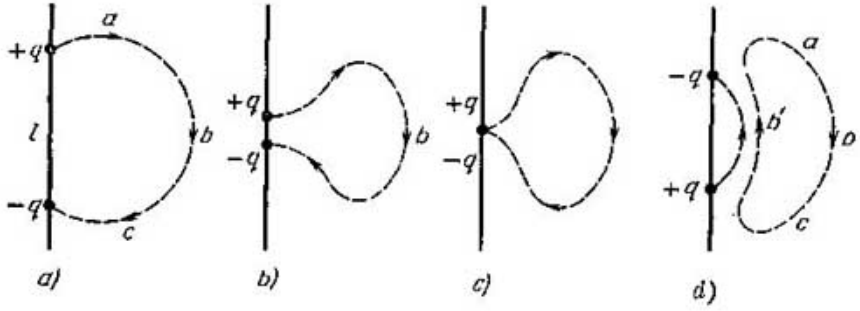


Fig. 347. Líneas de intensidad del campo en las proximidades del dipolo en distintos momentos.

En la fig. 348 se representa la distribución de las líneas de la intensidad del campo eléctrico alrededor del dipolo de Hertz en un instante dado de tiempo.

La dirección y la magnitud relativa de la intensidad del campo eléctrico y excitación del campo magnético en la onda que se crea en las proximidades del dipolo, se puede calcular; pero también se puede determinar experimentalmente.

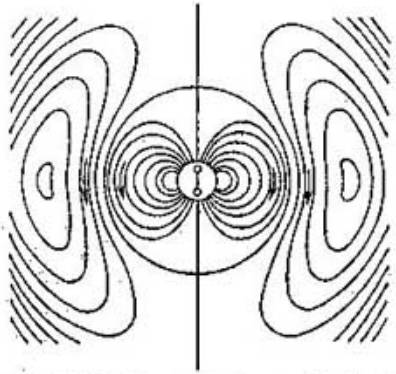


Fig. 348. Líneas de intensidad del campo en las proximidades del dipolo.

El campo eléctrico se puede investigar colocando en diferentes lugares un "resonador eléctrico" capaz de reaccionar a determinadas intensidades del campo. Este resonador puede ser un conductor rectilíneo con un espacio de chispa *ab* (fig. 349), donde a la izquierda del resonador se representa el oscilador emisor). Si este dipolo no es perpendicular a las líneas de intensidad del campo eléctrico, entre sus extremos se crea una diferencia de potencial, debido a lo cual en este espacio salta una chispa. Esta chispa será la señal indicadora de que hay campo eléctrico. El espacio de chispa del dipolo receptor debe ser pequeño, porque la diferencia de potencial de sus extremos es pequeña.

El campo magnético se puede estudiar, basándose en su capacidad de inducir, colocando en distintos lugares del campo un circuito que mida la corriente de inducción. Esta corriente depende del lugar en que se sitúa el circuito y de su orientación. La acción inductiva del campo variable será máxima cuando el vector de inducción magnética sea normal al plano del circuito, ya que en esta posición

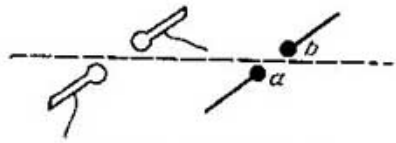


Fig. 349. Resonador *ab*.

varía con la mayor rapidez el flujo magnético a través de la superficie limitada por el circuito. La magnitud relativa del vector de excitación magnética en distintos lugares es proporcional a la magnitud de la corriente de inducción creada en el circuito, si éste es normal a la excitación magnética.

Esta clase de experimentos permite establecer el carácter del campo electromagnético que rodea al dipolo. En las proximidades del dipolo, el campo es de carácter complejo; pero a grandes distancias en comparación con sus dimensiones, en la región denominada *zona de onda*, el campo tiene una forma relativamente simple.

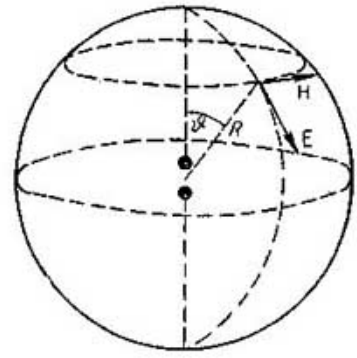


Fig. 350. Dirección y sentido de los vectores **E** y **H** en la zona de onda del dipolo.

Sea la dirección del dipolo el eje de una superficie esférica (fig. 350). Tracemos en esta esfera y con respecto a este eje, paralelos y meridianos. La intensidad del campo eléctrico **E** en cualquier punto irá dirigida según la tangente al meridiano, y la excitación **H** del campo magnético, según la tangente al paralelo. Las magnitudes de la excitación magnética y de la intensidad del campo eléctrico disminuirán desde el ecuador hacia el polo: para los puntos situados en la continuación del eje del dipolo, estas dos magnitudes serán iguales a cero; para los puntos situados en la región ecuatorial, estas magnitudes tendrán el valor máximo. En correspondencia con ello, la densidad del flujo de la energía radiada también dependerá del ángulo ϑ que forma la dirección de la radiación con el eje del dipolo. Esta dependencia se representa en forma de diagrama

vectorial en la fig. 351. Con el aumento de la distancia al dipolo (es decir, con el aumento del radio de la esfera), la intensidad del campo eléctrico y la excitación magnética disminuyen. Es importante notar que la *intensidad del campo eléctrico* **E** en el punto dado *es perpendicular a la excitación magnética* **H** *en el mismo punto*, y ambos

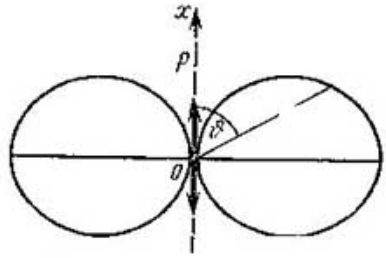


Fig. 351. Distribución de la intensidad de radiación en función del ángulo θ.

vectores **E** y **H** son perpendiculares al radio de la esfera, es decir, perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Si la f. e. m. $\mathscr{E}$ del dipolo varía según la ley:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

donde ω es la frecuencia angular de las oscilaciones, la intensidad del campo **E** en cada punto del espacio también varía periódicamente con la misma frecuencia ω; pero con retraso de fase. El retraso de fase es tanto mayor, cuanto mayor sea la distancia del dipolo al punto examinado. Este retraso de fase es debido a que el campo electromagnético se propaga a una velocidad v finita. De esta manera, alrededor del dipolo se crea una onda electromagnética esférica. Si llamamos r a la distancia desde el dipolo al punto dado, las oscilaciones del vector **E** se representarán por la ecuación:

$$E = \frac{E_0 \operatorname{sen} \vartheta}{r} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = \frac{E_0 \operatorname{sen} \vartheta}{r} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right),$$

donde T es el período, λ, la longitud de onda y ϑ, el ángulo polar (fig. 350).

En la dirección de propagación, la onda electromagnética se puede representar mediante dos sinusoides en planos mutuamente perpendiculares. Una de ellas representa las oscilaciones del vector de intensidad del campo eléctrico **E**, y la otra, las del vector de excitación magnética **H**. En el vacío, las amplitudes de las oscilaciones de los dos vectores son numéricamente iguales (si **E** se mide en el sistema electrostático de unidades, y **H**, en el electromagnético); ambos vectores poseen la misma fase de oscilación (fig. 352, *a*).

www.elsolucionario.org

La dirección de propagación de la onda se puede determinar por la regla del sacacorchos: si la manilla del sacacorchos gira en el sentido del vector **E** hacia el vector **H**, la dirección de su movimiento de traslación determina la dirección de propagación de la onda (fig. 352, *b*).

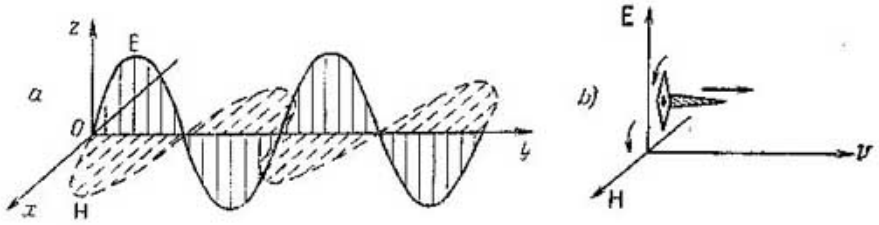


Fig. 352. Onda electromagnética.

En sus experimentos, Hertz obtuvo ondas electromagnéticas de unos 60 cm de longitud. Observó su reflexión sobre espejos metálicos, su refracción en el prisma de parafina y el fenómeno de interferencia. Todos estos experimentos demostraron sin lugar a dudas que el campo electromagnético variable puede propagarse en forma de ondas a velocidad finita.

§ 247. Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas. Debido a la gran velocidad de las ondas electromagnéticas, su medición experimental directa presenta ciertas dificultades.

Hertz determinó esta velocidad de manera indirecta midiendo la longitud de la onda electromagnética λ; de donde, sabiendo el período T de oscilación determinado por la capacidad y la autoinducción del oscilador, calculó la velocidad v de la relación:

$$v = \frac{\lambda}{T}. \qquad (1)$$

Para medir la longitud de onda, Hertz utilizó ondas electromagnéticas estacionarias obtenidas en la interferencia de ondas de sentido opuesto. Hertz obtuvo las ondas de sentido opuesto reflejando la onda directa (móvil) sobre un espejo metálico.

Para que la intensidad de la onda estacionaria se perciba hay que realizar el experimento con una onda electromagnética que se propague según una dirección determinada. Esta "orientación" de la onda electromagnética se realiza sencillamente mediante el esquema representado en la fig. 353. La distancia disruptiva del dipolo se sitúa entre dos conductores paralelos unidos por los extremos como se indica en la figura. El campo electromagnético fundamentalmente

está comprendido entre los conductores, y en éstos se crean corrientes de conducción. El sector *ab* del conductor hace de espejo, que refleja las ondas que llegan hasta el mismo. Por lo tanto, en la región limitada por los conductores se forman ondas estacionarias, cuya posición de nodos y vientres se determina experimentalmente. Situando entre los conductores un tubo de descarga *A* sobre contactos de corredera, se puede observar, desplazándolo a lo largo de los conductores, su luminiscencia intermitente. La luminiscencia máxima

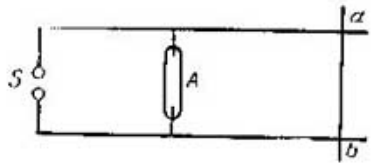


Fig. 353. Obtención de ondas electromagnéticas estacionarias.

tiene lugar en los vientres de la intensidad del campo eléctrico; la luminiscencia desaparece donde se hallan los nodos de la intensidad del campo eléctrico. La distancia entre los nodos vecinos o entre los vientres vecinos será igual a la mitad de la onda. Los nodos y los vientres de la excitación magnética se pueden revelar desplazando a lo largo de los conductores un cuadro cerrado con un galvanómetro y observando la acción inductiva del campo magnético variable, como se ha indicado arriba. Estas observaciones demuestran que los vientres de la excitación magnética coinciden con los nodos de la intensidad del campo eléctrico, y viceversa. En el lugar de la reflexión *ab* se observa un nodo de la intensidad del campo eléctrico y un vientre la de excitación magnética. De esto se deduce que la reflexión de las oscilaciones del vector de intensidad del campo eléctrico sobre una superficie metálica se efectúa con pérdida de una semionda, mientras que la reflexión de las oscilaciones del vector de excitación magnética se efectúa sin pérdida de esta semionda.

Habiendo determinado por la distancia entre los nodos la longitud de onda λ y sabiendo el período de oscilación T, se puede hallar la velocidad de propagación v de las ondas electromagnéticas por la fórmula (1). El período de oscilación T, como se ha indicado, se puede calcular por la fórmula (2) del § 239; pero también se puede determinar empíricamente. Para ello, con ayuda de un espejo giratorio se observa la chispa que salta en el espacio disruptivo del circuito oscilante. Si el espejo gira muy rápidamente, la imagen de la chispa resulta intermitente en correspondencia con la intermitencia y el salto de la chispa en el transcurso de cada período de oscilación. De esta manera, la velocidad de propagación de las

ondas electromagnéticas en el vacío se determinó que era igual a $c=3\cdot10^{10}$ cm/seg. Mediciones más modernas y exactas de la longitud de las ondas estacionarias, lo mismo que de la velocidad de la luz (la luz es una radiación de ondas electromagnéticas de longitud muy pequeña), dan para c el valor de

$$c=2{,}998\cdot10^{10}\ \text{cm/seg}.$$

Este valor coincide con mucha aproximación con el de la constante electrodinámica c determinada respecto a las unidades electromagnética y electrostática de la intensidad de la corriente. Esta coincidencia no es casual: la teoría de Maxwell (véase el texto de cuerpo menor) enseña que las ondas electromagnéticas en el vacío se propagan a una velocidad igual numéricamente a la constante electrodinámica c.

Si los conductores a lo largo de los cuales se propagan las ondas electromagnéticas, se introducen en un dieléctrico, la distancia entre los nodos de las ondas estacionarias disminuye. Esto indica que la velocidad de propagación de la onda disminuye. Según la teoría de Maxwell, la velocidad de propagación de las ondas v en una sustancia es

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{2}$$

donde ε y μ son respectivamente la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética de la sustancia.

Analizando el sistema de ecuaciones de Maxwell se puede demostrar que la solución del sistema, a determinadas condiciones, es de carácter ondulatorio. Por no haber posibilidad de exponer el método de solución de las ecuaciones de Maxwell, nos limitaremos a demostrar que la solución de carácter ondulatorio satisface las ecuaciones de Maxwell, y sacaremos conclusiones acerca del carácter de la onda y de la velocidad de propagación de la misma.

Partiremos de la suposición de que las oscilaciones electromagnéticas se propagan en forma de ondas de período determinado, $T=\frac{2\pi}{\omega}$, en una dirección determinada, por ejemplo, a lo largo del eje OY (fig. 352). Para simplificar, admitamos que la onda es plana, es decir, que en todos los puntos del plano perpendicular a la dirección de propagación de las oscilaciones, cada uno de los vectores E y H, en un mismo instante de tiempo tiene el valor dado. Estas suposiciones permiten escribir "las ecuaciones de las ondas" para los vectores E y H de la forma siguiente:

$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_0\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right),\quad \mathrm{H}=\mathrm{H}_0\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right); \tag{3}$$

donde E_0 y H_0 son respectivamente las amplitudes vectoriales de los vectores de la intensidad del campo eléctrico y de la excitación magnética, y v, la velocidad de propagación de la onda electromagnética. La velocidad de la onda v está relacionada con el período y la longitud de onda mediante la ecuación ordinaria:

$$v=\frac{\lambda}{T}.$$

www.elsolucionario.org

Como se ha supuesto que la onda es plana, las derivadas parciales de las proyecciones de los vectores E y H respecto a las coordenadas x y z serán iguales a cero, ya que en el *instante dado*, las magnitudes E y H varían solamente a lo largo de la dirección de propagación de las oscilaciones, es decir, solamente a lo largo del eje OY. De esta manera tenemos que de las ecuaciones de Maxwell desaparecen todos los miembros que tienen derivadas parciales respecto a x y z. Esto nos da el sistema de ecuaciones de Maxwell (véanse las págs. 532 y 535) en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{c} E_x, \\ 0 &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}_y, \\ -\frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}_z; \end{aligned}\right\} \quad (4) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= -\frac{\mu}{c} \dot{H}_x, \\ 0 &= \frac{\mu}{c} \dot{H}_y, \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\mu}{c} \dot{H}_z. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Para que se cumplan las segundas ecuaciones de ambos sistemas de Maxwell es necesario que las derivadas respecto al tiempo de las proyecciones de los vectores E y H sobre el eje OY sean iguales a cero.

De las ecuaciones (3) se deduce que si la derivada respecto al tiempo de cualquier proyección de los vectores E o H siempre es igual a cero, esta proyección también será igual a cero. De esto se deduce que

$$E_y = H_y = 0. \quad (6)$$

De esto se saca una conclusión muy importante: *los vectores* E y H *en la onda electromagnética plana están situados perpendicularmente a la dirección de propagación de las oscilaciones y la onda electromagnética es transversal.*

Para concretar supongamos que el vector E oscila conservando invariable la dirección, y que esta dirección coincide con la del eje OZ. Esta clase de onda en que el vector conserva su dirección se denomina *onda planopolarizada*. Nuestra suposición nos obliga a llegar a la conclusión de que la proyección de E sobre la dirección del eje OX es igual a cero, es decir, $E_x = 0$, de donde,

$$E_z = E. \quad (7)$$

La tercera ecuación del segundo sistema (5) de Maxwell, en estas condiciones, nos da que

$$\dot{H}_z = 0, \text{ y, por consiguiente, } H_z = 0$$

Con ello se satisface también la primera ecuación del sistema (4). De esta manera, el vector de excitación magnética oscila paralelamente al eje OX, de donde,

$$H_x = H.$$

De esto se deduce que *el vector de intensidad del campo eléctrico* (dirigido a lo largo del eje OZ) *y el vector de excitación magnética* (dirigido a lo largo del eje OX) *son mutuamente perpendiculares.*

Utilicemos la tercera ecuación del primer sistema (4) y la primera ecuación del segundo sistema (5), que ahora se transforman en

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{E}, \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \dot{H}.$$

Para excluir de estas ecuaciones una de las incógnitas, por ejemplo, H, se diferencia respecto al tiempo la primera ecuación:

$$-\frac{\partial \dot{H}}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{c} \ddot{E};$$

sustituyendo en esta ecuación $\dot{H}$ por su valor según la segunda ecuación, obtenemos que

$$\frac{c}{\mu}\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\frac{\varepsilon}{c}\ddot{E} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Está claro que excluyendo E se obtiene una ecuación análoga para H. La ecuación (8) es la ecuación de onda (compárese con lo dicho en el § 141 del t. I). Veamos que, efectivamente, la solución de esta ecuación diferencial la satisface la ecuación de la forma:

$$E=E_0\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right).$$

Para ello hallemos las segundas derivadas de E respecto al tiempo t y a la coordenada:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=-\omega^2 E_0\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)=-\omega^2 E;$$
$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=-\frac{\omega^2}{v^2}E_0\cos\omega\left(t-\frac{y}{v}\right)=-\frac{\omega^2}{v^2}E.$$

Colocando estos valores de $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ y $\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}$ en la (6), hallamos que

$$\frac{1}{v^2}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}, \tag{9}$$

relación que siempre se puede satisfacer. Así tenemos que la solución de la ecuación (8) es una onda plana de frecuencia ω, que se propaga a la velocidad v, velocidad que, según la (9) es

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{10}$$

Para el vacío tenemos que $\varepsilon=1$ y $\mu=1$, de donde la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío es igual a la magnitud c, que es la relación de la unidad electromagnética (*CGSM*) de intensidad de la corriente a la unidad electrostática (*CGSE*).

§ 248. Vector de Umov-Poynting (vector de Poynting). La propagación de la onda electromagnética va acompañada de un transporte de energía, que caracteriza al campo electromagnético. Más arriba se ha indicado que la energía de los campos eléctrico y magnético se distribuye por el espacio con las densidades de $\varepsilon E^2/8\pi$ y $\mu H^2/8\pi$. Se puede demostrar que el campo *electromagnético* viene caracterizado por la energía total distribuida con una densidad w:

$$w=\frac{\varepsilon E^2+\mu H^2}{8\pi}.$$

(esta fórmula es justa tanto en el sistema electrostático de unidades, como en el electromagnético). Como la energía es una función de la intensidad y de la excitación de los campos, se transmitirá al espacio a la velocidad v de propagación del campo. La propagación de la energía se puede describir introduciendo el concepto de vector

de densidad de flujo de energía electromagnética. N. Umov, profesor de la Universidad de Moscú, fue el primero en deducir e introducir el concepto de vector de densidad de flujo de energía en su forma general y en la aplicación a las ondas elásticas (véase el § 112 del t. I), mientras que para el caso particular del campo electromagnético, lo empleó Poynting.

Si llamamos S al valor del vector de Umov-Poynting, la energía que durante el tiempo dt fluye a través de una superficie unidad perpendicular a la dirección de la propagación de las ondas, se expresa por la fórmula:

$$Sdt = w \cdot v \cdot dt, \tag{1}$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda.

Si los vectores **E** y **H** son mutuamente perpendiculares, como ocurre en el caso de la onda electromagnética en el vacío y en los medios isótropos, el valor del vector de Umov-Poynting se determina por la ecuación:

$$S = \frac{c}{4\pi} EH, \tag{2}$$

que es justa en el sistema absoluto (físico) de unidades.

La magnitud y dirección del vector de Umov-Poynting **S** se determina por el producto vectorial de los vectores **E** y **H**:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \tag{3}$$

Demostremos que el vector de Umov-Poynting determinado por las ecuaciones (2) y (3) satisface la ecuación (1), es decir, que efectivamente es el vector de la densidad de flujo de energía. Supongamos, como se ha hecho arriba, que la onda que se propaga a lo largo del eje OY, tiene los vectores eléctrico y magnético dirigidos respectivamente según los ejes OZ y OX (fig. 352). Entonces tendremos que $E = E_z$ y $H = H_x$, y el vector **S** irá dirigido según el eje OY en el sentido de la propagación de la onda.

De la primera ecuación del sistema (5) del § 247, teniendo en cuenta la fórmula (3) del mismo párrafo, tenemos que

$$\frac{\omega}{v} E = \frac{\mu\omega}{c} H;$$

y colocando en esta ecuación el valor de $v = \dfrac{C}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, obtenemos que

$$\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H.$$

(Obsérvese que E viene expresada en unidades electrostáticas, y H en unidades electromagnéticas). Por consiguiente, la densidad de la energía electromagnética se puede expresar de la siguiente manera:

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} = \frac{\mu H^2}{4\pi}. \tag{4}$$

www.elsolucionario.org

Tomemos el producto del valor del vector de Umov-Poynting por el elemento de tiempo dt:

$$S dt = \frac{c}{4\pi} E \cdot H \cdot dt = \frac{c\sqrt{\varepsilon} E^2}{4\pi\sqrt{\mu}} dt = \frac{ceE^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot 4\pi} dt$$

o, utilizando la magnitud w de la (4) y sustituyendo $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ por v:

$$S dt = w \cdot v \cdot dt,$$

que coincide con la (1). Se puede demostrar que en el caso general, la energía electromagnética que sale de (o entra en) cierto volumen durante el intervalo dt de tiempo, es $\int_s S_n\, dt\, ds$, donde la integral se toma según la superficie que limita el volumen dado. Así, pues, de lo analizado se ve que el vector S es el vector de densidad del flujo de energía electromagnética.

§ 249. Radiotecnia. Métodos modernos de excitación y registro (detección) de las ondas electromagnéticas. El método primitivo de Hertz de excitar ondas electromagnéticas con ayuda del oscilador representado en la fig. 345 permitió obtener ondas de 1 m de longitud aproximadamente. Los experimentos de Hertz permitieron observar y analizar importantes propiedades de las ondas electromagnéticas: reflexión, refracción, etc. Estos experimentos fueron la confirmación directa de la naturaleza electromagnética de la luz. Después se han hecho muchos intentos de obtener ondas de menor longitud. En 1906, P. Lébedev, construyó un oscilador muy pequeño y obtuvo ondas electromagnéticas de unos 3 mm de longitud. Luego (en 1924), M. Levítskaya obtuvo ondas de 0,2 mm de longitud. V. Arkádiev y A. Glagóleva-Arkádieva, profesores de la Universidad de Moscú, elaboraron un método original de generación de ondas cortas electromagnéticas basándose en las chispas que saltan entre limaduras metálicas suspendidas en aceite. Consiguieron obtener ondas aproximadamente de 0,1 mm de longitud. Estas ondas son de bastante menor longitud que las ondas infrarrojas más largas (véase el t. III). Al mismo tiempo se elaboraron métodos de obtención de ondas más largas.

Los experimentos con las ondas electromagnéticas condujeron al célebre físico ruso A. Popov a descubrir el método de telegrafía sin hilos. En 1895, A. Popov utilizando la propiedad de las limaduras metálicas de adherirse y elevar con ello la conductibilidad eléctrica bajo la influencia de oscilaciones eléctricas de alta frecuencia, construyó el primer receptor sensible de ondas electromagnéticas.

En la fig. 354 se representa el esquema del receptor de A. Popov. Su parte fundamental es el *detector AB*, que es un tubo de cristal con limaduras metálicas. El detector está conectado en un circuito

que consta de la batería P y del relé CDE. Cuando las ondas electromagnéticas alcanzan el instrumento, la conductibilidad eléctrica de las limaduras aumenta y en el circuito se crea una corriente. Bajo la influencia de esta corriente el electroimán atrae al núcleo (armadura) del relé D y cierra el contacto E. Gracias a ello se cierra el segundo circuito, que también alimenta la batería P, en el cual está conectado el timbre eléctrico HG. El martillo del timbre, en su movimiento de retroceso golpea el tubo del detector, con lo cual se restablece la resistencia de las limaduras. De esta manera, el receptor cesa automáticamente de actuar en cuanto las ondas electromagnéticas dejan de llegar.

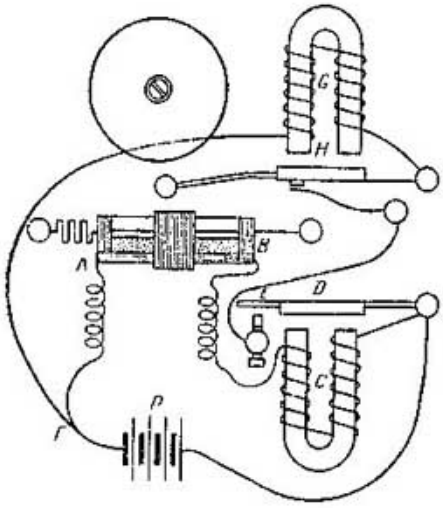


Fig. 354. Esquema del receptor de A. Popov.

Un año después, en marzo de 1896, A. Popov demostró en la sesión de la Sociedad Físico-Química la transmisión del primer radiograma. El radiograma se transmitió en el territorio de la Universidad de Petersburgo desde el edificio del Instituto de química a una distancia de 250 m del edificio donde se celebraba la sesión de la Sociedad. El descubrimiento del telégrafo sin hilos de A. Popov produjo una gran revolución en la técnica.

El desarrollo ulterior de la radiotecnia se encaminó a sustituir los generadores de chispa, que ofrecían la posibilidad de obtener solamente oscilaciones amortiguadas, por generadores de oscilaciones continuas. Esta última circunstancia permitió pasar de la transmisión de señales a la transmisión de la palabra, música, imágenes. Por eso, en los años veinte de nuestro siglo, la radiotecnia ha pasado a la generación con ayuda de válvulas electrónicas.

El esquema de un generador de esta clase se ha descrito en el § 241. Para los fines de radiotransmisión, el circuito oscilante se acopla por inducción a una antena. En su forma más simple, la antena es un alambre vertical con su extremo inferior conectado a tierra. La longitud del alambre se elige de manera que se establezca en él una onda estacionaria con el vientre de la intensidad de la corriente en el extremo inferior y el nodo en el superior. Esta antena es análoga a la mitad del oscilador de Hertz y asegura una radiación de oscilaciones en forma de ondas electromagnéticas creadas a su alrededor (fig. 355).

La revelación (detección) de las ondas electromagnéticas se realiza mediante una antena receptora y un sistema de amplificación. El circuito oscilante *LC* de un sistema de éstos (fig. 356) se acopla por inducción con la antena (en la figura no viene representada la antena). En el circuito, bajo la influencia de las ondas

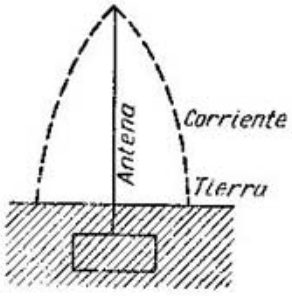


Fig. 355. Oscilaciones libres de la antena vertical simple.

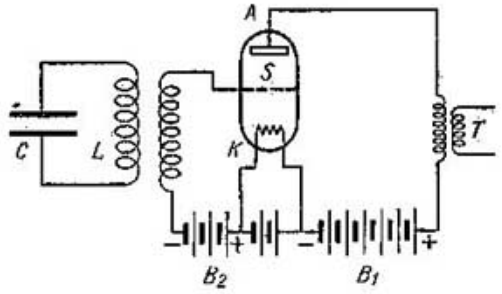


Fig. 356. Esquema de amplificación de oscilaciones electromagnéticas.

electromagnéticas se crean oscilaciones forzadas. La amplitud de estas oscilaciones será la máxima en la resonancia, pero de todas maneras, rigurosamente hablando, será demasiado pequeña para poder medir directamente las corrientes creadas. Para poderlas medir se intensifican con ayuda de un *esquema amplificador* especial. En una forma muy simple, representado en la fig. 356, este esquema consta de una válvula de tres electrodos. El circuito oscilante se acopla por inducción con la rejilla *S* de la válvula. Al aparecer las oscilaciones eléctricas en el circuito *LC*, la "tensión de rejilla" (véase el § 241) varía y, por consiguiente, varía la intensidad de la corriente que fluye a través de la válvula desde la batería B_1. Las condiciones de funcionamiento de la válvula se eligen de manera que lo haga dentro de la parte rectilínea de la característica (fig. 357). Si esta parte rectilínea forma una gran pendiente, a pequeños valores de variación de la tensión de rejilla ΔV_r le corresponderán notables variaciones de la corriente anódica ΔI_a. Por lo tanto, débiles oscilaciones en el circuito resonante *LC* acarrearán oscilaciones mucho mayores de la intensidad de la corriente anódica del circuito

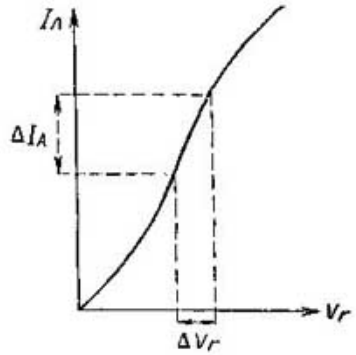


Fig. 357. Característica de una válvula de tres electrodos.

www.elsolucionario.org

de la válvula. En el esquema de amplificación examinado, el generador de energía del circuito de la válvula es la batería B_1; las oscilaciones del circuito LC causadas por la onda electromagnética incidente, solamente actúan sobre la válvula y originan las variaciones de la intensidad de la corriente de la batería B_1. Las oscilaciones

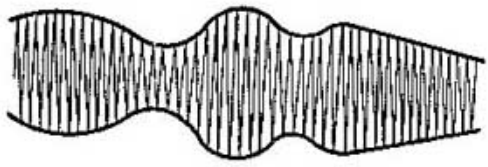


Fig. 358. Envolvente de las oscilaciones de alta frecuencia.

de la corriente anódica, con ayuda del transformador T se pueden transmitir a los aparatos registradores o a la rejilla de la segunda válvula para una segunda amplificación.

Para transmitir sonidos, las oscilaciones electromagnéticas *se modulan*, es decir, su amplitud varía al unísono con las oscilaciones audibles. En este caso, la envolvente de las oscilaciones electromagnéticas de alta frecuencia es la oscilación de las frecuencias audibles (fig. 358). Estas variaciones de la amplitud permiten obtener de nuevo los sonidos en la estación receptora con ayuda de un altavoz.

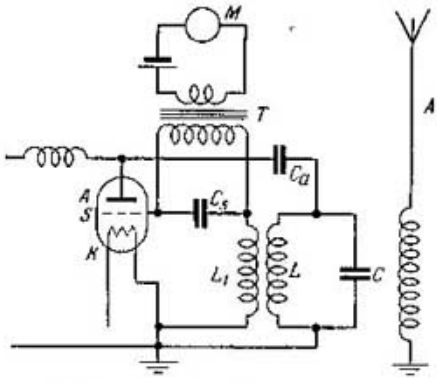


Fig. 359. Esquema de modulación de las oscilaciones de alta frecuencia.

El esquema más simple de modulación viene representado en la fig. 359. En esta figura se representa la parte del esquema generador correspondiente a la fig. 338, y a la derecha, la antena A con la cual se acopla por inducción la parte generadora. En la parte superior de la figura se representa el micrófono M. Las oscilaciones de la tensión originadas en el micrófono se amplifican en el transformador T y se transmiten a las armaduras del condensador de la rejilla C_s. Las oscilaciones de alta frecuencia creadas en la bobina L_1 pasan fácilmente a través del condensador C_s y se transmiten a la rejilla de la válvula S. Al mismo tiempo, debido a la elevada inducción de los arrollamientos del transformador T, no pasan bifurcándose al circuito del micrófono. Así, pues, el sistema generador funciona

de la misma manera que si no tuviese conectado el micrófono. Las oscilaciones creadas en el micrófono tienen una frecuencia audible, es decir, mucho inferior que la frecuencia creada por el oscilador de válvulas. Por eso el condensador C_s ofrece una resistencia mucho mayor para las corrientes del transformador T que para las corrientes

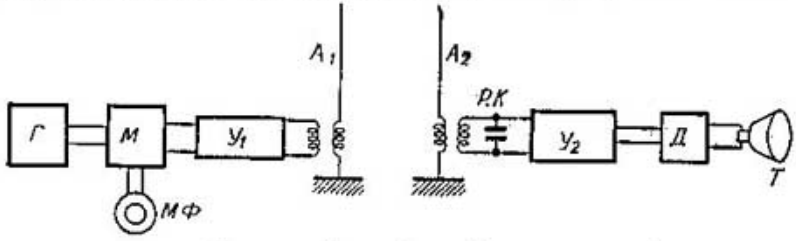


Fig. 360. Esquema de un transmisor y un receptor.

del oscilador. Debido a ello, en las armaduras del condensador C_s aparece solamente una diferencia complementaria de potencial que varía la tensión de rejilla V_r, con lo cual se consigue la modulación de las oscilaciones.

El esquema general de un receptor y un transmisor viene representado en la fig. 360. En el transmisor el generador de oscilaciones de alta frecuencia Г produce oscilaciones armónicas continuas de determinada frecuencia ω. Estas oscilaciones se modulan en el modulador M, según las oscilaciones audibles que vienen del micrófono $M\Phi$. Después, las oscilaciones se intensifican en el sistema $У_1$ amplificador de válvulas y se transmiten a la antena A_1 por acoplamiento inductivo, la cual emite las ondas electromagnéticas. Las ondas, al llegar a la antena A_2 del receptor, crean en ella oscilaciones forzadas. La antena A_2 está acoplada por inducción con el circuito resonante PK. Las oscilaciones forzadas que aparecen en el circuito resonante se intensifican en el amplificador de válvulas $У_2$. Las oscilaciones amplificadas se rectifican en el rectificador (detector) $Д$. La corriente rectificada I_0, que reproduce en función del tiempo a la corriente del micrófono del transmisor, se transmite después de pasar por el amplificador de baja frecuencia (no representado en el esquema) al altavoz T.

La propagación de las ondas de la radiodifusión no se produce en el espacio libre, sino a lo largo de la superficie terrestre, que es un buen conductor. Por eso, alrededor de la antena emisora no se forman ondas esféricas análogas a las que se han examinado en el § 246. Las ondas emitidas por la antena sufren la acción guiadora (conductora) de la superficie de la Tierra y, de esta manera, rodean la esfera terrestre. El académico V. Fok resolvió totalmente el problema de la propagación de las ondas a lo largo de la superficie de la Tierra. En la propagación de las ondas cortas electromagnéticas

desempeñan también un gran papel las altas capas atmosféricas, donde hay gran cantidad de iones (formados principalmente por la acción de la radiación ultravioleta del Sol). Esta parte de la atmósfera se denomina *ionosfera*. Las ondas cortas electromagnéticas se reflejan en la ionosfera, lo cual influye altamente en el carácter de su propagación a lo largo de la superficie de la esfera terrestre.

En la actualidad, en la Unión Soviética, junto a la radiotelefonía, radiotelegrafía y televisión, se elaboran ampliamente otras aplicaciones de las ondas electromagnéticas. Un éxito notable en el desarrollo de la radiotecnia ha sido el paso a las ondas cortas electromagnéticas (métricas y centimétricas), que han permitido obtener con ayuda de antenas de forma especial, radioseñales dirigidas.

Las ondas electromagnéticas, al encontrar en su camino diferentes obstáculos, pueden ser retenidas por ellos y, en parte, reflejarse y dispersarse desde estos obstáculos. A. Popov, ya en 1897, en los experimentos de radiotelegrafía en el mar observó que el barco hace de pantalla, detrás del mismo se produce una "sombra". En el fenómeno de reflexión de las ondas electromagnéticas en los cuerpos metálicos se funda el método de revelación de objetos a grandes distancias y de determinación de su posición. Los primeros que elaboraron en la URSS este método, denominado *radiolocalización*, fueron D. Rozhanski y Y. Kóbsariev. Este método consiste en lo siguiente: con ayuda de un generador y un sistema especial de antenas se obtiene un haz dirigido de ondas electromagnéticas; después de reflejarse en el objeto (barco, avión) las ondas llegan al receptor y se registran. Para que la emisión de señales no entorpezca su recepción, las señales se emiten con intermitencia. Cada señal dura no más de unas millonésimas de segundo, mientras que los intervalos de señal a señal son decenas y centenares de veces mayores. La recepción de las ondas reflejadas se hace en los intervalos de señal a señal. Según el tiempo transcurrido entre la emisión y retorno de la onda reflejada se determina la distancia del objeto observado. El equipo que permite determinar de esta manera la posición de los objetos con ayuda de radioseñales, se denomina *radar*.

Los científicos soviéticos L. Mandelstam y N. Papalexi han elaborado un método de determinación muy exacta de la distancia con ayuda de radioseñales, basado en la determinación del desfase entre las ondas reflejadas.

La esfera de aplicación de los métodos radiotécnicos en la actualidad se desarrolla intensamente y en este desarrollo, los científicos soviéticos ocupan un lugar preeminente.

Mediante las ondas cortas se mantiene la comunicación no sólo con los sputniks, sino también con los cohetes cósmicos a distancias de varios millones de kilómetros.

www.elsolucionario.org

APENDICE

Sistemas de unidades eléctricas y magnéticas

En distintas partes del curso se han introducido unas u otras unidades de medición para las magnitudes eléctricas y magnéticas. Resumamos lo dicho.

En física se ha adoptado el sistema *CGS* basado en lo siguiente (véase el § 3 del t. 1). Como unidades fundamentales se han escogido: de unidad de longitud, el centímetro; de masa, el gramo, y de tiempo, el segundo; las unidades de las demás magnitudes físicas se establecen basándose en las relaciones regulares con las de longitud, masa y tiempo, teniendo en cuenta que en las fórmulas correspondientes, los coeficientes de proporcionalidad se suponen igual a la unidad. No obstante este método no es unívoco. Ya se ha indicado (t. I, § 32) que, por ejemplo, la unidad de fuerza puede establecerse de dos maneras: 1) basándose en la segunda ley de Newton, $f=mw$, en la cual el coeficiente de proporcionalidad se considera igual a la unidad, y 2) basándose en la ley de la gravitación universal, $f=\frac{m_1 m_2}{r^2}$, en la cual también se considera igual a la unidad el coeficiente de proporcionalidad. En el primer caso deberemos escribir la ley de la gravitación universal de la siguiente manera:

$$f=k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

donde la "constante de gravitación" es $k=6{,}685\cdot 10^{-8}$ cm^3/g·seg^2. En el segundo caso tendremos que escribir la segunda ley de Newton de la siguiente manera:

$$f=k'mw,$$

donde la "constante dinámica" es $k'=1{,}496\cdot 10^7$ g·seg^2/cm^3.

De esta manera se pueden formar dos sistemas *CGS* de medición de las magnitudes mecánicas: 1) "dinámico" y 2) "gravitatorio". Como se sabe, generalmente se emplea el sistema dinámico.

Análogamente, en el estudio de los fenómenos electromagnéticos se han formado dos sistemas *CGS* basados bien en las leyes de las acciones recíprocas electrostáticas de las cargas (sistema *CGSE*), bien en las acciones recíprocas magnéticas de las corrientes (sistema *CGSM*).

1. **Sistema electrostático absoluto** (*CGSE*). En este sistema, la unidad de cantidad de electricidad q se establece partiendo de la ley de Coulomb referida al vacío, en que el coeficiente de proporcionalidad se considera igual a la unidad:

$$f = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{1}$$

La fuerza f de la fórmula (1) se mide en dinas, la distancia r, en centímetros (para más detalle véase la pág. 20). Para los dieléctricos:

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{2}$$

donde ε, constante dieléctrica, es un *número abstracto* [para el vacío, según la (1), tenemos que $\varepsilon = 1$, para los demás medios, $\varepsilon > 1$]).

Basándose en las unidades *CGSE* de cantidad de electricidad se establecen las unidades *CGSE* de intensidad del campo, de diferencia de potencial, de resistencia, etc.

Para establecer en este sistema las unidades de medición de la excitación magnética se parte de la siguiente relación: la excitación magnética H del campo a la distancia r de un conductor con corriente infinitamente largo y recto se supone igual a (véase la pág. 309):

$$H = \frac{2I}{r}, \tag{3}$$

donde I es la intensidad de la corriente.

Midiendo I en unidades *CGSE* de intensidad de corriente, se establece la unidad *CGSE* de excitación magnética.

El momento M de fuerzas que actúan en un campo magnético de excitación H sobre un contorno plano de área S_1 por el cual fluye una corriente de intensidad I_1, según lo dicho en el § 191, es proporcional al producto HI_1S_1:

$$M \sim HI_1S_1.$$

En el sistema *CGS*, la magnitud M se mide en dinas $\times$ centímetro, S_1, en centímetros cuadrados; para H e I_1 se han elegido las unidades *CGSE*. De esta manera resulta que ya se han elegido las unidades de medición para las cuatro magnitudes M, S_1, H e I_1, de donde se deduce que, al pasar a la igualdad entre M y el producto HI_1S_1, no podemos considerar igual a la unidad el coeficiente de proporcionalidad, sino que tenemos que introducir un coeficiente igual a $1/c^2$:

$$M = \frac{1}{c^2} HI_1S_1; \tag{4}$$

donde el valor numérico del coeficiente c se puede determinar experimentalmente. Las mediciones de esta magnitud dan el valor de

$c=2{,}998\cdot 10^{10}$ cm/seg; y se denomina *constante electrodinámica*. Como se ha visto, la magnitud c, según el valor numérico y dimensiones, coincide con la velocidad de propagación del campo electromagnético en el vacío.

La unidad de medición de la inducción magnética B en el sistema *CGSE* se establece determinando el momento M de las fuerzas que actúan sobre el contorno con corriente mediante la relación:

$$M = BI_1S_1. \tag{5}$$

Comparando las ecuaciones (4) y (5) obtenemos para el vacío:

$$B = \frac{1}{c^2}H. \tag{6}$$

Para una sustancia determinada se supone que

$$B = \mu H. \tag{6a}$$

La magnitud μ tiene las dimensiones de $L^{-2}T^2$ y su valor numérico es c^2 veces menor que los valores ordinarios de la permeabilidad magnética. De las fórmulas (6) y (6a) se ve que en el sistema *CGSE*, los vectores **B** y **H** tienen distintas dimensiones.

La expresión (6a) se puede conservar refiriéndola al vacío, si se escribe de la siguiente manera:

$$B = \mu_0 H. \tag{6b}$$

Para igualar esta fórmula con la (6) se debe cumplir la igualdad $\mu_0=\frac{1}{c^2}$. La magnitud μ_0 se denomina a veces "permeabilidad magnética en el vacío" ("permeabilidad del espacio vacío"), aunque esta denominación no tiene ningún valor físico. Se ha visto (§ 201) que la permeabilidad magnética μ de una sustancia está relacionada con la capacidad de magnetizarse que, a su vez, es debida a la existencia de los momentos magnéticos (permanentes o inducidos) de los átomos y de las moléculas. Por "vacío" se sobrentiende la parte del espacio en que sólo hay un campo electromagnético (compárese con lo dicho en el § 152), es decir, un estado especial de la materia sin átomos ni moléculas. El campo electromagnético posee determinadas propiedades físicas, entre ellas la de transmitir perturbaciones electromagnéticas a una velocidad igual a c. De este modo, la constante electrodinámica c expresa determinadas propiedades objetivas del campo electromagnético, y no de cierta sustancia compuesta de átomos y moléculas. Por eso la magnitud $\mu_0=\frac{1}{c^2}$ no tiene ninguna analogía con la permeabilidad magnética μ de la sustancia.

Las unidades *CGSE* de medición de las magnitudes magnéticas se emplean raramente.

www.elsolucionario.org

2. Sistema electromagnético absoluto (*CGSM*). En este sistema, la unidad de la intensidad I de la corriente se establece basándose en la expresión de las fuerzas de acción recíproca de dos conductores rectos, paralelos e infinitamente largos con corriente y entre los cuales hay un espacio vacío (véase el § 196):

$$f = \frac{2I_1 I_2}{r} l, \tag{7}$$

donde f es la fuerza que actúa sobre la longitud l de una de las corrientes, y r, la distancia entre las corrientes. La unidad de excitación magnética H se establece basándose en la unidad *CGSM* de intensidad de la corriente según la ecuación (3). Esta unidad de excitación del campo magnético se denomina *oerstedio*.

La unidad de inducción magnética B se determina de la relación

$$B = \mu H,$$

donde la permeabilidad magnética μ es una magnitud sin dimensiones que indica cuántas veces aumentan las fuerzas de acción mutua entre las corrientes al introducir los conductores por los cuales fluyen, en la sustancia en cuestión. La unidad *CGSM* de inducción magnética B se denomina *gausio*. La magnitud y las dimensiones del gausio coinciden con las del oerstedio. La unidad de flujo de inducción magnética Φ, se establece de la relación

$$\Phi = B_n S,$$

y se denomina *maxwelio*.

La unidad de cantidad de electricidad q, en el sistema *CGSM* se establece basándose en la intensidad de la corriente I de la relación $q=It$. Así, pues, la unidad de cantidad de electricidad ha sido elegida *independientemente* de las acciones recíprocas electrostáticas de las cargas. Por eso resulta que en la ley de Coulomb (1), las tres magnitudes físicas f, q y r que entran en ella, ya tienen unidades de medición. Por consiguiente, en la ley de Coulomb hay que introducir un coeficiente de proporcionalidad de valor numérico y dimensiones determinadas. El valor de este coeficiente es fácil de calcular: en el sistema *CGSM*, la unidad de medición de la carga q es c veces mayor que la unidad del sistema *CGSE*; mientras que las unidades de la fuerza f y de la distancia r son las mismas. Por eso, para que el valor de la fuerza f resulte el mismo que utilizando el sistema *CGSE*, hay que introducir en la parte de la derecha de la ecuación de Coulomb un factor igual a c^2:

$$f = c^2 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \tag{8}$$

Para los dieléctricos, en el sistema *CGSM*, la ley de Coulomb se escribe, lo mismo que en el sistema *CGSE*, de la forma si-

guiente:

$$f = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{8a}$$

En este caso la constante dieléctrica ε tendrá las dimensiones $L^{-2}T^2$ y su valor numérico será c^2 veces menor que el de ε en el sistema *CGSE*. En el sistema *CGSM* se puede conservar formalmente la expresión (8a) referida al vacío, haciéndola:

$$f = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Comparando esta fórmula con la (8) se ve que se debe satisfacer la igualdad: $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. La magnitud ε_0 se denomina a veces "constante dieléctrica del vacío" ("permitividad del espacio vacío"). Esta denominación, lo mismo que la indicada arriba de "permeabilidad magnética del vacío" para la magnitud $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ en el sistema *CGSE*, no tiene sentido físico.

En el sistema *CGSM*, la intensidad del campo eléctrico se determina de la ecuación:

$$E = \frac{f}{q}, \tag{9}$$

de donde, para las dimensiones de E hallamos que $(E) = \frac{[f]}{[q]} = L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$. La unidad de la intensidad electrostática E en el sistema *CGSM* es c veces menor que la unidad de intensidad electrostática en el sistema *CGSE*.

La inducción electrostática D se determina de la ecuación:

$$D = \varepsilon E. \tag{10}$$

Como en el sistema *CGSM* la magnitud ε tiene dimensiones, las dimensiones del vector de inducción electrostática D en el sistema *CGSM* se diferencian de las dimensiones del vector de intensidad electrostática. Efectivamente, $[D] = [\varepsilon] \cdot [E] = L^{-1/2} \cdot M^{1/2}$.

El valor de la inducción electrostática D en el vacío, en el sistema *CGSM*, es c^2 veces menor que el de la intensidad del campo E.

3. Sistema absoluto (físico) de unidades. En este sistema, las unidades de todas las magnitudes eléctricas coinciden con las unidades del sistema *CGSE*, y las de las magnitudes magnéticas coinciden con las unidades del sistema *CGSM*. La constante dieléctrica ε y la permeabilidad magnética μ, en este sistema son magnitudes sin dimensiones, en que para el vacío:

$$\varepsilon = 1 \quad \text{y} \quad \mu = 1.$$

Al utilizar el sistema absoluto de unidades en todas las fórmulas que contengan al mismo tiempo magnitudes eléctricas y magnéticas, se introducen coeficientes numéricos expresados por la constante electrodinámica c, por ejemplo, la ley de Biot-Savart-Laplace se expresará de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{c} \cdot \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2};$$

la expresión de la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente Δl en el seno de un campo magnético, será:

$$\Delta f = \frac{1}{c} IB \operatorname{sen} \cdot \Delta l.$$

La ley de inducción de Faraday se expresará de la siguiente manera:

$$E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Tabla XX

Dimensiones de las principales magnitudes eléctricas y magnéticas en los sistemas absolutos de unidades

Magnitud	Sistemas		
	CGSE	*CGSM*	FISICO
Constante dieléctrica ε . .	sin dimensiones	$L^{-2}T^2$	sin dimensiones
Carga eléctrica q	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Intensidad del campo eléctrico E	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Inducción del campo eléctrico D	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Potencial V	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Intensidad de la corriente I	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$
Resistencia R	$L^{-1}T$	LT^{-1}	$L^{-1}T$
Capacidad C	L	$L^{-1}T^2$	L
Permeabilidad magnética μ	$L^{-2}T^2$	sin dimensiones	sin dimensiones
Excitación magnética H	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Inducción del campo magnético B	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$
Flujo de inducción magnética Φ	$L^{1/2}M^{1/2}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$
Coeficiente de autoinducción L	$L^{-1}T^2$	L	L

www.elsolucionario.org

Las ecuaciones de Maxwell en el sistema absoluto se expresarán por las ecuaciones (4a) y (8a) del § 244.

En la tabla XX se dan las dimensiones de las principales magnitudes eléctricas y magnéticas en los sistemas *CGSE*, *CGSM* y en el físico, y en la tabla XXI, las relaciones de las unidades de estos tres sistemas.

4. Sistema internacional de unidades. El sistema de unidades adoptado por la Conferencia Internacional de pesos y medidas de 1960 se basa en las siguientes cuatro unidades fundamentales: metro, kilogramo, segundo y amperio (véase el t. I). En este sistema, por unidad de fuerza se ha adoptado 1 newton$=10^5$ dinas, por unidad de trabajo, 1 julio$=10^7$ ergios y por unidad de potencia, 1 vatio$=10^7$ ergios/seg. La unidad de intensidad de la corriente, el amperio, se establece basándose en la fuerza de acción recíproca de dos conductores paralelos infinitamente largos recorridos por corrientes (véase el § 196): el amperio es igual a la intensidad de la corriente que, fluyendo por dos conductores paralelos infinitamente largos y situados a la distancia de 1 m uno de otro en el vacío, crea entre ellos una fuerza de acción recíproca igual a $1 \cdot 10^7$ newtones por cada metro de longitud. Basándonos en esta definición tenemos que 1 A$=0{,}1$

Tabla XXI

Relaciones de las unidades de los sistemas absolutos

$c = 2{,}998 \cdot 10^{10} \approx 3 \cdot 10^{10}$

Magnitud	1 unidad *CGSE* es igual a ... unidades *CGSM*	1 unidad física es igual a	
		... unidades *CGSM*	... unidades *CGSE*
Constante dieléctrica ε	$1/c^2$	$1/c^2$	1
Carga eléctrica q	$1/c$	$1/c$	1
Intensidad del campo eléctrico E	c	c	1
Inducción del campo eléctrico D	$1/c$	$1/c$	1
Potencial V	c	c	1
Intensidad de la corriente I	$1/c$	$1/c$	1
Resistencia R	c^2	c^2	1
Capacidad C	$1/c^2$	$1/c^2$	1
Permeabilidad magnética μ	c^2	1	$1/c^2$
Excitación del campo magnético H	$1/c$	1	c
Inducción del campo magnético B	c	1	$1/c$
Flujo de inducción magnética Φ	c	1	$1/c$
Coeficiente de autoinducción L	c^2	1	$1/c^2$

unidades *CGSM* de intensidad de corriente. Las demás unidades eléctricas se introducen basándose en las siguientes relaciones:

$$1 \text{ amperio} \times 1 \text{ seg} = 1 \text{ culombio},$$
$$1 \text{ amperio} \times 1 \text{ voltio} = 1 \text{ vatio},$$
$$1 \text{ amperio} \times 1 \text{ ohmio} = 1 \text{ voltio},$$
$$1 \text{ faradio} \times 1 \text{ voltio} = 1 \text{ culombio}.$$

Las unidades magnéticas se introducen basándose en la ley de inducción, a saber: por unidad de flujo magnético Φ se toma el flujo a través de un contorno de 1 ohmio de resistencia en el cual, al disminuir el flujo hasta cero, bajo la acción de la f. e. m. de inducción se transporta por el contorno 1 C de cantidad de electricidad. Esta unidad se denomina *weber*. Como es fácil de calcular, 1 Wb$=10^8$ Mx.

La unidad de inducción magnética B se establece basándose en la relación:

$$B_n = \frac{\Phi}{S},$$

de donde por unidad de inducción magnética se toma la inducción en la zona del espacio donde el flujo magnético uniforme de 1 Wb atraviesa una superficie normal al mismo de 1 m^2. Esta unidad de inducción magnética se denomina *tesla*. Entre esta unidad de inducción magnética y el gausio existe la siguiente relación:

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{Wb/m}^2 = 10^4 \text{ gausios}.$$

En el sistema internacional de unidades se utiliza la denominada notación "racional" de las fórmulas. Se basa en la elección de las unidades de medición de tal manera, que las ecuaciones de Maxwell [(4b) y (5a) de la pág. 533 y las (8b) y (9a) de la pág. 535] tengan la forma:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{B},$$
$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Las relaciones entre los vectores **D** y **E**, y **B** y **H** vienen expresadas respectivamente por las fórmulas:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

En este caso, las leyes de Coulomb y de Biot-Savart-Laplace se escribirán de la siguiente manera:

$$f = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}, \tag{11}$$

$$\Delta H = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{I \Delta l \operatorname{sen} \alpha}{r^2}. \tag{12}$$

Para el vacío, la ley de Coulomb (11) se puede escribir de la siguiente manera:

$$f = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

donde ε_0 es la "constante dieléctrica del vacío". Como es fácil de calcular, la "constante dieléctrica del vacío" ε_0 en el sistema internacional es una magnitud dimensional e igual a

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-7}},$$

donde c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío en m/seg, es decir, $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/seg.

Tabla XXII

Sistema *MKSA* de unidades

Magnitud	Denominación	Dimensiones	1 unidad *MKSA* es igual a ... unidades *CGSM*
Constante dieléctrica ε . .	—	$L^{-3}T^2$	$4\pi 10^{-7} \cong 1{,}26 \cdot 10^{-6}$
Carga eléctrica q	culombio	$L^{1/2}M^{1/2}$	10^{-1}
Intensidad del campo eléctrico E	voltio por metro	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-2}$	10^6
Inducción del campo eléctrico D	culombio por metro cuadrado	$L^{-3/2}M^{1/2}$	$4\pi 10^{-4} \cong 1{,}26$
Potencial V	voltio	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-2}$	10^8
Intensidad de corriente I .	amperio	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	10^{-1}
Resistencia R	ohmio	LT^{-1}	10^1
Capacidad C	faradio	$L^{-1}T^2$	10^{-9}
Permeabilidad magnética μ	—	sin dimensiones	$\frac{10^7}{4\pi} \cong 7{,}96 \cdot 10^5$
Excitación magnética H	amperio por metro	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	$4\pi 10^{-3} \cong 1{,}26 \cdot 10^{-2}$
Inducción del campo magnético B	tesla	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	10^4
Flujo de inducción magnética Φ	weber	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	10^8
Coeficiente de autoinducción L	henrio	L	10^9

www.elsolucionario.org

De la ley de Biot-Savart-Laplace escrita de la forma (12) se deduce que la excitación del campo magnético H a la distancia r de un conductor recto y largo es

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

A base de esta igualdad se establece la unidad de medición de la excitación magnética de "amperio por metro" (indicada en la pág. 326), que es igual a la excitación magnética que aparece a la distancia $r = \frac{1}{2\pi}$ m de un conductor recto y largo recorrido por una corriente de un amperio.

Comparando las unidades de B y de H se deduce que en el sistema práctico, la "permeabilidad magnética del vacío" es $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (número sin dimensiones).

El sistema internacional de unidades coincide con el "sistema práctico" adoptado últimamente en la URSS, denominado sistema *MKSA*. Las unidades de medición de las magnitudes eléctricas y magnéticas en el sistema internacional se dan en la tabla XXII. Las dimensiones de las magnitudes en el sistema internacional coinciden con las dimensiones en el sistema *CGSM*, y todas las unidades eléctricas y magnéticas del sistema internacional son múltiples de las del sistema *CGSM*.

INDICE ALFABETICO

Acoplamiento por reacción 520
Acumulador 245
Acumulador alcalino ferro-níquel 247
Acumulador de plomo 246
Aepinus 14
Agrupación de condensadores en paralelo 114
Agrupación de condensadores en serie 114
Aislador 15
Akúlov N. 362
Amperímetro 151, 404
Amperímetro térmico 152
Amperio 133, 565
Amperio hora 247
Amperio internacional 565
Amperio-vuelta 394
Amplitud de la (intensidad de) corriente 486, 493
Amplitud de la fuerza electromotriz 484
Anión 228
Anodo 215
Antena 553
Aplicación del teorema de Ostrogradski-Gauss 35
Arco eléctrico 293
Arkádiev V. 363, 551
Autoinducción 463

Balanza de torsión 18
Banda de conducción 211
Barrera 139, 214
Batería 189
Batería termoeléctrica 206
Bogoliúbov N. 138
Bobina de inducción 503
Brújula de tangentes 402

Caída (de tensión) catódica 291
Caída de potencial 175
Caída normal de tensión 291
Caja de Faraday 58
Caja de resistencias 156
Campo electromagnético 526
Campo electrostático 128
Campo magnético, 295, 299
Campo magnético de corrientes 305, 343
Campo magnético de las cargas en movimiento 413, 416
Campo magnético de un imán permanente 365
Campo magnético de un solenoide 312
Campo magnético giratorio 509
Cantidad de electricidad 19
Capa de detención 139, 214
Capacidad 65
Capacidad de un acumulador 247
Capacidad de un conductor 71
Capacidad eléctrica 65
Característica de caída (del arco) 293
Carga aparente 85
Carga del electrón 124, 127
Carga eléctrica 11
Carga específica de los iones positivos 433
Carga específica del electrón 427, 429
Carga libre 85
Carga puntual (concentrada) 18
Catión 228
Cátodo 215
Centelleo (parpadeo) de la corriente anódica 274
Circuito de corriente alterna 483
Circuito de corriente continua 171
Circuito magnético 392

Circulación del vector de excitación magnética 334
Circulación del vector de intensidad de las fuerzas ajenas 177
Circulación del vector de intensidad del campo eléctrico 48
Coeficiente de autoinducción 465
Coeficiente de autoinducción de un cable concéntrico 479
Coeficiente de autoinducción del solenoide 466
Coeficiente de inducción mutua 471
Coeficiente de recombinación 232
Colisión de los electrones con los átomos y las moléculas 279
Concentración equivalente 238
Condensador 67
Condensador cilíndrico 117
Condensador con anillo de protección 120
Condensador con láminas de dieléctricos 116
Condensador de capacidad variable 118
Condensador electrolítico 248
Condensador esférico 117
Condensador plano 67
Condiciones límites del vector de excitación magnética 376
Condiciones límites del vector de desplazamiento eléctrico 100
Condiciones límites del vector de inducción magnética 375, 376
Condiciones límites del vector de intensidad del campo electrostático 99
Conducción 136
Conducción electrolítica 225, 236, 248
Conducción electrolítica de los sólidos 248
Conducción por agente ionizante 251, 253
Conducción sin agente ionizante 251, 288
Conductancia equivalente 239
Conductibilidad 136
Conductibilidad de los semiconductores 208
Conductibilidad eléctrica 136, 165
Conductibilidad equivalente 239
Conductibilidad (eléctrica) mixta 212
Conductibilidad por defecto (por huecos) 212
Conductibilidad por exceso (por electrones) 212
Conductor 15
Conductor de primera clase (o electrónico) 15
Conductor de segunda clase (o electrolítico) 15
Conductor en un campo electrostático 56
Conexión de conductores en paralelo 148
Conexión de conductores en serie 148
Conexión de pilas en paralelo 190
Conexión de pilas en serie 189
Conexión en estrella 170
Conexión en triángulo 508
Conservación de las cargas 142
Constante de Curie 362
Constante de emisión 219
Constante de Hall 424
Constante de Planck 270
Constante dieléctrica 79
Constante electrodinámica 562
Constante piezoeléctrica 111
Contorno con corriente en un campo magnético uniforme 326
Contorno con corriente en un campo magnético variable 329
Contorno recorrido por una corriente 296
Corriente alterna 483, 488, 491, 504
Corriente anódica 216
Corriente continua 132
Corriente cuasiestacionaria 483
Corriente de convección 416
Corriente de cortocircuito 179
Corriente de desplazamiento 524
Corriente de inducción 449
Corriente de saturación 217
Corriente electrónica (termoiónica) en el vacío 215, 267, 270
Corriente en vacío 502
Corriente molecular 341
Corriente trifásica 507
Corrientes de Foucault 481
Cuerpo diamagnético 341
Cuerpo magnético 340
Cuerpo paramagnético 341
Cuerpos ferromagnéticos 341
Culombio 21
Chispa 293

Davidov B. 214
Densidad de energía 75, 477, 549
Densidad de la corriente 139, 140
Densidad de la energía eléctrica 75
Densidad de la energía magnética 477

www.elsolucionario.org

Densidad superficial de las cargas eléctricas 36
Densidad volumétrica de las cargas eléctricas 36
Dependencia de la resistividad respecto a la temperatura 136
Descarga aperiódica 514
Descarga luminiscente 290
Descarga oscilante 510
Desfase 485, 489, 493, 517
Detección de ondas electromagnéticas 551
Diámetro eficaz 262, 278
Diejtiar M. 362
Dieléctrico 15, 16, 81
Dieléctrico dipolar 108
Diferencia de fase 485, 489, 493, 517
Diferencia de potencial 46
Diferencia de potencial de contacto 193
Dínamo 498
Diodo 505
Dipolo 24, 63
Disociación 232
Disociación electrolítica 232
Distancia disruptiva 294
Divergencia del vector de inducción eléctrica 533
Divergencia del vector de inducción magnética 534
Divergencia del vector de intensidad del campo eléctrico 57
Dolivo-Dobrovolski M. 11, 509
Dorfman Y. 364

Ecuación de Kirchhoff para el circuito magnético 399
Ecuaciones de Maxwell 531
Ecuaciones de Maxwell-Lorentz 536
Efecto de centelleo (de parpadeo o fluctuante) 274
Efecto de Schottky 274
Efecto Hall 424
Efecto pelicular 481
Efecto Peltier 207
Efecto piezoeléctrico 111
Eijenvald A. 416
Electrización por frotamiento 11
Electrización por influencia 14
Electrólisis 225, 244
Electrólito 225
Electrometalurgia 247
Electrómetro 13
Electrómetro de cuadrantes 123
Electrómetro de cuerdas 122
Electromotor 498, 509
Electrón 15, 127
Electrón positivo 127
Electrón-voltio 195
Electrones libres de los conductores 156
Electroscopio 12
Electrostática 9
Electrostricción 85, 112
Elemento termoeléctrico 206
Emisión secundaria 220
Emisión termoiónica 222
Energía de ionización 280
Energía de los iones en un electrólito 234
Energía de un circuito de corriente continua 178
Energía de un conductor cargado 72
Energía de un sistema de cargas 69
Energía del campo electrostático 74
Energía del campo magnético 473
Energía del condensador 72, 82
Energía del dipolo 74
Equivalente electroquímico 229
Equivalente químico 229
Espacio obscuro de Faraday 290
Espectrógrafo de masas 437
Estricción magnética 361
Excitación de ondas electromagnéticas 551
Excitación magnética 298
Excitación magnética de un conductor rectilíneo e infinito con corriente 309
Excitación magnética de una corriente que fluye por un conductor cilíndrico 338
Excitación magnética en el centro de una corriente circular 309
Excitación magnética en el eje de un solenoide 312
Excitación magnética en el eje de un toroide 337
Excitación magnética en el eje de una corriente circular 310
Experimento de Eijenvald 417
Experimento de Einstein y Haas-Barnett 346
Experimento de Frank y Hertz 283
Experimento de Stern y Gerlach 347
Experimento de Stuart y Tolman 159
Experimento de Trouton y Noble 131, 421
Extracorriente de cierre 464, 468
Extracorriente de ruptura 464, 468

Faraday (F) 230
Faradio 67
Fenómeno secundario 227
Fenómeno termoeléctrico 203
Ferritos 364
Ferromagnetismo 355, 361
Fluctuación de la intensidad de la corriente 273
Flujo del vector de inducción 99
Flujo del vector de inducción magnética 371
Flujo del vector de inducción magnética a través de una superficie cerrada 372
Flujo eléctrico 30, 303
Fluxómetro 458
Foco del haz de electrones 444
Fok V. 249, 555
Fórmula de Boguslávski-Langmuir 217, 270
Fórmula de Lorentz 410
Frecuencia de resonancia 515
Frenkell Y. 364
Fuerza coercitiva 359
Fuerza de Lorentz 410
Fuerza electromotriz 175
Fuerza electromotriz de autoinducción 465
Fuerza electromotriz de inducción 450, 460
Fuerza electromotriz de polarización 242
Fuerza electromotriz eficaz 489
Fuerza magnetomotriz 393
Fuerza termoeléctrica 203
Fuerzas que actúan sobre la corriente en un campo magnético 319

Galvanómetro 402
Galvanómetro balístico 457
Galvanómetro de cuerda 406
Galvanómetro de espejo 406
Galvanómetro de tangentes 402
Galvanómetro térmico 150
Galvanoplastia 248
Generador de corriente alterna 499
Generador de corriente continua 500
Gradiente de la excitación magnética 332
Gradiente del potencial 53
Grado de disociación 232

Henrio 466
Hidratación de iones 228
Hipótesis de Maxwell 525
Histéresis 111, 359

Imán permanente 365
Imanación remanente 359
Impedancia 486
Impureza aceptadora 212
Impureza donadora 212
Inducción electromagnética 447
Inducción electrostática (*véase* vector de desplazamiento eléctrico)
Inducción magnética 343
Inducción mutua 471
Intensidad de la corriente 133
Intensidad del campo electrostático 22, 51
Intensidad del campo electrostático de dos planos infinitos 38
Intensidad del campo electrostático de un cilindro 41
Intensidad del campo electrostático de un plano infinito 36
Intensidad del campo electrostático de una carga puntual 23
Intensidad del campo electrostático de una esfera uniformemente cargada 40, 88
Intensidad del campo electrostático de una superficie esférica cargada 39
Intensidad del campo electrostático del dipolo 24
Intensidad del campo electrostático en las proximidades de un conductor 60
Intensidad del campo electrostático en un dieléctrico 87
Intensidad máxima de la corriente 486, 493
Ioffe 214, 346, 418
Ion 16
Ionización 280
Ionosfera 556
Isótopo 436

Jacobi 11, 248, 501

Kapitsa P. 346
Kenotrón 505
Kubetski 221

Landáu L. 138
Lébedev A. 446
Lébedev P. 11, 551

Lenin V. 11, 129, 430
Lente electrónica 441
Lenz H. 145, 450
Levitskaya 551
Ley de Ampere 320
Ley de Biot-Savart-Laplace 307
Ley de Coulomb 20, 93
Ley de Child-Langmuir 217, 270
Ley de Faraday de la fuerza electromotriz de inducción 452
Ley de Faraday, primera 228
Ley de Faraday, segunda 229
Ley de Kirchhoff, primera 183
Ley de Kirchhoff, segunda 184
Ley de Lenz-Joule 145
Ley de Ohm 134, 160, 164
Ley de Ohm para un circuito cerrado 175
Ley de Ohm para un circuito heterogéneo 181
Ley de Wiedemann-Franz 165
Leyes del circuito magnético 392
Líneas de flujo eléctrico 143
Líneas de fuerza del campo electrostático 27, 51
Líneas de fuerza del campo magnético 300, 309, 376
Líneas de inducción electrostática 97, 100
Líneas de inducción magnética 371
Lomonósov M. 13
Lukirski 249

Magnetismo remanente 359
Magnetización espontánea 363
Magnetón de Bohr 348
Mandelstam L. 556
Masa del electrón 126, 160, 430
Masa magnética 368
Maxwelio 564
Medición del potencial 120
Megohmio 135
Método de afluencia 252
Método de compensación 191
Método de deformación constante 253
Método de las parábolas 433
Microfaradio 67
Microscopio electrónico 444
Molécula polar (heteropolar) 83
Momento eléctrico de la molécula 108
Momento eléctrico del dipolo 25
Momento magnético 298, 329
Momento magnético de la molécula 344
Momento magnético del átomo 344
Momento magnético del cuadro 298
Momento magnético del electrón 344,
Momento magnético del imán 368
Motor con excitación en derivación 500
Motor con excitación en serie 500
Mott 214
Movilidad de los electrones 284
Movilidad de los iones 238, 255, 259, 264
Movimiento del electrón en un campo eléctrico 429, 431
Movimiento del electrón en un campo magnético, 411 427, 430

Oerstedio 560
Onda electromagnética 538
Onda planopolarizada 548
Optica electrónica 442
Oscilaciones continuas 514, 519
Oscilaciones de resonancia 515
Oscilaciones forzadas 515
Oscilador de Hertz 540
Oscilógrafo de rayos catódicos 439

Pantalla magnética 377
Papalexi N. 159, 556
Par termoeléctrico 204
Paso de la electricidad a través de los gases 251
Perforación del dieléctrico 17, 249
Período de una descarga oscilante 511, 513
Permaleación 360
Permeabilidad magnética 352, 353
Peso equivalente 220
Petrov V. 293
Pila 172, 200
Pila Daniell 172, 202, 245
Pila de Leclanché 173, 245
Pila polarizada 242
Pila patrón 192
Pila termoeléctrica 206
Plasma 292
Polarización de los electrodos 242
Polarización de un dieléctrico 17, 80
Polarización molecular 109
Polo magnético 368
Popov A. 551, 556
Positrón 15, 127
Potencia de la corriente alterna 488
Potencia de la corriente continua 178
Potencial 42

www.elsolucionario.org

Potencial de descomposición 244
Potencial de ionización 280, 281
Potencial de un sistema de cargas puntuales 44
Potencial de una carga puntual 45
Potencial del campo eléctrico 42, 49
Protección electrostática 59
Puente de Wheatstone 186
Punto de Curie 362

Radar 556
Radiolocalización 556
Reacción secundaria 227
Recombinación 232, 254
Recorrido libre del electrón 275
Recorrido libre medio 276
Rectificador de germanio 504
Rectificador de mercurio 505
Rectificador de selenio 505
Rectificador seco 209
Registro de ondas electromagnéticas 551
Regla de la mano izquierda 321
Regla de Lenz 450
Regla del sacacorchos 300, 321
Relación entre el potencial y la carga volumétrica 56
Rendimiento de los acumuladores 247
Reóstato 154
Reóstato de arranque 501
Resistencia 134, 154
Resistencia aparente 486
Resistencia de un circuito magnético 393
Resistencia en derivación 150
Resistencia específica 135
Resistencia exterior 173
Resistencia inductiva 486
Resistencia interior (interna) 173
Resistividad 135
Resonancia 493, 516
Richman G. 13
Rotación del vector de excitación magnética 533
Rotación del vector de intensidad del campo eléctrico 535
Rozing B. 362
Ruido de Schottky 274

Sal de Rochelle (sal de Seignette) 111
Saturación magnética 358
Schottky 214
Schúkartev S. 249
Sección eficaz de las moléculas 278
Semiconductor 16, 139
Serie de Volta 193
Shálnikov A. 138
Sistema absoluto (físico) de unidades 314, 563
Sistema astático de imanes (o de agujas imantadas) 403
Sistema electromagnético internacional de unidades 314, 317, 562
Sistema electrostático internacional de unidades 314, 561
Sistema internacional de unidades 565
Slaviánov N. 11, 293
Solenoide 301
Solvato 237
Spin 348
Stolétov A. 358
Supercondnctibilidad 137, 147
Superficies equipotenciales 49
Susceptibilidad eléctrica 81
Susceptibilidad magnética 352

Temperatura de Curie 361
Teorema de Ostrogradski—Gauss 32
Teorema de Ostrogradski—Gauss para el flujo de inducción electrostática 103
Teorema de Ostrogradski-Gauss para el flujo de inducción magnética 372
Teoría de la conductibilidad eléctrica 160, 167
Teoría de la relatividad 422
Teorías de las bandas de conducción 214
Teoría electrónica de la conductibilidad 160
Termoelemento 206
Termoelemento al vacío 206
Termo-pila 206
Tesla 564
Toroide 337
Trabajo de giro de un cuadro 391
Trabajo de las fuerzas del campo electrostático 47
Trabajo de rotación de un disco 391
Trabajo de salida 195
Trabajo de desplazamiento de un contorno 386
Trabajo invertido en la histéresis 477
Trabajo realizado al desplazar una carga por una trayectoria cerrada 45
Transformador 501
Trapeznikova O. 249
Tubo catódico 215
Tubo de tres electrodos 519

Unidad electromagnética absoluta de autoinducción 465
Unidad electromagética absoluta de cantidad de electricidad 318
Unidad electromagnética absoluta de excitación magnética 318
Unidad electromagnética absoluta de flujo de inducción 256
Unidad electromagnética absoluta de fuerza electromotriz 453
Unidad electromagnética absoluta (CGSM) de inducción magnética 343
Unidad electromagnética absoluta de intensidad de corriente 315
Unidad electrostática absoluta de capacidad eléctrica 67
Unidad electrostática absoluta de carga 20
Unidad electrostática absoluta de diferencia de potencial 46
Unidad electrostática absoluta de excitación magnética 318, 561
Unidad electrostática absoluta de inducción magnética 562
Unidad electrostática absoluta de intensidad de corriente 133
Unidad electrostática absoluta de resistencia 134
Unidad electrostática absoluta de intensidad del campo eléctrico 22
Unidad práctica de capacidad eléctrica 66
Unidad práctica de carga 20
Unidad práctica de diferencia de potencial 46
Unidad práctica de excitación magnética 314, 561
Unidad práctica de inducción magnética 563
Unidad práctica de intensidad de corriente 133
Unidad práctica de resistencia 135
Unidad práctica del coeficiente de inducción mutua 471
Usaguin I. 501

Valencia 229
Valor eficaz de la intensidad de la corriente 489
Válvula amplificadora 553
Válvula de tres electrodos 519
Vatímetro 407
Vector de desplazamiento eléctrico 97
Vector de imanación 357
Vector de polarización 84
Vector de Umov-Poynting 549
Velocidad de las ondas electromagnéticas 545, 549
Velocidad de los electrones 268
Vértsner V. 446
Voltímetro 152
Voltímetro electrostático 150
Voltio 47
Vul B. 141
Yáblochkov (Jablochkov) P. 11, 293, 501

Estimados lectores:

La editorial MIR publica literatura técnico — científica y de ficción, en la que figuran los mejores libros soviéticos de divulgación científica y de texto, traducidos al español.

PERELMAN Y. Física Recreativa, Libro I

¿Puede cogerse con la mano una bala disparada? ¿Por qué no se puede conseguir el «movimiento continuo»? ¿Cómo se produce el espejismo?

Este libro da respuesta a éstas y muchas otras preguntas interesantes.

«Física Recreativa» es el mejor libro del gran divulgador soviético Yakov Perelmán, autor también de «Astronomía Recreativa», «Algebra Recreativa», «Matemáticas Recreativas», «Mecánica Recreativa» y muchos otros libros. La «Física Recreativa» ha sido editada 17 veces en ruso y traducida a varios idiomas. Su éxito se debe al extraordinario talento del autor, que ha sabido describir y explicar de forma viva y amena hechos y fenómenos ordinarios, con los cuales nos tropezamos cada día, aunque con frecuencia no nos damos cuenta de su profundo sentido físico.

PERELMAN Y. Física Recreativa, Libro II

Este segundo libro de «Física Recreativa» no es continuación del primero. Se trata de una obra independiente que abarca un círculo de fenómenos aún mayor. El lector encontrará en ella un gran número de proyectos de máquinas para conseguir el «movimiento continuo», ilusiones ópticas muy interesantes y tendrá ocasión de recordar cómo el héroe de Mark Twain hirvió su barómetro para hallar la altura del lugar.

Los sencillos experimentos que se describen en este libro ayudan a profundizar en la esencia de procesos físicos que, aunque parecen ordinarios exteriormente, proporcionan un rico material para reflexionar.

Es un libro cuya comprensión está al alcance de todos los lectores.

www.elsolucionario.org

KISELEV A., KRASNOV M., MAKARENKO G. Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Los autores de este libro son Mijail Krasnov, Grigori Makarenko, candidatos a doctores en ciencias físico-matemáticas y docentes del Instituto Energético de Moscú, y Alejandro Kiselev, colaborador científico superior del Instituto Unificado de investigaciones nucleares de la ciudad de Dubno.

En este libro se han recopilado cerca de 1 000 problemas y ejercicios del curso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se ha incluido también el método de isoclinas para las ecuaciones de I y II orden, problemas para hallar las trayectorias ortogonales, dependencia e independencia lineales de los sistemas de funciones. Además, contiene problemas para hallar la estabilidad de las soluciones, el método del parámetro pequeño, el método para resolver ecuaciones y los sistemas.

Cada parágrafo empieza con una breve introducción teórica. Después se exponen las determinaciones y métodos principales de solución de los problemas. Todos los problemas van acompañados de su resultado; para algunos de ellos hay indicaciones de cómo resolverlos.

En esta obra se ha incluido también cierta cantidad de problemas muy complejos.

Es un libro de texto para los estudiantes de los centros de enseñanza superior. Ha aparecido dos veces editado en ruso.

KUROSCH A. Curso de álgebra superior

Este curso de álgebra superior para los estudiantes de las facultades de matemáticas de las universidades, elaborado por Alejandro Kurosch, doctor en ciencias físico-matemáticas de la Universidad Estatal de Moscú, contiene los fundamentos de la álgebra lineal y de la álgebra de polinomios. Se analizan los sistemas arbitrarios de las ecuaciones de primer grado, se describe la teoría de los espacios multidimensionales vectoriales y euclídeos. Se examinan las ecuaciones con una incógnita de grado arbitrario, así como las bases correspondientes de la teoría de los campos, anillos y grupos.

El material del libro está expuesto a un alto nivel científico. Este libro goza de gran popularidad entre los pedagogos y profesores, así como entre los estudiantes de las universidades y centros de enseñanza superior politécnica de la URSS.

Esta obra ha aparecido ocho veces editada en ruso y se ha traducido a muchos otros idiomas.

Rogamos dirijan sus pedidos de literatura a las firmas que en su país se dedican a la venta de libros y que tienen relaciones comerciales con VO «Mezhdunarodnaya Kniga» (Moscú).